# 平成 20 年度 線形代数学演習 II
## プリント No.2（10 月 8 日配付）略解

**問題 1.** 与えられた列ベクトルから作られる行列を基本変形する。

(1) $a=1$ のとき 1 次従属であり、$a\neq 1$ のとき 1 次独立である。

$$\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\\a&a&a\end{pmatrix} >>> \ a=1 \text{ のとき } \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \ a\neq 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $a=4$ かつ $b=3$ のとき 1 次従属であり、そうでないとき 1 次独立である。

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&1\\0&1&b\\a&2&2\end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&b-3\\0&0&a-4\end{pmatrix}$$

**問題 2.** (1) $c_1(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+c_2(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)+c_3(\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1)=(c_1+c_3)\mathbf{a}_1+(c_1+c_2)\mathbf{a}_2+(c_2+c_3)\mathbf{a}_3$ である。$c_1+c_3=0,\ c_1+c_2=0,\ c_2+c_3=0$ は自明解のみを持つので 1 次独立。

(2) $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+(-1)(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)+(\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4)+(-1)(\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_1)=\mathbf{o}$ であるから 1 次従属。

(3) $c_1+c_2+\cdots+c_r=0,\ c_2+\cdots+c_r=0,\ \ldots,\ c_{r-1}+c_r=0,\ c_r=0$ は自明解のみを持ち、1 次結合は次のように変形できるので 1 次独立。

$$\begin{aligned}&c_1\mathbf{a}_1+c_2(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+c_3(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)+\cdots+c_r(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_r)\\&=(c_1+c_2+\cdots+c_r)\mathbf{a}_1+(c_2+\cdots+c_r)\mathbf{a}_2+\cdots+(c_{r-1}+c_r)\mathbf{a}_{r-1}+c_r\mathbf{a}_r\end{aligned}$$

**問題 3.** $\mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_5=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ である。

**問題 4.** 行列 $(\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{a}_r)$ を基本変形する。

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&-1\\1&2&3&2\end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-5\\0&0&1&3\end{pmatrix}$ よって $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$ が求めるものである。

(2) $\begin{pmatrix}1&5&7&6&2\\4&-7&1&9&-1\\-2&6&2&-4&4\\2&3&7&8&2\end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix}1&0&2&0&10\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_4$ が求めるものである。

**問題 5.** (1) $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の非自明な結合係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r$ とすると、これは $\mathbf{o}$ を表す $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ の非自明な結合係数でもある。

(2) まず (1) の対偶を取ると、次が成り立つことが導かれる。

$$B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r \text{ 1 次独立 } \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \text{ 1 次独立}$$

逆に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立であると仮定する。$\mathbf{o}$ を表す $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ の結合係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r$ とする。このとき次が成り立つ。

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = B^{-1}(c_1B\mathbf{a}_1 + c_2B\mathbf{a}_2 + \cdots + c_rB\mathbf{a}_r) = B^{-1}\mathbf{o} = \mathbf{o}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次独立性により、そのような結合係数は自明なものしかない。よって $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ は 1 次独立である。故に同値であることが示された。

**問題 6.** $n$ 次正則行列 $B$ を選んで次が標準階段行列になるようにできる。

$$B(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r) = (B\mathbf{a}_1 \quad B\mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad B\mathbf{a}_r)$$

階段行列の形から階数が $r$ であるのは $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_r$ が 1 次独立であれば起こりかつそのときに限る。問題 5 (2) によれば、これは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次独立性と同値である。

**問題 7.** (1) $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ を係数とする $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{r-1}$ の 1 次結合を人為的に $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{a}_{r-1} + 0\mathbf{a}_r$ と見なせばよい。

(2) $c_1\mathbf{a}_{\sigma(1)} + c_2\mathbf{a}_{\sigma(2)} + \cdots + c_r\mathbf{a}_{\sigma(r)} = c_{\sigma^{-1}(1)}\mathbf{a}_1 + c_{\sigma^{-1}(2)}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{\sigma^{-1}(r)}\mathbf{a}_r$ である。

**問題 8.** $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b} \rangle$ の定義をきちんと理解していれば自明。

**問題 9.** $\exists i\ \mathbf{a}_i \in \langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle$ が成り立つとする。一般性を失うことなしにその番号 $i$ は $r$ であるとして良い。従って、$\mathbf{a}_r$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{r-1}$ の 1 次結合で表せるが、その結合係数を $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ とする。このとき $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, -1$ は $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の非自明な結合係数となる。故に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は 1 次従属である。

逆に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次従属性を仮定する。$\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の非自明な結合係数 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ が存在する。このうちのどれかは 0 でない。一般性を失うことなしに $c_r \neq 0$ であるとして良い。すると $-c_1/c_r, -c_2/c_r, \ldots, -c_{r-1}/c_r$ を係数とする $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{r-1}$ の 1 次結合は $\mathbf{a}_r$ を表すことになる。故に $\exists i\ \mathbf{a}_i \in \langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle$ が成り立つ。

以上により $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$ の対偶が証明できた。同値性 $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ は問題 8 による。

**問題 10.** (1) 1 次結合 $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_s\mathbf{b}_s$ は次に等しい。

$$(\sum_{j=1}^{s} c_{1j}x_j)\mathbf{a}_1 + (\sum_{j=1}^{s} c_{2j}x_j)\mathbf{a}_2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{s} c_{rj}x_j)\mathbf{a}_r$$

(2) (1) による。

(3) (2) により、$C$ の階数は列の個数 $s$ に等しくなる。他方、階数は行の個数 $r$ よりは大きくなれない。

**問題 11.** 省略

**問題 12.** (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \in \mathbb{R}^n = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$

(2) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$

**問題 13.** 与えられた列ベクトルから作られる行列を基本変形する。組 (1) では 3 次単位行列に組 (2) では 4 次単位行列に変形される。

**問題 14.** 与えられた列ベクトルから作られる行列を基本変形する。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2a-b-4c \end{pmatrix}$ より $2a - b - 4c \neq 0$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$ より $a \neq b$, $b \neq c$ かつ $c \neq a$

**問題 15.** 与えられた列ベクトルから作られる行列を基本変形する。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$

**問題 16.** 基底 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ に関する座標を $\mathbf{x}$ とし、基底 $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ に関する座標を $\mathbf{y}$ とすると次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

**問題 17.** $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ の結合係数を $c_1, c_2, \ldots, c_r, d$ とする。

まず、$d \neq 0$ なら $-c_1/d, -c_2/d, \ldots, -c_r/d$ を係数とする $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合は $\mathbf{b}$ を表すことになってしまい、仮定 $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ に矛盾する。

よって $d = 0$ しかあり得ない。すると $c_1, c_2, \ldots, c_r$ は $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の結合係数となる。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次独立性により、そのようなものは自明なものに限られる。

以上より $\mathbf{o}$ を表す $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ の結合係数は自明なものだけである。故に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ は 1 次独立である。

**問題 18.** (i) のみについて述べる。

まず $V \neq \{\mathbf{o}\}$ であるから、$\mathbf{o}$ でない元が存在する。その一つを選んで $\mathbf{a}_1$ とする。$\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$ であるから、$\mathbf{a}_1$ は 1 次独立である（プリント No.1 問題 17）。よってこの時点で $\langle \mathbf{a}_1 \rangle = V$ なら作業は終了である。

そうでないなら、$V$ は $\langle \mathbf{a}_1 \rangle$ に属さない元を持つ。その一つを選んで $\mathbf{a}_2$ とする。問題 17 により、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は 1 次独立となる。この時点で $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = V$ なら作業は終了である。

以後、$V$ から元を順次選び出して $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立であるように作業を続ける。これは $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \neq V$ である限り続行できる。ところが問題 12(1) によれば、1 次独立な組を構成する元の個数は $r \leq n$ と制限される。よってせいぜい $n$ 回でこの作業は打ち切りとなり、その時点で $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = V$ が成り立つ。これで基底の存在が示せた。

**問題 19.** 省略

**問題 20.** 省略

**問題 21.** 係数行列を基本変形する。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 次元は 2 で、基底は $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & a(a-3) \end{pmatrix}$ $a \neq 0$ かつ $a \neq 3$: 次元 $= 0$.

$a = 0$: 次元 $= 2$, 基底 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $a = 3$: 次元 $= 1$, 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**問題 22.** (1) 背理法による。仮に $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \neq V$ なら問題 17 により、$\mathbf{b} \in V$ が存在して $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ が 1 次独立となる。ところが定理 5(ii) によれば、1 次独立な組を構成する元の個数は $r$ を超えないので、矛盾が生じる。

(2) 定理 5(ii) によれば $V$ を生成するような組を構成する元の個数は $r$ より少なくはなれない。よって各 $i$ に対して $\langle \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots \rangle \neq V = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ が成り立つ。定理 2 によれば、これは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が 1 次独立であることを意味する。

**問題 23.** (i) のみについて述べる。

$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$ の基底 $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_s$ を一組固定する。さて $n$ 次正則行列 $P$ を選んで

$$P(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_r) = (P\mathbf{a}_1 \quad P\mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad P\mathbf{a}_r)$$

が標準階段行列になるようにできる。このとき $P$ の正則性より $P\mathbf{b}_1,\ P\mathbf{b}_2,\ \ldots,\ P\mathbf{b}_s$ は $\langle P\mathbf{a}_1, P\mathbf{a}_2, \ldots, P\mathbf{a}_r \rangle$ の基底である。従って

$$\dim\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle = s = \dim\langle P\mathbf{a}_1, P\mathbf{a}_2, \ldots, P\mathbf{a}_r \rangle$$

他方、階段行列の形から $\langle P\mathbf{a}_1, P\mathbf{a}_2, \ldots, P\mathbf{a}_r \rangle$ の次元は階数 $\operatorname{rank} A$ に等しい。以上より

$$\operatorname{rank} A = s = \dim\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$$

となり (i) が証明できた。

**問題 24.** (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ a & b & c \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ より $a \neq b,\ b \neq c$ かつ $c \neq a$

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & 3 & a \end{vmatrix} = (a+6)(a-1)(a-2)(a-3)$ より $a \neq 1,\ a \neq 2,\ a \neq 3$ かつ $a \neq -6$

**問題 25.** (1) 部分空間である

(2) 部分空間である

(3) 部分空間でない

**問題 26.** (1) 部分空間である

(2) 部分空間でない

(3) 部分空間である

(4) 部分空間である

**問題 27.** (1) $\forall v \in V\ v + o' = v$ において $v = o$ と特定する。

(2) $v + u = o$ の両辺に $-v$ を加える。

**問題 28.** (1) $0v = (0+0)v = 0v + 0v.$

(2) $co = c(o+o) = co + co.$

(3) $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = o.$