

平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限, 総合科学部 K305

プリント No.8 (6月11日配付)

定義 1. 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ からそれ自身への 1 対 1 写像を n 文字の置換という。置換 σ は $1, 2, \dots, n$ それぞれの対応先 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ で記述される。それをまとめて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} i \mapsto \sigma(i)$$

のように表す。下段を n 文字の順列と見なせば、置換と順列は同じものともいえる。

問題 1. 2 文字の置換をすべて書き出せ。3 文字の置換をすべて書き出せ。

定義 2. (1) $1, 2, \dots, n$ いずれの対応先もそれ自身であるような置換を恒等置換という。
 n 文字の置換 σ に対してその逆対応を σ の逆置換といい σ^{-1} で表す。

(2) n 文字の置換 σ, τ が与えられたとする。このとき τ を行い、次に σ を行う対応を $\sigma\tau$ (σ が左 τ が右) とかく。積 $\sigma\tau$ も n 文字の置換である。

$$\sigma\tau : i \mapsto \sigma(\tau(i))$$

問題 2. 5 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ が与えられたとする。

(1) $\sigma(2), \sigma(5)$ はそれぞれ何か? $\tau(1), \tau(4), \tau(5), \tau(3)$ はそれぞれ何か?

(2) σ^{-1} を求めよ。 $\tau^{-1}(1), \tau^{-1}(3), \tau^{-1}(5), \tau^{-1}(4)$ はそれぞれ何か?

問題 3. (1) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して積 $\sigma\tau, \tau\sigma$ をそれぞれ求めよ。

(2) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられたとする。積 $\sigma\tau, \tau\sigma$ をそれぞれ求め、それらと比較せよ。また $\sigma^{-1}, \tau^{-1}, (\sigma\tau)^{-1}$ を求め、 $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$ が成り立つことを確認せよ。

定義 3. $1, 2, \dots, n$ の中から特定の 2 文字だけを入れ替えて対応させ、それら以外の対応先は自身であるような置換を互換と呼ぶ。 i, j を入れ替える互換を $(i \ j)$ で表す。例えば

$$(1 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, (3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

が 5 文字の置換である場合に成り立つ。

問題 4. 5 文字の置換である場合に次の互換の積をそれぞれ求めよ。

(1) $(1\ 3)(1\ 2), (1\ 3)(1\ 4)(1\ 2), (4\ 5)(4\ 3)(4\ 2).$

オプション： $(i_1\ i_r) \cdots (i_1\ i_3)(i_1\ i_2)$

(2) $(2\ 3)(3\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 2).$

オプション： $(i\ i+1) \cdots (j-2\ j-1)(j-1\ j)(j-2\ j-1) \cdots (i\ i+1).$ 但し $i \leq j-2$ であるとする。

定義 4. $1, 2, \dots, n$ の中から特定の r 個 i_1, i_2, \dots, i_r がリストアップされ、

$$i_1 \mapsto i_2, \dots, i_{r-1} \mapsto i_r, i_r \mapsto i_1$$

と対応しており、それら以外の対応先は自身であるような置換を $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r)$ で表す。6 文字の置換である場合に例を挙げると次のごとくである。

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, (2\ 4\ 6\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

このようなタイプの置換を巡回置換と呼ぶ。互換は巡回置換の一種である。

問題 5. 6 文字の置換 σ, τ を次の積で与えられるものとする。

$$\sigma = (4\ 3\ 1\ 6)(2\ 5), \tau = (1\ 6\ 5)(3\ 4\ 2).$$

(1) $\sigma(3), \sigma(5), \tau(1), \tau(2)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $(2\ 5)(4\ 3\ 1\ 6)$ を求め、 σ と比較せよ。 $(3\ 4\ 2)(1\ 6\ 5)$ を求め、 τ と比較せよ。

(3) σ^{-1}, τ^{-1} をそれぞれ求めよ。

問題 6. 次の置換を巡回置換の積でそれぞれ表せ。問題 5 がヒントである。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 6 & 3 & 8 & 4 & 5 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

問題 7. (1) 巡回置換 $(1\ 4\ 5), (1\ 6\ 5), (2\ 3\ 7\ 4)$ を互換の積でそれぞれ表せ。

問題 4 (1) がヒントである。

(2) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ を互換の積でそれぞれ表せ。

問題 8. 次の置換を互換の積でそれぞれ表せ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

定理 1. (1) 任意の置換は互換の積で表せる (表し方はたくさんある)。

(2) 与えられた置換を積で表すとき、必要な互換の個数の偶奇性は表し方によらない。

講義で用いているテキストなどを参照して定理 1 に自分なりの証明をつけてみよ。

定義 5. 偶数個の互換の積で表される置換を偶置換、奇数個の互換の積で表される置換を奇置換と呼ぶ。置換 σ が与えられたとき、その符号 $\text{sgn } \sigma$ を次で定義する。

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ は偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ は奇置換} \end{cases}$$

問題 9. (1) 置換 $(1\ 2)(3\ 4)$, $\sigma = (2\ 4\ 1)(5\ 3)$ に対し、それぞれ符号を求めよ。

(2) 次の置換 σ, τ についてそれぞれ互換の積で表し、 $\text{sgn } \sigma, \text{sgn } \tau$ をそれぞれ求めよ。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 10. 3 文字の置換すべてについて符号を求めよ。

問題 11. 次の置換を互換の積でそれぞれ互換の積で表し、それぞれ符号を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 6. n 文字の置換 σ が与えられたとする。 $1 \leq i < j \leq n$ なる数の組 i, j が σ に関して転倒しているとは $\sigma(i) > \sigma(j)$ であることをいう。 σ に関して転倒している組 i, j の総数を

置換 σ の転倒数という。例えば置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ に関して転倒している組は

1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 2,3 2,4 2,5 2,6 3,4 3,5 3,6 4,5 4,6 5,6
✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

においてチェックマークをつけたものであり、よって転倒数は 8 である。

問題 12. 置換 σ, τ を次で与える。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ それぞれの転倒数を求めよ。

(2) 置換 σ を互換の積で表し、 $\text{sgn } \sigma$ を求め、それが σ の転倒数の偶奇性と一致することを確かめよ。

(3) 積 $\sigma\tau$ の転倒数を求め、更に $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn } \sigma \text{sgn } \tau$ を確認せよ。

定理 2. 転倒数が偶数の置換は偶置換であり、転倒数が奇数の置換は奇置換である。