平成 20 年度 線形代数学演習 I
プリント No.10（7 月 9 日配付）略解

問題 1. 行の入れ替え、列の入れ替えを適宜行って次数を下げる公式が適用できる形に持って行く。その際、入れ替え回数が奇数回なら $-$ がつき、偶数回なら符号はつかない。

問題 2. $(1,j)$ 余因子は以下の通り

$$(1,1)\qquad \begin{vmatrix} b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = bcd(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$(1,2)\qquad -\begin{vmatrix} a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = -acd(c-a)(d-a)(d-c)$$

$$(1,3)\qquad \begin{vmatrix} a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & d^3 \end{vmatrix} = abd(b-a)(d-a)(d-b)$$

$$(1,4)\qquad -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = -abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

$(1,3)$ 以外の $(i,3)$ 余因子は以下の通り

$$(2,3)\qquad -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & d^3 \end{vmatrix} = -(b-a)(d-a)(d-b)(ab+bd+ad)$$

$$(3,3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^3 & b^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(d-a)(d-b)(a+b+d)$$

$$(4,3)\qquad -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(d-a)(d-b)$$

問題 3. 第 2 行に関する線形性により以下が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ a_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & a_{i2} & 0 & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & a_{i3} & 0 \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \mathbf{a}_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{i4} \\ & \mathbf{a}_3 & & \\ & \mathbf{a}_4 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$$

i は $1,3,4$ のいずれかと仮定しており、右辺において第 2 行は第 i 行と同じである。そのような行列式は 0 である。

問題 4. (1) ポイントは 2 つある。

1° $|A|=1$ の場合、$A\widetilde{A}=E=\widetilde{A}A$ が成り立ち、従って $\widetilde{A}$ が逆行列を与える。$|A|=-1$ の場合、$A(-\widetilde{A})=E=(-\widetilde{A})A$ が成り立ち、従って $-\widetilde{A}$ が逆行列を与える。

2° 整数を成分とする行列に対し、その行列式の値は整数である。よって整数を成分とする行列に対し、その余因子の値も整数となる。

(2) 小問 (1) で述べたことから A の行列式の値も A^{-1} の行列式の値も整数である。他方、行列式の積公式により $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$ が成り立つ。2つの整数 m, n をかけて1となるのは $m = n = 1$ あるいは $m = n = -1$ という可能性しかない。

問題 5. $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 2abc, \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & a^2+c^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = 4a^2b^2c^2$

問題 6. $\begin{vmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = 0$

問題 7. (1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{\text{行 1+行 2+行 3}}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(2) $\omega^3 = 1, -1-\omega^2 = \omega$ に注意する。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{\text{列 3}+\omega\text{列 1}+\omega^2\text{列 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c & a & \omega c+\omega^2 a+b \\ b & c & \omega b+\omega^2 c+a \end{vmatrix} = (a+\omega b+\omega^2 c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c & a & \omega^2 \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{列 2}-\text{列 1}}{=} (a+\omega b+\omega^2 c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & \omega^2 \\ b & c-b & 1 \end{vmatrix} = (a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

(3) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$

問題 8. (1) 交代性を持つことはそれほど自明ではない。混乱を避けるため

$$f_k(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \overset{k\text{ 列目}}{A\mathbf{b}_k} & \cdots & \mathbf{b}_n \end{vmatrix}$$

という式を導入する。$i < j$ として i 列目と j 列目を入れ替える。まず

$$f_i(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots) = \begin{vmatrix} \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{A\mathbf{b}_j} & \cdots & \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{列 }i\leftrightarrow\text{列 }j}{=} -\begin{vmatrix} \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i} & \cdots & \overset{j\text{ 列目}}{A\mathbf{b}_j} & \cdots \end{vmatrix} = -f_j(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots)$$

が成り立つ。同様にして次も分かる。

$$f_j(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots) = -f_i(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots)$$

他方 $k \neq i, k \neq j$ のときは A の影響はないので

$$f_k(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots) = -f_k(\cdots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}_i}, \cdots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{b}_j}, \cdots)$$

$f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ であるから交代性が示せた。

(2) i 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような n 項列ベクトルを $\mathbf{e}_i$ と書く。各 i に対して $A\mathbf{e}_i = {}^{\mathrm{t}}(a_{1i} \quad \cdots \quad a_{ni})$ であるから

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{A\mathbf{e}_i} & \cdots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{\begin{matrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix}} & \cdots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \overset{i\text{ 列目}}{a_{ii}\mathbf{e}_i} & \cdots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = a_{ii}$$

ここで i 列目を列変形によって掃き出している。

(3) $i(1), \ldots, i(n)$ を $1, 2, \ldots, n$ からなる数の並びとする（同じ数が何度現れても良い）。交代性により次が成り立つ。

$$f(\mathbf{e}_{i(1)}, \cdots, \mathbf{e}_{i(n)}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i(1) & \ldots & i(n) \end{pmatrix} f(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) & i(1), \ldots, i(n) \text{ が順列のとき} \\ 0 & \text{順列でないとき} \end{cases}$$

ここで (2) より $f(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ である。また行列 B の (i, j) 成分を b_{ij} とすると $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}\mathbf{e}_i$ である。よって多重線形性を考慮に入れると

$$f(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = \sum_{n\text{ 文字の置換}} \operatorname{sgn}\sigma \; b_{\sigma(1)1} \ldots b_{\sigma(n)n} f(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = |{}^{\mathrm{t}}B| \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$|{}^{\mathrm{t}}B| = |B|$ であるから目標とする関係が示せた。

問題 9. (1) ω は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について多重線形性と交代性を持つ。

(2) 式 f の単位行列における値は 1 である。以下問題 8(3) の解と同じ議論である。