平成 20 年度 線形代数学演習 I

水曜 1・2 時限，総合科学部 K305

プリント No.10（7 月 9 日配付）

問題 1. 次が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & b & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

定義 1. n 次正方行列 A に対し、その第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を考え、その行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の (i,j) **余因子**といい、A_{ij} と表記する。

問題 2. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$ について $(1,j)$ 余因子と $(i,3)$ 余因子をすべて求めよ。

定理 1. n 次正方行列 A に対し、行列式の行展開および列展開が成り立つ。

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ \textbf{第 } i \textbf{ 行に関する展開} \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ \textbf{第 } j \textbf{ 列に関する展開}$$

例 1. 4 次正方行列の場合に定理 1 の証明を与えてみよう。4 項行ベクトル $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ を使ってブロック分けする。$\mathbf{a}_2$ は次のように和で書ける。

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0) + (0 \quad a_{22} \quad 0 \quad 0) + (0 \quad 0 \quad a_{23} \quad 0) + (0 \quad 0 \quad 0 \quad a_{24})$$

第 2 行に関する線形性により以下が成り立つ。

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix}$$

問題 1 で得た結果より右辺は余因子を使って $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$ と表せる。

問題 3. 4 次正方行列 A を 4 項行ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を使ってブロック分けする。行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} とするとき $i \neq 2$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ a_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & a_{i2} & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & a_{i3} & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{i4} \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} = 0$$

問題 3 の左辺は余因子を使って $a_{i1}A_{21} + a_{i2}A_{22} + a_{i3}A_{23} + a_{i4}A_{24}$ と表せる（問題 1 を参照せよ）。よってこれは定理 2 の特別な場合である。

定理 2. n 次正方行列 A に対し次が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \text{ 但し } k \neq i \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0 \text{ 但し } k \neq j$$

定義 2. n 次正方行列 A に対し、A の (j,i) 余因子 A_{ji} を (i,j) 成分とする行列を A の**余因子行列**といい、$\widetilde{A}$ と表記する（テキストと記号が違うがこちらの方が標準だと思う）。

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

成分が紛らわしいので注意せよ。

余因子行列を使うと定理 1 と定理 2 をひとまとめにして

$$A\widetilde{A} = |A|E, \widetilde{A}A = |A|E$$

と表せる。ここで E は n 次単位行列である。

問題 4. 整数を成分とする n 次正方行列 A について次を示せ。

(1) $|A| = 1$ または $|A| = -1$ なら A は整数を成分とする逆行列を持つ。

(2) A が整数を成分とする逆行列を持つなら $|A| = 1$ または $|A| = -1$ が成り立つ。

以下しばらく問題 8 の前までは行列式に関する雑多な問題を並べる。

問題 5. $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ を計算せよ。

問題 6. $\begin{vmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{vmatrix}$ を計算せよ。

問題 7. (1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ とする。次が成り立つことを確かめよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$$

(3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

問題 8. その (i, j) 成分が a_{ij} であるような n 次正方行列 A が与えられたとする。n 次正方行列 B を n 項列ベクトル $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ によってブロック分けして次の式を考える。

$$f(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \overset{i\,\text{列目}}{A\mathbf{b}_i} & \cdots & \mathbf{b}_n \end{matrix} \right| \end{array}$$

(1) 式 f は列について多重線形性と交代性を持つことを示せ。

(2) 式 f の n 次単位行列における値は $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ であることを示せ。

(3) $f(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} |B|$ であることを示せ。

問題 9. 4 項列ベクトル $\mathbf{a} = {}^{\mathrm{t}}(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)$, $\mathbf{b} = {}^{\mathrm{t}}(b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4)$ に対して次の和

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3$$

をシンプレクティック形式という。

(1) 4 次正方行列 A を列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ によってブロック分けして次の式

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) := \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\omega(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) - \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)\omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4) + \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4)\omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

を考える。式 f は列について多重線形性と交代性を持つことを示せ。

(2) $f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = |A|$ であることを示せ。