平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.9（6 月 18 日配付）

定義 1. n 次正方行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} とする。次の和を A の**行列式**という。

$$|A| := \sum_{\sigma:\, n\text{ 文字の置換全体}} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

記号が絶対値と紛らわしいので注意せよ。$\det A$ と書く記法もある。

例 1. 4 **次以上ではだめ**だが、2 次正方行列あるいは 3 次正方行列に限って

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$

を**サラスの方法**（＼は $+$, ／は $-$）という覚えやすい形にまとめることができる。

問題 1. 次の行列式の値を求めよ。

$$(1)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \quad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)\ \begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \\ 1 & i & i \end{vmatrix} \quad (4)\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 9 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

問題 2. n 次単位行列の行列式は 1 であることを定義 1 だけを使って説明せよ。

問題 3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $|A|, |B|$ を求めよ。

(2) AB を求め、更に $|AB| = |A||B|$ を確かめよ。

(3) $|A+B| = |A| + |B|$ は成り立たないことを確かめよ。

問題 4. 4 次正方行列の場合に 4 項行ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を使ってブロック分けする。定義 1 だけを使って次が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 + \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ c\mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} \quad \textbf{行列式の多重線形性}$$

　次の定理1に自分なりの証明をつけるのは望ましいことだが、項目(3)については（従ってそれを利用する項目(1)も）難しいと感じる人もいるだろう。

定理 1.　(1) 着目行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。

(2) 着目行を定数 c 倍すると行列式の値は c 倍になる（この操作は誤解しやすい）。

(3) 2つの着目行を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる。**行列式の交代性**

列についても同様のことが成り立つ。

　具体的に成分が指定された場合は、基本変形を使うと効率よく行列式を求められる。定理1の各項目を、列についての操作に読みかえて、4次正方行列の場合に例示しよう。4項列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を使ってブロック分けすると次のようになる。

1° $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 + c\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix}$ ← 第3列に第1列の c 倍を加えた。

2° $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & c\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = c\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix}$ ← 第2列の c 倍が外に出た（$c=0$ あり）。

3° $\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix}$ ← 第1列と第2列入れ替えで外に -1 倍。

注 1. 階段行列へ変形するときと違って、操作 2° では $c=0$ もあり。これを利用すると

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & 0\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{vmatrix} = 0$$

などが成り立つことが分かる。よって正方行列 A についてある列（または行）が零ベクトルなら、その行列式の値は $|A|=0$ を満たす。例えば

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix}1 & i & 1\\ i & -1 & i\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

問題 5. S を $n\times n$ 標準階段行列とする。このとき $|S|\neq 0$ であるためには S が単位行列であることが必要十分であることを確かめよ。

例 2. 定理1の適用例を3次正方行列の場合にあげておく。

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{行}\,2-a\times\text{行}\,1\\ \text{行}\,3-a^2\times\text{行}\,1}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix} \underset{\text{行}\,3-(b+a)\times\text{行}\,2}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & 0 & (c-b)(c-a)\end{vmatrix}$$

ここまで変形しておくと、サラスの方法を楽に適用できる。結論は次の通り。

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$$

以上ではたまたま操作 $2^\circ, 3^\circ$ を使わなかったが、必要に応じて利用するとよい。

問題 6. 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{vmatrix}$

問題 7. (1) $\omega^2+\omega+1=0$ とする。このとき $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

(2) $\omega^2-\omega+1=0$ とする。このとき $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

問題 8. 正方行列 A について次の命題を示せ。

ある列が他の列の定数倍なら、行列式の値は $|A|=0$ を満たす。

問題 9. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d+e \\ 1 & b & c & d & e+a \\ 1 & c & d & e & a+b \\ 1 & d & e & a & b+c \\ 1 & e & a & b & c+d \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

問題 10. 次の行列式を因数分解せよ。

(1) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

問題 11. 3 次正方行列 A のブロック分けを $(\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{a}_3)$ とする。このとき次の行列式をそれぞれ $|A|$ を用いて表せ。

(1) $\begin{vmatrix} 2\mathbf{a}_1 & 3\mathbf{a}_2 & 4\mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3 & -2\mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_3 & 3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1 \end{vmatrix}$

問題 12. (1) 3 タイプの基本行列（自信がないときは怠けずにテキストで定義を確認せよ）についてそれぞれ行列式を求め、それらが 0 でないことを確かめよ。

(2) n 次正方行列 A と n 次基本行列 P に対して $|PA|=|P|\,|A|$ が成り立つことを示せ。

問題 13. n 次正方行列 A に対して次の命題を示せ。問題 12 がヒント。

単位行列に基本変形できるなら $|A|\neq 0$ であり、できないなら $|A|=0$ である。

定理 2. n 次正方行列 A に対して次はどちらも A の正則性と同値である。

1° $|A| \neq 0$ が成り立つ。

2° $\operatorname{rank} A = n$ が成り立つ。

定理 2 に自分なりの証明をつけてみよ（問題 13 の命題および任意の行列は標準階段行列に基本変形できることを適用するのも一つの方法）。

定理 3. 次が成り立つ（左辺第 $n+1$ 行において第 n 列までの成分はすべて 0 である）。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & * \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{次数を下げる公式}$$

同様に次も成り立つ（左辺第 $n+1$ 列において第 n 行までの成分はすべて 0 である）。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ * & \cdots & * & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{次数を下げる公式その 2}$$

講義で用いているテキストなどを参照して定理 3 に自分なりの証明をつけてみよ。

例 3. 定理 3 の適用例を 4 次正方行列の場合にあげておく。定理 1 も適宜織り交ぜる。

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & -4 & -19 & -7 \\ -3 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{列 1+列 4} \\ \text{列 2−列 4} \\ \text{列 3−3×列 4}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

ここまで変形しておくと、問題 6(1) に帰着している。

問題 14. 次が成り立つことを示せ。

(1) $$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{22} & c_{23} \\ b_1 & a & b_2 & b_3 \\ c_{31} & 0 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

問題 15. 次の行列式の値を求めよ。

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & -5 \\ 1 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

問題 16. 次の行列式の値を求めよ。

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

問題 17. n 次正方行列 A, $n \times m$ 行列 B と m 次単位行列 E に対して

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & E \end{vmatrix} = |A|, \quad \begin{vmatrix} E & O \\ B & A \end{vmatrix} = |A| \quad \text{但し } O \text{ は } m \times n \text{ 零行列}$$

が成り立つことを示せ。

問題 18. $A + B + C = \pi$ であるとき $\begin{vmatrix} -1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix} = 0$ が成り立つことを示せ。

問題 19. 次の行列式を因数分解せよ。

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

次の問題を解くには視点を転換させる柔軟性が必要である。

問題 20. n 次正方行列 A と n 次正則行列 P に対して $|PA| = |P|\ |A|$ が成り立つことを示せ。定理 4 を使わないで証明するためのヒント：n 次正則行列は n 次基本行列のいくつかの積で表せるので問題 12 に帰着できる。

定理 4. n 次正方行列 A, B に対して $|AB| = |A|\ |B|$ が成り立つ。**積の行列式**

定理 4 に自分なりの証明をつけてみよ（定理 2 と問題 20 を適用するのも一つの方法であるが、テキストに紹介している証明の方が理解しやすいという人もいるだろう）。

例 4. (1) 正則行列 A に対して $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ が成り立つ。

(2) n 次正則行列 A と n 次正方行列 B に対して $|ABA^{-1}| = |B|$ が成り立つ。

問題 21. n 次正方行列 A, $n \times m$ 行列 B と m 次正方行列 D に対して

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A|\ |D| \quad \text{但し } O \text{ は } m \times n \text{ 零行列}$$

が成り立つことを示せ。ヒント：問題 17 と定理 4 の適用。

例 5. n 次正方行列 A, B に対して

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \underset{\text{行 }2+\text{行 }1}{=} \begin{vmatrix} A & B \\ B+A & A+B \end{vmatrix} \underset{\text{列 }1-\text{列 }2}{=} \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} \underset{\text{問題 }21}{=} |A-B|\,|A+B|$$

問題 22. (1) n 次基本行列 P に対して $|{}^{\mathrm{t}}P| = |P|$ が成り立つことを確かめよ。

(2) n 次正方行列 A に対して $|{}^{\mathrm{t}}A| = |A|$ が成り立つことを示せ。**転置の行列式**
ヒント：任意の行列は標準階段行列に基本変形できる（ことを使うのも一つの方法であるが、テキストに紹介している証明の方が理解しやすいという人もいるだろう）。

例 6. 次が成り立つ。例 2 によれば右辺は $(b-a)^2(c-b)^2(c-a)^2$ に等しい。

$$\begin{vmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

問題 23. (1) 正則行列 A であってその転置 ${}^{\mathrm{t}}A$ が逆行列 A^{-1} に等しいものを**直交行列**という。直交行列 A の行列式 $|A|$ の値は 1 あるいは -1 であることを示せ。

(2) n 次正方行列 A が奇数次かつ交代行列ならば、$|A| = 0$ を満たすことを示せ。

問題 24. 正方行列について定義 1 だけを使って次が成り立つことを示せ。

(1) 2 つの着目行を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる（これを難しいと感じるかも知れない）。

(2) ある行が他の行と同じなら、行列式の値は 0 である。

(3) 着目行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。

定理 5. n 次正則行列 A と n 項列ベクトル $\mathbf{b}$ が与えられたとする。$(A \quad \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立方程式の解はただ一つ存在し、それは行列 A を n 項列ベクトルによって $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$ とブロック分けするとき次で与えられる。**クラメールの公式**

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}}{|A|} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

注 2. 具体的に成分が指定された場合には、クラメールの公式を使って連立方程式を解くことは非常に効率が悪いので、基本変形を使う。この公式は抽象理論で有用である。

例 7. 整数を成分とする n 次正則行列 A とやはり整数を成分とする n 項列ベクトル $\mathbf{b}$ が与えられたとする。行列式 $|A|$ が 1 あるいは -1 に等しいなら $(A \quad \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立方程式の解は整数を成分とする。