平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.6（5 月 21 日配付）略解

問題 1. 行基本変形により標準階段行列にする。

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&0\\0&0&1&7\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1&0&0&-3/8\\0&1&0&3\\0&0&1&7/8\end{pmatrix}\qquad (5)\ \begin{pmatrix}1&0&5/2&0\\0&1&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad (6)\ \begin{pmatrix}1&0&5/2&0\\0&1&1/2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

オプション問題ヒント：もとのブロック分けの構造が標準階段行列にも反映している。しかしなぜそうなるか説明できないうちは、**大けがのもと**なので使うのを控えるべき。

問題 2. 行基本変形により標準階段行列にする。

$$(1)\ \begin{pmatrix}1&0&13/24&0\\0&1&1/24&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&0&67/13&74/13\\0&1&23/13&19/13\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1&0&0&-15\\0&1&0&3\\0&0&1&-4\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1/24\\0&0&1&13/24\end{pmatrix}\qquad (5)\ \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad (6)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって階数は (1) 3 (2) 2 (3) 3 (4) 3 (5) 2 (6) 3 となる。

オプション問題ヒント：(1) の列シャッフルが (4) であり、(2) の転置が (5) である。

問題 3. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix}0&1&1&4\\1&1&0&3\\1&0&1&5\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-1&3&1\\3&7&-1&8\\2&-4&5&-2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-1&-1&4\\2&-3&1&2\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&3&-2&2\\4&-1&-3&0\\4&-1&3&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&0&-1/2\\0&1&0&3/2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

上段は拡大係数行列、下段は対応する標準階段行列である。解は次の通りであり、それぞれ存在しかつ一意である。

$$(1)\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\1\end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\quad (4)\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

問題 4. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&1&1&4\\1&2&1&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\2&1&8&0\\3&5&5&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&-3&3&1\\2&1&-1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&-1&-2&-5\\1&7&6&27\\5&1&-4&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&4/7\\0&1&-1&-1/7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\quad s\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4/7\\-1/7\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ここで s は解の自由度を表すパラメータである。

問題 5. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

拡大係数行列	標準階段行列	解
$\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&-1\\1&1&2&2&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&-1&2\\2&3&4&1&0\\2&2&4&-1&-2\\1&1&3&-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&5/2&-5\\0&1&0&2&2\\0&0&1&-5/2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5/2\\-2\\5/2\\1\end{pmatrix}$

問題 6. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\1&0&-2&-1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&5&0\\0&1&0&4&0\\0&0&1&3&0\end{pmatrix}\quad s\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&0&1\\0&1&-1&1&0\\1&0&-2&-1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0&5&1\\0&1&0&4&0\\0&0&1&3&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1&1\\2&5&-1&-3&3\\4&9&1&-5&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&7&1&-1\\0&1&-3&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\3\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1&1\\2&5&-1&-3&-3\\4&9&1&-5&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&7&1&0\\0&1&-3&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解集合は空

問題 7. 行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} > \text{基本変形} > \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -7/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & -16/5 & -18/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 6/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} > \text{基本変形} > \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6/5 & 3/10 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/10 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

従って $A = \begin{pmatrix} 1/5 & -7/5 & -1/5 \\ -2/5 & -16/5 & -18/5 \\ 2/5 & 6/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6/5 & 3/10 & 11/5 \\ -3/5 & 1/10 & 2/5 \\ 2/5 & -2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ である。

問題 8. (1) 行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 27 & 18 & -15 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -12 & -6 & 9 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 21 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/7 & -50/7 & 46/7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -11 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8/7 & -5/7 & 13/7 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 拡大係数行列を行基本変形により標準階段行列にするのだが、そのためには (1) の行列から必要ブロックを切り出して利用できる。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -15 \\ -1 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 46/7 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 46/7 \\ 10 \\ 13/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{解集合は空}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 27 & 18 \\ -1 & 1 & 3 & -12 & -6 \\ 4 & -3 & 2 & 21 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/7 & -50/7 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -8/7 & -5/7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -50/7 \\ -11 \\ -5/7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 17/7 \\ 11 \\ 8/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 9. (1) 拡大係数行列は行基本変形により次の標準階段行列になる。

条件	標準階段行列	階数	条件	標準階段行列	階数
$a \neq 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3	$a = 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

上の行列から必要ブロックを切り出して係数行列の階数は 2 であることが分かる。

(2) 必要十分条件は $a = 2$ であり、そのときの解は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

問題 10. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & a \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overset{a \neq 1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{a = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

必要十分条件は $a = 1$ であり、そのときの解は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

問題 11. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & 3 & -2 & c \end{pmatrix} \quad \overset{a-b+c \neq 0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{a-b+c=0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & (a+2b)/5 \\ 0 & 1 & -1 & (-2a+b)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 5 & -4 & 4 & c \end{pmatrix} \quad \overset{3a-2b-c \neq 0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \overset{3a-2b-c=0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 & (a+b)/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & (a-b)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

以上より求める必要十分条件は (1) $a - b + c = 0$ (2) $3a - 2b - c = 0$ である。

問題 12. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix} \quad \overset{a \neq 1,\, a \neq -2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/(2+a) \\ 0 & 1 & 0 & 2/(2+a) \\ 0 & 0 & 1 & 2/(2+a) \end{pmatrix}} \quad \overset{a=1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \overset{a=-2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

必要十分条件は $a \neq -2$ であり、解は以下の場合分けに応じて与えられる。

$$a \neq 1,\, a \neq -2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 2/(2+a) \\ 2/(2+a) \\ 2/(2+a) \end{pmatrix} \quad a = 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 13. 拡大係数行列を書き下し、行基本変形により標準階段行列にする。

$$\left(\begin{matrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} a \neq \sqrt{2},\, a \neq -\sqrt{2},\, a \neq 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & (a-1)/(a^2-2) \\ 0 & 1 & 0 & (a-2)/(a^2-2) \\ 0 & 0 & 1 & (a-1)/(a^2-2) \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a = \sqrt{2} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = -\sqrt{2} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

必要十分条件は $a \neq \sqrt{2},\, a \neq -\sqrt{2}$ であり、解は以下の場合分けに応じて与えられる。

$$a \neq \sqrt{2},\, a \neq -\sqrt{2},\, a \neq 0 \text{ のとき } \left(\begin{matrix} (a-1)/(a^2-2) \\ (a-2)/(a^2-2) \\ (a-1)/(a^2-2) \end{matrix}\right)$$

$$a = 0 \text{ のとき } \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right) + s \left(\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

問題 14. 以下のように場合分けされる。

$$\begin{matrix} a_{22} \neq 0,\, a_{33} \neq 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{22} \neq 0,\, a_{33} = 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & a_{13} - a_{12}a_{23}/a_{22} \\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{22} = 0,\, a_{33} \neq 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{22} = 0,\, a_{33} = 0,\, a_{23} \neq 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{22} = 0,\, a_{33} = 0,\, a_{23} = 0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

問題 15. 以下のように場合分けされる。

$$\begin{matrix} a \neq 1,\, b \neq 1 \; a \neq b \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \neq 1,\, b \neq 1 \; a = b \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a \neq 1,\, b = 1 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a = 1,\, b \neq 1 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a = 1,\, b = 1 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$