# 平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

**プリント No.4**（10 月 29 日配付）

**定義 1.** $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ とする。このとき線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対してブロック分け $(f(\mathbf{e}_1) \quad f(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad f(\mathbf{e}_n))$ を持つ $m \times n$ 行列を $f$ の**表現行列**という。

**問題 1.** 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $m \times n$ 行列 $A$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ が } f \text{ の表現行列} \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

**問題 2.** 次の線形写像についてそれぞれの表現行列を求めよ。

$$(1) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

**問題 3.** 次の写像についてそれぞれ線形であるか判定し、そうであれば表現行列を求めよ。

$$(1) \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2 \qquad (2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

**問題 4.** $\mathbf{a} = {}^{\mathrm{t}}(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ が与えられたとして次の写像を考える。

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x} \quad (\times \text{ はベクトル積})$$

上の写像は線形であるか判定し、そうであれば表現行列を求めよ。

**問題 5.** 次を表現行列とする線形変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ について像と核の次元をそれぞれ求めよ。

$$(1) \quad n = 3, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad n = 4, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**問題 6.** (1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列をそれぞれ $A$, $B$ とする。写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ （これを普通 $f + g$ で表す）は線形であり、その表現行列は $A + B$ となることを示せ。

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A$ とする。$k \in \mathbb{R}$ に対して写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto kf(\mathbf{x})$ （これを普通 $kf$ で表す）は線形であり、その表現行列は $kA$ となることを示せ。

**問題 7.** 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ の表現行列をそれぞれ $A$, $B$ とする。合成 $g \circ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ の表現行列は $BA$ であることを示せ。

> **約束：**定義を確認しておく。部分空間 $V$ の基底とは、$V$ の元の有限列 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ であって 1 次独立性と生成条件 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = V$ を満たすものである。しかしながら記号スペースが大きすぎるので、まとめて一つの記号、例えば $\mathcal{V}$ など、で表現することがある。

**定義 2.** 線形写像 $f:V \to W$ について考える。まず $V$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ と $W$ の基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_m$ を選び、それぞれ $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ で表す。このときブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \text{ 但し列ベクトル } \mathbf{a}_i \text{ は } f(\mathbf{v}_i) \text{ の基底 } \mathcal{W} \text{ に関する座標}$$

で構成される $m \times n$ 行列 $A$ を基底 $\mathcal{V}$ と基底 $\mathcal{W}$ に関する線形写像 $f$ の**表現行列**という。

**注 1.** (i) 各成分が $W$ の元であるような行ベクトルを形式的に考えると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1) & f(\mathbf{v}_2) & \cdots & f(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} \text{ 更に省略して } \mathcal{W}A = f(\mathcal{V})$$

というように、定義 2 を表現できる。
(ii) 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について考える。このとき定義 1 で導入した表現行列は標準基底に関する表現行列に他ならない。

**問題 8.** (1) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ の基底 $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めよ。

**問題 9.** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ の基底 $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めよ。また得られた表現行列について、その階数およびそれを係数行列とする同次連立 1 次方程式の解の自由度を求めよ。

**問題 10.** 線形写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ の表現行列をそれぞれ求めよ。

(1) 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に関して

(2) 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して

**問題 11.** $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ に対して、線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が次を満たすとき、基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ と基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ に関する $f$ の表現行列をそれぞれ求めよ。

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &\mapsto 3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &\mapsto \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 &\mapsto \mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 &\mapsto -\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 &\mapsto \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 12\mathbf{v}_3 &\mapsto 5\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

**問題 12.** 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ と基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_m$ に関する表現行列は $(\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_m)^{-1} A\, (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n)$ であることを示せ。

**問題 13.** 部分空間 $V$ の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ と部分空間 $W$ の基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_m$ を選び、それぞれ $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ で表す。さらに次の写像 $p$, $q$ を導入する。

$$p : \mathbb{R}^n \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n; \quad q : \mathbb{R}^m \to W, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \mapsto y_1\mathbf{w}_1 + \cdots + y_m\mathbf{w}_m$$

線形写像 $f : V \to W$ と $m \times n$ 行列 $A$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ が基底 } \mathcal{V} \text{ と基底 } \mathcal{W} \text{ に関する } f \text{ の表現行列} \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ f \circ p(\mathbf{x}) = q(A\mathbf{x})$$

**問題 14.** 線形写像 $f : V \to W$ に対しある基底に関する表現行列を $A$ とする。このとき $f$ が同型写像であることと $A$ が正則な正方行列であることは同値である。これを示せ。

問題 13 において基底 $\mathcal{V}$ と基底 $\mathcal{W}$ に関する $f$ の表現行列を $A$ とすると

$$p(A \text{ を係数行列とする同次連立 1 次方程式の解空間}) = \operatorname{Ker} f$$

が成り立つ。また $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$ とブロック分けすると

$$q(\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle) = \operatorname{Im} f$$

が成り立つ。以上より次が示せる。

1° 係数行列 $A$ を持つ同次連立 1 次方程式の基本解を選びそれを $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_l$ とする。このとき $p(\mathbf{k}_1), \ldots, p(\mathbf{k}_l)$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底であり、$\dim \operatorname{Ker} f$ は解の自由度 $l$ に等しい。

2° $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ の基底を選びそれを $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ とする。このとき $q(\mathbf{b}_1), \ldots, q(\mathbf{b}_r)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底である。よって $\dim \operatorname{Im} f$ は $\operatorname{rank} A$ に等しい。

更に次の定理が読み取れる。

**定理 1.** （**次元公式**）線形写像 $f : V \to W$ に対して次が成り立つ：

$$\dim V = n = \operatorname{rank} A + \text{解の自由度} = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$$

**例 1.** 写像 $M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ X \mapsto \operatorname{tr} X$ は線形である。このとき

$$\text{像} = \mathbb{R},\ \text{核} = \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$$

であるから、以下の通り次元公式が確かに成り立つ。

$$\dim M(2, \mathbb{R}) = 4 = 1 + 3 = \dim \text{像} + \dim \text{核}$$

**問題 15.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形写像 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について考える。

(1) 核の基底と像の基底をそれぞれ 1 組求めよ。

(2) 次元公式が成り立つことを確かめよ。

**定義 3.** 部分空間 $V$ に対して 2 組の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ と $\widetilde{\mathbf{v}}_1, \widetilde{\mathbf{v}}_n, \ldots, \widetilde{\mathbf{v}}_n$ を選び、それぞれ $\mathcal{V}$ と $\widetilde{\mathcal{V}}$ で表す。このとき恒等写像 $V \to V,\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ の基底 $\widetilde{\mathcal{V}}$ と基底 $\mathcal{V}$ に関する（順序に注意せよ）表現行列 $P$ を基底 $\mathcal{V}$ から基底 $\widetilde{\mathcal{V}}$ への**基底変換の行列**という。

**注 2.** 各成分が $V$ の元であるような行ベクトルを形式的に考えると、

$$(\widetilde{\mathbf{v}}_1 \quad \widetilde{\mathbf{v}}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{\mathbf{v}}_n) = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n)P \ \text{ 更に省略して } \widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}P$$

というように、定義 3 を表現できる。

**問題 16.** $\mathbb{R}^2$ において、次の基底変換の行列をそれぞれ求めよ。

(1) 標準基底から基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ へ　　(2) 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から標準基底へ

(3) 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ へ

**問題 17.** $\mathbb{R}^3$ において基底 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ への基底変換の行列を求めよ。

**問題 18.** $M(2,\mathbb{R})$ において次の基底変換の行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} >> \begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

**問題 19.** $\mathbb{R}^n$ において標準基底から基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ への基底変換の行列を求めよ。

**問題 20.** 部分空間 $V$ に対して 2 組の基底 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ と $\widetilde{\mathbf{v}}_1,\widetilde{\mathbf{v}}_n,\ldots,\widetilde{\mathbf{v}}_n$ を選び、それぞれ $\mathcal{V}$ と $\widetilde{\mathcal{V}}$ で表す。さらに次の写像を導入する。

$$q:\mathbb{R}^n\to V,\ \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n;\quad \widetilde{q}:\mathbb{R}^n\to W,\ \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\mapsto y_1\widetilde{\mathbf{v}}_1+\cdots+y_n\widetilde{\mathbf{v}}_n$$

$n$ 次正方行列 $P$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$P\text{ が基底 }\mathcal{V}\text{ から基底 }\widetilde{\mathcal{V}}\text{ への基底変換の行列}\Leftrightarrow\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ q(P\mathbf{x})=\widetilde{q}(\mathbf{x})$$

**問題 21.** 次で定義される線形変換を考える。

$$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1+2x_2+2x_3\\2x_2+2x_3\\3x_3\end{pmatrix}$$

(1) 基底 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ に関する表現行列 $A$ を求めよ。

(2) 基底 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ に関する表現行列 $B$ を求めよ。

(3) (1) で与えた基底から (2) で与えた基底への基底変換の行列 $P$ を求めよ。

(4) $B=P^{-1}AP$ が成り立つことを確かめよ。

**問題 22.** $\mathbb{R}^n$ の基底を 3 組えらびそれぞれ $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$ とする。基底 $\mathcal{U}$ から基底 $\mathcal{V}$ への基底変換の行列を $P$ とし、基底 $\mathcal{V}$ から基底 $\mathcal{W}$ への基底変換の行列を $Q$ としたとき、基底 $\mathcal{U}$ から基底 $\mathcal{W}$ への基底変換の行列は $PQ$ であることを示せ。

**問題 23.** $\mathbb{R}^n$ の基底を 2 組えらびそれぞれ $\mathcal{U},\mathcal{V}$ とする。基底 $\mathcal{U}$ から基底 $\mathcal{V}$ への基底変換の行列を $P$ としたとき、基底 $\mathcal{V}$ から基底 $\mathcal{U}$ への基底変換の行列は $P^{-1}$ であることを示せ。

**問題 24.** $\mathbb{R}^n$ の基底を 2 組 $\mathcal{V},\widetilde{\mathcal{V}}$ 選び、$\mathbb{R}^m$ の基底を 2 組 $\mathcal{W},\widetilde{\mathcal{W}}$ 選ぶ。このとき線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対して、基底 $\mathcal{V}$ と基底 $\mathcal{W}$ に関する表現行列を $A$ とし、基底 $\widetilde{\mathcal{V}}$ と基底 $\widetilde{\mathcal{W}}$ に関する表現行列を $B$ とする。行列 $A$ と $B$ の関係を求めよ。