平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.1（10 月 1 日配付）略解

問題 1. 成り立たないものについてのみ理由を述べる。

(2) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ を満たさない。反例は ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0), {}^{\mathrm{t}}(0 \quad 1/2 \quad 0) \in S$ であるが ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0) + {}^{\mathrm{t}}(0 \quad 1/2 \quad 0) = {}^{\mathrm{t}}(1 \quad 1/2 \quad 0) \notin S$

(3) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$ は $c \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in S \Rightarrow c\mathbf{x} \in S$ を満たさない。反例は $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0) \in S$ であるが $\sqrt{2}\,{}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0) = {}^{\mathrm{t}}(\sqrt{2} \quad 0 \quad 0) \notin S$

(4) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_2, -x_1 \leq x_2\}$ は $c \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in S \Rightarrow c\mathbf{x} \in S$ を満たさない。反例は $-1 \in \mathbb{R}$, ${}^{\mathrm{t}}(0 \quad 1 \quad 0)$ であるが $-1\,{}^{\mathrm{t}}(0 \quad 1 \quad 0) = {}^{\mathrm{t}}(0 \quad -1 \quad 0) \notin S$

(6) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \geq 1\}$ は $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ を満たさない。反例は ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0), {}^{\mathrm{t}}(-1 \quad 0 \quad 0) \in S$ であるが ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 0) + {}^{\mathrm{t}}(-1 \quad 0 \quad 0) = \mathbf{o} \notin S$

問題 2. (1) 無理数全体の集合は和について閉じていないので $\mathbb{R}$ の部分空間でない。反例：$\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ は無理数であるが和は $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ となり無理数でない

(2) $M(2, 3, \mathbb{Z})$ はスカラー倍について閉じていないので $M(2, 3, \mathbb{R})$ の部分空間でない。反例：$1/2 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{Z})$ であるが

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M(2, 3, \mathbb{Z})$$

(3) 集合 $S = \{X \in M(2, 3, \mathbb{R}) \mid$ 各成分が非負 $\}$ はスカラー倍について閉じていないので $M(2, 3, \mathbb{R})$ の部分空間でない。反例：$-1 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ であるが

$$-1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$$

問題 3. (1) 仮定により V は空集合でないので、その元の一つを A とする。このとき $0 \in \mathbb{R}$, $A \in V$ であるから $O = 0A \in V$ となり $O \in V$ が成り立つ。

(2) $A \in V$ とする。$-1 \in \mathbb{R}$ であるから $-A = (-1)A \in V$ が成り立つ。

問題 4. (1) まず $m \times n$ 零行列は V の元であるから、$V \neq \emptyset$ である。次に $X, Y \in V$ としよう。このとき

$$X + Y \in M(m, n, \mathbb{R}) \text{ かつ } A(X + Y) = AX + AY = O + O = O$$

であるから $X + Y \in V$ を得る。また $c \in \mathbb{R}$, $X \in V$ としよう。

$$cX \in M(m, n, \mathbb{R}) \text{ かつ } A(cX) = c(AX) = cO = O$$

であるから $cX \in V$ を得る。よって V は $M(m, n, \mathbb{R})$ の部分空間である。

(2) $S = \{X \in M(3,2,\mathbb{R}) \mid (3\ \ 1\ \ 2)X = (0\ \ 1)\}$ は和について閉じていないので $M(3,2,\mathbb{R})$ の部分空間でない。反例：$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ であるが

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S$$

(3) S は $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない。与えられた拡大係数行列を基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって対応する連立 1 次方程式は解を持たない。すなわち $S = \emptyset$ である。

問題 5. $M(n,\mathbb{R})$ の部分空間でないものについてのみ理由を述べる。

(2) n 次実正則行列全体は和について閉じていない。反例：A を $(1,1)$ 成分が -1 で、他の対角成分は全て 1 であるような n 次対角行列とする。このとき A は正則行列である。しかし単位行列との和 $A+E$ は $(1,1)$ 成分が 0 で他の対角成分は全て 2 であるような n 次対角行列となり、$A+E$ は正則でない。

問題 6. V, W を $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間とする。

1° $m \times n$ 零行列を O と書こう。$O \in V, O \in W$ であるから $O \in V \cap W$ となり $V \cap W \neq \emptyset$ を得る。

2° $A, B \in V \cap W$ とする。このとき $A, B \in V$ かつ $A, B \in W$ である。V は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であるから $A+B \in V$ が従い、W も $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であるから $A+B \in W$ が従う。よって $A+B \in V \cap W$ となる。

3° $c \in \mathbb{R}$, $A \in V \cap W$ とする。このとき $A \in V$ かつ $A \in W$ である。V は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であるから $cA \in V$ が従い、W も $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間であるから $cA \in W$ が従う。よって $cA \in V \cap W$ となる。

以上より $V \cap W$ は $M(m,n,\mathbb{R})$ の部分空間である。

問題 7. 個数 r についての帰納法を適用する。$r=1$ のときは、スカラー倍について閉じていることに他ならない。$r \leq k$ のときに成り立つと仮定する。$r=k+1$ のときを検討する。帰納法の仮定により次が成り立つ。

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k \in V$$

スカラー倍について閉じているので次も成り立つ。

$$c_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} \in V$$

更に和について閉じていることより

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k + c_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} = (c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k) + c_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} \in V$$

よって $r=k+1$ のときも成り立つことが示せた。

問題 8. (1) $\mathbf{a} = 7\mathbf{e}_1 + (-3)\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

(2) $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{e}_2 + \frac{-2}{7}\mathbf{e}_3$.

(3) $\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (-4)(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + 6(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)$.

問題 9. $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表せるとし、その係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r$ とする。このとき ${}^{\mathrm{t}}(c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_r)$ は $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r \quad \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式の解である。よって $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ が成り立つ。

逆に $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r \quad \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解を持つとし、その一つを ${}^{\mathrm{t}}(c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_r)$ とする。このとき $c_1, c_2, \ldots, c_r$ を係数とする $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合は $\mathbf{b}$ である。よって $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ も成り立つ。

問題 10. 問題 9 により、1 次結合で表せるためには、下左にある行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解を持つことが必要十分である。基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

よって $a=3$ が求める条件である。これが成り立つとき連立方程式の解は ${}^{\mathrm{t}}(1 \quad -1)$ であるから $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が求める 1 次結合である。

問題 11. 前問と同様である。考える拡大係数行列は次のものである。基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 5 & -4 & 3 & c \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & a+b/2-c/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & (c-b)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-2b-c \end{pmatrix}$$

よって 1 次結合で表せるための条件は $3a-2b-c=0$ である。

問題 12. 部分空間の条件を一つ一つ確かめる。

1° $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_r \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ であるから $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \neq \emptyset$ である。

2° $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ に対してそれぞれを表す 1 次結合の係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r$ および $d_1, d_2, \ldots, d_r$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r) + (d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_r\mathbf{a}_r) \\ &= (c_1 + d_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_r + d_r)\mathbf{a}_r \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle\end{aligned}$$

よって $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ が成り立つ。

3° $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ に対してそれを表す 1 次結合の係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r$ とする。このとき $d \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}d\mathbf{x} &= d(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r) \\ &= (dc_1)\mathbf{a}_1 + (dc_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (dc_r)\mathbf{a}_r \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle\end{aligned}$$

よって $d \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \Rightarrow d\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ が成り立つ。

問題 13. 対象となっている同次連立 1 次方程式をまず解く。係数行列を基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって解空間の元であることは $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表されることに同値である。

問題 14. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n$ とする。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次従属であるとは、

$(c_1, c_2, \ldots, c_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ であるような $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ が存在して
$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ がなりたつこと。

問題 15. (1) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は 1 次独立であることは $(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c})$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式が自明な解のみを持つことに同値である。係数行列を書き出して基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解は ${}^{\mathrm{t}}(0 \quad 0 \quad 0)$ のみである。

(2) $a = 2$ として $(\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{d})$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解は ${}^{\mathrm{t}}(0 \quad 0 \quad 0)$ のみである。

(3) $(\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{d})$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 1-8a \end{pmatrix}$$

解が ${}^{\mathrm{t}}(0\ \ 0\ \ 0)$ のみであるための条件は $a \neq 1/8$ である。

問題 16. 論法は前問と同じである。係数行列を基本変形する。

(1) 下の変形により非自明解を持つので 1 次独立でない。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 下の変形により自明解のみを持つので 1 次独立である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 下の変形により自明解のみを持つ条件は $a \neq 0$ かつ $a \neq -3$ である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & a(a+3) \end{pmatrix}$$

問題 17. (1) 対偶を証明するのがわかりやすい。$\mathbf{a} = \mathbf{o}$ なら $1\mathbf{a} = 1\mathbf{o} = \mathbf{o}$ となり $\mathbf{a}$ は 1 次独立でない。逆に $\mathbf{a}$ が 1 次独立でないとしよう。このときある $c \neq 0$ に対して $c\mathbf{a} = \mathbf{o}$ が成り立つ。$c \neq 0$ なので

$$\mathbf{a} = \frac{1}{c}(c\mathbf{a}) = \frac{1}{c}\mathbf{o} = \mathbf{o}$$

となり、$\mathbf{a} = \mathbf{o}$ を得る。

(2) どれか 1 つが零ベクトルなので、その番号を i とする。係数として

$$(c_1, c_2, \ldots, c_r) = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$$

を選んで 1 次結合を作ると $\mathbf{o}$ が表せるので $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_r$ は 1 次従属である。

問題 18. 移項を施すと与えられた条件は

$$(x_1-y_1)\mathbf{a}_1+(x_2-y_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(x_r-y_r)\mathbf{a}_r = \mathbf{o} \Rightarrow (x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_r-y_r) = (0, 0, \ldots, 0)$$

と書き直すことができる。