

問題 1. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 7y - z = 14 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

解. $x = 1, y = 2, z = 3.$ □

問題 2. 次の行列の階数を a の値に応じて場合分けし求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解. 例えば次のように行基本変形する。

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\substack{\text{行 } 2 - \text{行 } 1 \\ \text{行 } 3 - a \times \text{行 } 1}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行 } 3 + \text{行 } 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$$

ここで $2 - a - a^2 = (2 + a)(1 - a)$ なので、 $a = -2; a = 1$; それ以外と場合分けされる。
 $a = -2$ のとき階数 2; $a = 1$ のとき階数 1; $a \neq -2$ かつ $a \neq 1$ のとき階数 3 である。 □

問題 3. ここでは 2 次正方行列の行基本変形について考える。

- (1) 第 2 行に第 1 行の c 倍を加えること、第 2 行を c 倍すること (但し $c \neq 0$) および第 1 行と第 2 行を入れ替えることに対応する基本行列はそれぞれ何か。
- (2) 小問 (1) で求めた基本行列はそれぞれ正則であることを確かめよ。
- (3) A を階数 2 の 2 次正方行列とする。このとき適当な 2 次正則行列 P を左からかけて PA が単位行列になるようにできる。その理由を述べよ。

解. (1) それぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(2) それぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を逆行列に持つ。

(3) 階数 2 の 2×2 標準階段行列とは単位行列 E に他ならない。従って A を E へ行基本変形できる。使った行基本変形に対応する基本行列を手順通りに並べたものを P_1, P_2, \dots, P_k とする。それらを順に左からかけると E になる。即ち

$$P_k \cdots P_2 P_1 A = E$$

となる。(2) より P_1, P_2, \dots, P_k はいずれも正則行列であるから $P = P_k \cdots P_2 P_1$ も正則行列である。この P が $PA = E$ を満たす正則行列である。 □