

平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限, 総合科学部 K305

プリント No.6 (5月21日配付)

問題 1. 次の行列を行基本変形により標準階段行列にせよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 3 & 21 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 21 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

オプション: (1), (2), (3) を比較して何が見えるか? また (5), (6) を比較して何が見えるか?

問題 2. 次の行列の階数を求めよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 15 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 0 & 13 & 23 & 19 \\ -1 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 19 & 20 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \\ 15 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 13 & 8 & 2 \\ 23 & 9 & 19 \\ 19 & 6 & 20 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

オプション: (1), (4) を比較して何が見えるか? また (2), (5) を比較して何が見えるか?

問題 3. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} y + z = 4 \\ x + y = 3 \\ x + z = 5 \end{cases} & (2) \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x + 7y - z = 8 \\ 2x - 4y + 5z = -2 \end{cases} \\ (3) \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} & (4) \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - y - 3z = 0 \\ 4x - y + 3z = 6 \end{cases} \end{array}$$

問題 4. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} & (2) \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + 8z = 0 \\ 3x + 5y + 5z = 0 \end{cases} \\ (3) \begin{cases} x - 3y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} & (4) \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ x + 7y + 6z = 27 \\ 5x + y - 4z = -1 \end{cases} \end{array}$$

問題 5. 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = -1 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 3z - w = 2 \\ 2x + 3y + 4z + w = 0 \\ 2x + 2y + 4z - w = -2 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$$

問題 6. 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - z + w = 0 \\ x - 2z - w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y - z + w = 0 \\ x - 2z - w = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y + z - w = 1 \\ 2x + 5y - z - 3w = 3 \\ 4x + 9y + z - 5w = 5 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x + 2y + z - w = 1 \\ 2x + 5y - z - 3w = -3 \\ 4x + 9y + z - 5w = 5 \end{cases}$$

オプション：(1), (2) を比較して何が見えるか？また (3), (4) を比較して何が見えるか？

問題 7. (1) E を 3 次の単位行列とする。次の行列から行基本変形により得られる標準階段行列は、それぞれ $(E \ A)$, $(E \ B)$ の形であることを示し、更に A, B を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A, B はそれぞれ互いの逆行列であることを確認せよ。

オプション：行列 A, B は何を表しているか？

問題 8. (1) 次の行列を行基本変形により標準階段行列にせよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 27 & 18 & -15 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -12 & -6 & 9 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 21 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -15 \\ -x + y + 3z = 9 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + y = 3 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + z + 27w = 18 \\ -x + y + 3z - 12w = -6 \\ 4x - 3y + 2z + 21w = 3 \end{cases}$$

問題 9. 連立方程式
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = a \end{cases}$$
 について以下の問いに答えよ。

- (1) 係数行列および拡大係数行列についてそれぞれの階数を求めよ。
- (2) 解を持つための必要十分条件を求め、またそのときの解を求めよ。

問題 10. 次の連立方程式が解を持つように a を定め、そのときの解を求めよ。

$$\begin{cases} y + 2z + w = 1 \\ x - y - 3z - 2w = -2 \\ x + 2y + 3z + w = a \\ -2x + y - w = -1 \end{cases}$$

問題 11. 次の連立方程式が解を持つための a, b, c についての必要十分条件を求めよ。

$$(1) \begin{cases} x - 2y + 3z = a \\ 2x + y + z = b \\ x + 3y - 2z = c \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 2z + 2w = a \\ x - y - z + w = b \\ x + 5y - 4z + 4w = c \end{cases}$$

問題 12. 次の連立方程式が解を持つように a を定め、そのときの解を求めよ。

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

問題 13. 次の連立方程式が解を持つように a を定め、そのときの解を求めよ。

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

問題 14. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ を行基本変形により標準階段行列にせよ。

問題 15. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}$ を行基本変形により標準階段行列にせよ。