

平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.8 (6月11日配付) 略解

問題 1. 2文字の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3文字の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

問題 2. (1) $\sigma(2) = 5, \sigma(5) = 2, \tau(1) = 4, \tau(4) = 5, \tau(5) = 3, \tau(3) = 1$

(2) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau^{-1}(1) = 3, \tau^{-1}(3) = 5, \tau^{-1}(5) = 4, \tau^{-1}(4) = 1$

問題 3. (1) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$
 $(\sigma\tau)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau^{-1}\sigma^{-1}.$

問題 4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

問題 5. (1) $\sigma(3) = 1, \sigma(5) = 2, \tau(1) = 6, \tau(2) = 3.$

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 5)(4\ 3\ 1\ 6).$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (3\ 4\ 2)(1\ 6\ 5).$

(3) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

問題 6. (1) (1 7 4 5)(2 6 3) (2) (1 9 10 2 7 5 8)(3 6 4)

問題 7. (1) $(1\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)$, $(1\ 6\ 5) = (1\ 5)(1\ 6)$,
 $(2\ 3\ 7\ 4) = (2\ 4)(2\ 7)(2\ 3)$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5)(2\ 3) = (1\ 5)(1\ 4)(2\ 3)$,
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 6\ 5)(2\ 3\ 7\ 4) = (1\ 5)(1\ 6)(2\ 4)(2\ 7)(2\ 3)$

問題 8. (1) $(1\ 3)(2\ 4)$ (2) $(1\ 5)(2\ 4)(2\ 3)$ (3) $(1\ 4)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 3)$

問題 9. (1) $(1\ 2)(3\ 4)$ は符号 1, $(2\ 4\ 1)(5\ 3) = (2\ 1)(2\ 4)(5\ 3)$ は符号 -1 .

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 2\ 4) = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 3)$ は符号 1
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)$ は符号 -1

問題 10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ は符号 1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ は符号 -1

問題 11. (1) $(1\ 6)(2\ 7\ 4\ 3\ 5) = (1\ 6)(2\ 5)(2\ 3)(2\ 4)(2\ 7)$ 符号 -1

(2) $(1\ 3\ 8\ 6)(2\ 7\ 5) = (1\ 6)(1\ 8)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 7)$ 符号 -1

(3) n が奇数のとき $(1\ n)(2\ n-1)\cdots((n-1)/2\ (n+3)/2)$ 符号 $(-1)^{(n-1)/2}$
 n が偶数のとき $(1\ n)(2\ n-1)\cdots(n/2\ n/2+1)$ 符号 $(-1)^{n/2}$

問題 12. (1) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ の転倒数はそれぞれ 7, 8, 7, 8 である。

(2) $\sigma = (1\ 4\ 5\ 6\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)$ 符号 -1

(3) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 5)(3\ 4)$ である。 $\sigma\tau$ の転倒数は 3 である。

$\tau = (1\ 6\ 5\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 6)$ 符号 1