# 平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

## プリント No.8（6 月 11 日配付）

**定義 1.** 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ からそれ自身への 1 対 1 写像を $n$ 文字の**置換**という。置換 $\sigma$ は $1, 2, \cdots, n$ それぞれの対応先 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ で記述される。それをまとめて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad i \mapsto \sigma(i)$$

のように表す。下段を $n$ 文字の順列と見なせば、置換と順列は同じものともいえる。

**問題 1.** 2 文字の置換をすべて書き出せ。3 文字の置換をすべて書き出せ。

**定義 2.** (1) $1, 2, \cdots, n$ いずれの対応先もそれ自身であるような置換を**恒等置換**という。$n$ 文字の置換 $\sigma$ に対してその逆対応を $\sigma$ の**逆置換**といい $\sigma^{-1}$ で表す。

(2) $n$ 文字の置換 $\sigma, \tau$ が与えられたとする。このとき $\tau$ を行い、次に $\sigma$ を行う対応を $\sigma\tau$（$\sigma$ が左 $\tau$ が右）とかく。**積** $\sigma\tau$ も $n$ 文字の置換である。

$$\sigma\tau : i \mapsto \sigma(\tau(i))$$

**問題 2.** 5 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ が与えられたとする。

(1) $\sigma(2)$, $\sigma(5)$ はそれぞれ何か？$\tau(1)$, $\tau(4)$, $\tau(5)$, $\tau(3)$ はそれぞれ何か？

(2) $\sigma^{-1}$ を求めよ。$\tau^{-1}(1)$, $\tau^{-1}(3)$, $\tau^{-1}(5)$, $\tau^{-1}(4)$ はそれぞれ何か？

**問題 3.** (1) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して積 $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ をそれぞれ求めよ。

(2) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられたとする。積 $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ をそれぞれ求め、それらを比較せよ。また $\sigma^{-1}$, $\tau^{-1}$, $(\sigma\tau)^{-1}$ を求め、$(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ が成り立つことを確認せよ.

**定義 3.** $1, 2, \cdots, n$ の中から特定の 2 文字だけを入れ替えて対応させ、それら以外の対応先は自身であるような置換を**互換**と呼ぶ。$i, j$ を入れ替える互換を $(i \quad j)$ で表す。例えば

$$(1 \quad 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ (3 \quad 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

が 5 文字の置換である場合に成り立つ。

**問題 4.** 5 文字の置換である場合に次の互換の積をそれぞれ求めよ。

(1) $(1\ \ 3)(1\ \ 2)$, $(1\ \ 3)(1\ \ 4)(1\ \ 2)$, $(4\ \ 5)(4\ \ 3)(4\ \ 2)$.
オプション：$(i_1\ \ i_r)\cdots(i_1\ \ i_3)(i_1\ \ i_2)$

(2) $(2\ \ 3)(3\ \ 4)(2\ \ 3)$, $(1\ \ 2)(2\ \ 3)(3\ \ 4)(2\ \ 3)(1\ \ 2)$.
オプション：$(i\ \ i+1)\cdots(j-2\ \ j-1)(j-1\ \ j)(j-2\ \ j-1)\cdots(i\ \ i+1)$. 但し $i \leq j-2$ であるとする。

**定義 4.** $1, 2, \cdots, n$ の中から特定の $r$ 個 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ がリストアップされ、

$$i_1 \mapsto i_2,\ \ldots,\ i_{r-1} \mapsto i_r,\ i_r \mapsto i_1$$

と対応しており、それら以外の対応先は自身であるような置換を $(i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_r)$ で表す。6 文字の置換である場合に例を挙げると次のごとくである。

$$(1\ \ 2\ \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ (2\ \ 4\ \ 6\ \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

このようなタイプの置換を**巡回置換**と呼ぶ。互換は巡回置換の一種である。

**問題 5.** 6 文字の置換 $\sigma, \tau$ を次の積で与えられるものとする。

$$\sigma = (4\ \ 3\ \ 1\ \ 6)(2\ \ 5),\ \tau = (1\ \ 6\ \ 5)(3\ \ 4\ \ 2).$$

(1) $\sigma(3), \sigma(5), \tau(1), \tau(2)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $(2\ \ 5)(4\ \ 3\ \ 1\ \ 6)$ を求め、$\sigma$ と比較せよ。$(3\ \ 4\ \ 2)(1\ \ 6\ \ 5)$ を求め、$\tau$ と比較せよ。

(3) $\sigma^{-1}, \tau^{-1}$ をそれぞれ求めよ。

**問題 6.** 次の置換を巡回置換の積でそれぞれ表せ。問題 5 がヒントである。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 6 & 3 & 8 & 4 & 5 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

**問題 7.** (1) 巡回置換 $(1\ \ 4\ \ 5)$, $(1\ \ 6\ \ 5)$, $(2\ \ 3\ \ 7\ \ 4)$ を互換の積でそれぞれ表せ。
問題 4 (1) がヒントである。

(2) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ を互換の積でそれぞれ表せ。

**問題 8.** 次の置換を互換の積でそれぞれ表せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**定理 1.** (1) 任意の置換は互換の積で表せる（表し方はたくさんある）。

(2) 与えられた置換を積で表すとき、必要な互換の個数の偶奇性は表し方によらない。

講義で用いているテキストなどを参照して定理 1 に自分なりの証明をつけてみよ。

**定義 5.** 偶数個の互換の積で表される置換を**偶置換**、奇数個の互換の積で表される置換を**奇置換**と呼ぶ。置換 $\sigma$ が与えられたとき、その**符号** $\operatorname{sgn}\sigma$ を次で定義する.

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma\text{は偶置換} \\ -1 & \sigma\text{は奇置換} \end{cases}$$

**問題 9.** (1) 置換 $(1\ \ 2)(3\ \ 4)$, $\sigma = (2\ \ 4\ \ 1)(5\ \ 3)$ に対し、それぞれ符号を求めよ。

(2) 次の置換 $\sigma, \tau$ についてそれぞれ互換の積で表し、$\operatorname{sgn}\sigma$, $\operatorname{sgn}\tau$ をそれぞれ求めよ。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**問題 10.** 3 文字の置換すべてについて符号を求めよ。

**問題 11.** 次の置換を互換の積でそれぞれ互換の積で表し、それぞれ符号を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**定義 6.** $n$ 文字の置換 $\sigma$ が与えられたとする。$1 \le i < j \le n$ なる数の組 $i, j$ が $\sigma$ に関して転倒しているとは $\sigma(i) > \sigma(j)$ であることをいう。$\sigma$ に関して転倒している組 $i, j$ の総数を置換 $\sigma$ の**転倒数**という。例えば置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ に関して転倒している組は

| $1,2$ | $1,3$ | $1,4$ | $1,5$ | $1,6$ | $2,3$ | $2,4$ | $2,5$ | $2,6$ | $3,4$ | $3,5$ | $3,6$ | $4,5$ | $4,6$ | $5,6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ✓ | | ✓ | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ |

においてチェックマークをつけたものであり、よって転倒数は 8 である。

**問題 12.** 置換 $\sigma, \tau$ を次で与える。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix},\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $\sigma$, $\tau$, $\sigma^{-1}$, $\tau^{-1}$ それぞれの転倒数を求めよ。

(2) 置換 $\sigma$ を互換の積で表し、$\operatorname{sgn}\sigma$ を求め、それが $\sigma$ の転倒数の偶奇性と一致することを確かめよ。

(3) 積 $\sigma\tau$ の転倒数を求め、更に $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\tau$ を確認せよ。

**定理 2.** 転倒数が偶数の置換は偶置換であり、転倒数が奇数の置換は奇置換である。