平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.9（6 月 18 日配付）略解

問題 1. (1) 2 (2) 45 (3) 0 (4) -135

問題 2. σ を n 文字の置換とする。n 次単位行列の場合、行列式の定義に現れる因子

$$a_{1\sigma(1)}, \cdots, a_{n\sigma(n)}$$

のどれもが 0 でないのは各 i について $\sigma(i) = i$ が成り立つときのみである。そのような置換 σ は恒等置換となり、またその符号は 1 であるので、単位行列の行列式は 1 である。

問題 3. (1) $|A| = 6, |B| = 8$

(2) $AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ となり $|AB| = 48 = |A||B|$ である。

(3) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ となり $|A + B| = 3 \neq 14 = |A| + |B|$ である。

問題 4. 行ベクトル $\mathbf{a}_i$ の j 成分を a_{ij} と書き、行ベクトル $\mathbf{b}$ の j 成分を b_j と書くと

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_3 + \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} (a_{3\sigma(3)} + b_{\sigma(3)}) a_{4\sigma(4)}$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} + \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} b_{\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$$

ここで $\sum_\sigma$ は 4 文字の置換全体に渡って和をとることを意味する。

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_3 \\ c\mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} c a_{4\sigma(4)} = c \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} = c \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$$

問題 5. S が単位行列なら $|S| = 1 \neq 0$ である。そうでないなら S の第 n 行は零ベクトルであり、このとき $|S| = 0$ である。

問題 6. (1) -6 (2) 12 (3) $2 - 4i$

問題 7. (1) $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \underset{\text{行 3+行 1+行 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\omega^3 = -1$ であるから $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{行 2}-\omega\times\text{行 1} \\ \text{行 3}-\omega^2\times\text{行 1}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2\omega \end{vmatrix} \underset{\text{サラス}}{=} -4$

問題 8. 定数倍を操作 2° で外に出すとある列が他の列と同じ場合に帰着する。そのとき操作 3° により、全く同じ行列式が符号を変えて出現する。従って $|A| = -|A|$ となり、$|A| = 0$ が導かれる。

問題 9. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d+e \\ 1 & b & c & d & e+a \\ 1 & c & d & e & a+b \\ 1 & d & e & a & b+c \\ 1 & e & a & b & c+d \end{vmatrix} \underset{\text{列 5+列 2+列 3+列 4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & c & a+b+c+d+e \\ 1 & b & c & d & a+b+c+d+e \\ 1 & c & d & e & a+b+c+d+e \\ 1 & d & e & a & a+b+c+d+e \\ 1 & e & a & b & a+b+c+d+e \end{vmatrix} \underset{\text{問題 8}}{=} 0$

問題 10. (1) $8abc$ (2) $(a-b)(a-c)(b-c)$ (3) $(a+2b)(a-b)^2$

問題 11. (1) $24|A|$ (2) $-2|A|$ (3) $-2|A|$ (4) 0

問題 12. (1) スペース節約のためサイズ 3 の場合に述べる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{行 3}-c\times\text{行 1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{行 1}\leftrightarrow\text{行 2}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ここで中央の基本行列においては $c \neq 0$ であることに注意せよ。よって行列式は左から順に $1, c, -1$ であり、どれも 0 でない。
(2) 行列 A に基本行列 P を左からかけると対応する行基本変形が実現する。

1° 着目行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない。対応する基本行列の行列式は 1 である。

2° 着目行を定数 c 倍（$c \neq 0$）すると行列式の値は c 倍になる。対応する基本行列の行列式は c である。

3° ２つの着目行を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる。対応する基本行列の行列式は -1 である。

よっていずれの場合も $|PA| = |P|\ |A|$ が成り立つ。

問題 13. 正方行列 A から行基本変形により出来た標準階段行列を S とする。使った基本変形に対応する基本行列を手順通りに並べたものを $P_1, \ldots, P_{k-1}, P_k$ とする。このとき

$$S = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A$$

が成り立つ。問題 12 (2) で得た関係式を繰り返し適用すると

$$|S| = |P_k P_{k-1} \cdots P_1 A| = |P_k||P_{k-1} \cdots P_1 A| = \cdots = |P_k||P_{k-1}| \cdots |P_1||A|.$$

ここで $|P_k|, |P_{k-1}|, \cdots, |P_1|$ はどれも 0 でないから

$$|S| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

が成り立つ。問題 5 を考慮に入れて結論を得る。

問題 14. 定理 3 を適用できるように列および行をシャッフルせよ。

問題 15. (1) 41 (2) 52 (3) 16

問題 16. (1) -90 (2) -1 (3) 9

問題 17. 定理 3 を $n+m$ 行目から順に $n+1$ 行目まで適用して $\begin{vmatrix} A & B \\ O & E \end{vmatrix} = |A|$ が得られる。列および行をシャッフルすれば $\begin{vmatrix} E & O \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ O & E \end{vmatrix}$ であることが分かる。

問題 18. $\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$ であることに注意。

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & -1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{行 } 2+\cos A\times\text{行 } 1 \\ \text{行 } 3+\cos B\times\text{行 } 1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & \cos A & \cos B \\ 0 & -\sin^2 A & \sin A \sin B \\ 0 & \sin A \sin B & -\sin^2 B \end{vmatrix} = 0$$

問題 19. (1) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$
(2) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

問題 20. 行列 P は正則なのでいくつかの n 次基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ を使って

$$P = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$$

と表せる。問題 12 (2) で得た関係式を繰り返し適用すると

$$|PA| = |Q_1 Q_2 \cdots Q_k A| = |Q_1||Q_2 \cdots Q_k A| = \cdots = |Q_1||Q_2| \cdots |Q_k||A|$$

もちろん A が単位行列でも上は成り立つので $|P| = |Q_1||Q_2| \cdots |Q_k|$ となる。再び上の関係式に戻って $|PA| = |P|\ |A|$ を得る。

問題 21. $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} E & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & E \end{pmatrix} \right| \underset{\text{定理 4}}{=} \begin{vmatrix} E & O \\ O & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ O & E \end{vmatrix} \underset{\text{問題 17}}{=} |D|\ |A|$

問題 22. (1) 問題 12 (1) で調べたことから明らかである。

(2) A が正則でないなら ${}^{\mathrm{t}}A$ も正則でないので定理 2 より $|{}^{\mathrm{t}}A| = 0 = |A|$ となる。以下 A は正則と仮定する。このときいくつかの n 次基本行列 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ を使って

$$A = P_1 P_2 \cdots P_k$$

と表せる。さて ${}^{\mathrm{t}}(P_1 P_2 \cdots P_k) = {}^{\mathrm{t}}P_k \cdots {}^{\mathrm{t}}P_2 {}^{\mathrm{t}}P_1$ であり、定理 4 および (1) を考慮すると

$$|{}^{\mathrm{t}}A| = |{}^{\mathrm{t}}P_k \cdots {}^{\mathrm{t}}P_2 {}^{\mathrm{t}}P_1| = |{}^{\mathrm{t}}P_k| \cdots |{}^{\mathrm{t}}P_2||{}^{\mathrm{t}}P_1| = |P_1||P_2| \cdots |P_k| = |P_1 P_2 \cdots P_k| = |A|$$

問題 23. (1) ${}^{\mathrm{t}}A = A^{-1}$ であるから問題 22 (2) より $|A| = |{}^{\mathrm{t}}A| = |A^{-1}| = |A|^{-1}$ となる。よって $|A|$ は $|A|^2 = 1$ を満たすので $|A| = 1$ または $|A| = -1$ が成り立つ。

(2) ${}^{\mathrm{t}}A = -A$ であるから $|A| = |{}^{\mathrm{t}}A| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$ となる。よって $|A|$ は $2|A| = 0$ を満たすので $|A| = 0$ が成り立つ。

問題 24. (1) 2 つの着目行を入れ替えるとそれに対応する互換が付け加わるので、その分だけ符号が全体を通して -1 倍される。

(2) 問題 8 で議論済みである。

(3) 問題 4 で特別の場合に調べた多重線形性により

$$i \text{ 行目} \rightarrow \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} \leftarrow j \text{ 行目と同じ行ベクトル}$$

右辺第 2 項は (2) によれば 0 である。