平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.7（5 月 28 日配付）

行基本変形は次のタイプの操作から構成されていた。

行基本変形

1° 着目行に他の行の定数倍を加える。

2° 着目行を定数倍（$\neq 0$）する。

3° 2 つの着目行を入れ替える。

問題 1. 零ベクトルでない m 項列ベクトル $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)$ と零ベクトルでない n 項行ベクトル $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ が与えられたとする。$m \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

を行基本変形により標準階段行列にせよ。

次の定理が以下の議論の基礎となる。講義で用いているテキストなどを参照して定理 1 に自分なりの証明をつけてみよ。

定理 1. 任意の行列は行基本変形を有限回繰り返すことにより標準階段行列にできる。（はじめから標準階段行列ならもちろん何もしなくて良い）。

行基本変形のそれぞれは対応する基本行列を左からかけると実現される。$3 \times n$ 行列で例示しよう。n 項行ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を使ってブロック分けすると次のようになる。

$$1^\circ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 + c\mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 3 行に第 1 行の } c \text{ 倍を加えた。}$$

$$2^\circ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ c\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 2 行を } c \text{ 倍した（但し } c \neq 0\text{）。}$$

$$3^\circ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 1 行と第 2 行を入れ替えた。}$$

基本行列はすべて正則行列であり、その逆行列も基本行列である。

問題 2. (1) m 次正則行列 Q, R に対して積 QR も m 次正則行列であることを示せ。

(2) 次の命題を示せ：$m \times n$ 行列 A に対して、積 PA が標準階段行列となるような m 次正則行列 P が存在する。

問題 3. (1) m 次正方行列 B と n 項行ベクトル $\mathbf{a}$ に対して積 $B\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ (m-1)\times n \text{ 零行列} \end{pmatrix}$ の (i,j) 成分は何か？

(2) $m \times n$ 行列 A が行基本変形により階数 1 の標準階段行列にできたとする。このとき

$$A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix}$$

となるような零ベクトルでない m 項列ベクトル $\mathbf{x} = {}^{\mathrm{t}}(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)$ と零ベクトルでない n 項行ベクトル $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)$ が存在することを示せ。

問題 4. (1) A を $m \times n$ 行列、B を $n \times p$ 行列とする。積 AB の行のうち零ベクトルに等しい行数は A の行のうち零ベクトルに等しい行数以上であることを確かめよ。

(2) A が n 次正則行列なら、A のどの行も零ベクトルでないことを示せ。

(3) S を $n \times n$ 標準階段行列とする。このとき S が単位行列であるためにはどの行も零ベクトルでないことが必要十分である。これを確かめよ。

(4) A, B を n 次正方行列とする。次の命題を示せ：積 AB が単位行列なら A, B は互いの逆行列である。

以上を元にして次の定理が証明できる。

定理 2. (1) 正方行列が正則行列であるためには行基本変形を有限回繰り返すことにより単位行列にできることが必要十分である。

(2) n 次正則行列はいくつかの n 次基本行列の積で表される。

講義で用いているテキストなどを参照して定理 2 に自分なりの証明をつけてみよ。これが行基本変形により逆行列が求められるということの裏付けになっている。

問題 5. E を n 次単位行列とする。n 次正方行列 A に対して次の命題を示せ。

(1) A が正則行列であるなら、$(A \quad E)$ を行基本変形により $(E \quad A^{-1})$ にできる。

(2) $(A \quad E)$ を行基本変形により $(E \quad B)$ という形にできるなら、A は正則行列である。

列基本変形

1° 着目列に他の列の定数倍を加える。

2° 着目列を定数倍（$\neq 0$）する。

3° 2つの着目列を入れ替える。

それぞれの操作は対応する基本行列を右からかけると実現される。$n \times 3$ 行列で例示しよう。n 項列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を使ってブロック分けすると次のようになる。

$$1^\circ \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 + c\mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第3列に第1列の } c \text{ 倍を加えた。}$$

$$2^\circ \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & c\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第2列を } c \text{ 倍した（但し } c \neq 0\text{)。}$$

$$3^\circ \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第1列と第2列を入れ替えた。}$$

定理 3. 任意の $m \times n$ 行列は行基本変形と列基本変形を有限回繰り返すことにより

$$\begin{pmatrix} r \text{ 次単位行列} & r \times (n-r) \text{ 零行列} \\ (m-r) \times r \text{ 零行列} & (m-r) \times (n-r) \text{ 零行列} \end{pmatrix}$$

という形の行列にでき、かつその階数 r は基本変形の手順によらず一定である。

講義で用いているテキストなどを参照して定理3に自分なりの証明をつけてみよ。行列 A を与えたとき（基本変形の手順によらないから）その固有量として**階数**r が定まる。対応する行列を A の**標準形**と呼ぶことにする。記号としては $\boxed{\operatorname{rank} A}$ を用いる。

問題 6. O を $n \times n$ 零行列とする。n 次正方行列 A に対して次の命題を示せ。

(1) A が正則であるなら、$BA = O$ を満たす n 次正方行列 B は O のみである。

(2) A が正則でないなら、$BA = O$ を満たしかつ O でない n 次正方行列 B が存在する。

定理 4. 行列 A が与えられたとする。

(1) A に行基本変形を繰り返すことにより得られる標準階段行列の階数は一定であり、それは $\operatorname{rank} A$ に等しい。

(2) A に行基本変形を繰り返すことにより得られる標準階段行列は、基本変形の手順によらず一定である。

講義で用いているテキストなどを参照して定理 4 に自分なりの証明をつけてみよ。余談だが定理 4.(2) のおかげで、行基本変形により標準階段行列にせよという問題が成立する。

問題 7. n 次正方行列 A が与えられたとする。次の行列の階数を A の階数と比較せよ。等しければそれを示し、異なればそのような実例を挙げよ。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} A & {}^tA \end{pmatrix}$$

定理 5. $m \times n$ 行列 A が与えられたとする。

(1) $\operatorname{rank} A \leq m$ かつ $\operatorname{rank} A \leq n$ が成り立つ。

(2) m 次正則行列 P に対して $\operatorname{rank}(PA) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。
n 次正則行列 Q に対して $\operatorname{rank}(AQ) = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。

(3) $\operatorname{rank} {}^{t}A = \operatorname{rank} A$ が成り立つ。

(4) $n \times p$ 行列 B に対して $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A$ かつ $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} B$ が成り立つ。

問題 8. 定理 5 の (1), (2), (3) を示せ。

連立 1 次方程式

連立 1 次方程式は**係数行列**と呼ばれる $m \times n$ 行列 A と**非同次項**と呼ばれる m 項列ベクトル $\mathbf{b}$ により $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と表現される。

1° $(A \quad \mathbf{b})$ というブロック分けを持つ行列を**拡大係数行列**と呼ぶ。

2° 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つとき、どれでも良いがそのうちの一つを**特殊解**と呼ぶ。

定理 6. 解の存在は $\operatorname{rank}(A \quad \mathbf{b}) = \operatorname{rank} A$ の成立と同値である。

同次連立 1 次方程式

拡大係数行列が $(A \quad \mathbf{0})$ の形である連立 1 次方程式を同次型という。同次連立 1 次方程式は特殊解 $\mathbf{0}$ をもち、これを**自明解**という。

定理 7. 同次方程式に対し自明でない解の存在は $\operatorname{rank} A < n$ の成立と同値である。

同伴する同次方程式

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を**同伴する同次方程式**と呼ぶ。

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つとき、解の構造は次で与えられる。

特殊解 + 同伴する同次方程式の解