平成 20 年度 線形代数学演習 II

水曜 1・2 時限，総合科学部 K203

プリント No.7（12 月 3 日配付）

今回のメインは直交変換であるが、その前に直交分解定理についてふれておこう。

問題 1. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V とその正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ が与えられたとする。

(1) 各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \in V^\perp$ が成り立つことを示せ。

(2) 各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{y} \in V$ と $\mathbf{z} \in V^\perp$ が存在することを示せ。

(3) 小問 (2) において $\mathbf{y} \in V$ と $\mathbf{z} \in V^\perp$ は一意であることを示せ。

部分空間には必ず正規直交基底が存在する（プリント No.5 定理 2）。よって次が示せる。

定理 1. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V と直交補空間 $V^\perp$ に対し次が成り立つ。**直交分解定理**

各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{y} \in V$ と $\mathbf{z} \in V^\perp$ が一意に存在する。

このとき（順序付き）組 $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ を $\mathbf{x}$ の V に関する**直交分解**という。

問題 2. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対して以下を示せ。

(1) 各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V^\perp$ を満たす $\mathbf{y} \in V$ が一意に存在する。

(2) 小問 (1) により定まる写像 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$（即ち $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して値 $p(\mathbf{x})$ は条件 $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in V^\perp$, $p(\mathbf{x}) \in V$ によって決定される）は線形であり次を満たす。

$$1^\circ\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\ p(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x}) \quad 2^\circ\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\ (p(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, p(\mathbf{b}))$$

小問 (2) の写像 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を部分空間 V への**正射影**という。

定義 1. **直交行列**とは条件 ${}^tAA = E$（E は単位行列）を満たす <u>実正方行列</u>A をいう。

注 1. 前期プリント No.9 の問題 23 においては次のように述べられている。

$\star$ 正則行列 A であってその転置 ${}^tA$ が逆行列 A^{-1} に等しいものを直交行列という。

<u>正方行列 A に対しては</u>、前期プリント No.7 の問題 4(4) で述べたように、条件 ${}^tAA = E$ から ${}^tA$ と A は互いの逆行列であることが導かれる。したがって $\star$ の代替えとして上で述べたものを定義としてよい。

問題 3. 次のそれぞれについて直交行列であることを確認し、また逆行列を求めよ。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \\ -2/7 & 3/7 & 6/7 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

問題 4. $A \in M(n, \mathbb{R})$ のブロック分け $(\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n)$ について以下が成り立つことを示せ。

$$A \text{ 直交行列} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \ \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系}$$

問題 5. 次のそれぞれについて与えられた行列が直交行列であるように a, b, c を定めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & -1/2 \\ 1/2 & b \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & a \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & b \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & c \end{pmatrix}$$

問題 6. 2 次直交行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ で表せることを示せ。

問題 7. (1) 直交行列 A に対して $A\,{}^tA = E$ が成り立つことを示せ。

(2) 直交行列 A に対して ${}^tA$ も直交行列であることを示せ。

(3) 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ。

問題 8. $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ について以下が成り立つことを示せ。

(1) A, B が直交行列なら AB も直交行列である。

(2) B と AB が直交行列なら A も直交行列である。

問題 9. $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ と $A \in M(n, \mathbb{R})$ に対し次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ 直交行列} \Leftrightarrow A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n \ \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系}$$

ヒント：ブロック分け $(\mathbf{e}_1 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n)$ を持つ行列は直交行列である（問題 4）。これに A を左からかけるとブロック分け $(A\mathbf{e}_1 \quad \dots \quad A\mathbf{e}_n)$ を持つ行列ができる。

問題 10. $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ に対して次が成り立つことを示せ。

(1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \ (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y})$

(2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow {}^tAA = E$（$n$ 次単位行列）

定義 2. 内積空間 V 上の**直交変換**とは次の 2 条件を満たす線形変換 $f : V \to V$ をいう。

$1^\circ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 2^\circ \ f$ は全射

問題 11. $A \in M(n, \mathbb{R})$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ 直交行列} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \text{ 直交変換}$$

ヒント：線形変換 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ の全射性についての考察を忘れずに。

注 2. プリント No.4 の定理 1 においては次のように述べられている。

線形写像 $f : V \to W$ に対して $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$ が成り立つ。

よって $\underline{\dim V = \dim W \text{ なら}}$、以下が成り立つので、単射性と全射性は同値である。

$$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim W \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$$

問題 12. 内積空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ について以下が成り立つことを示せ。

(1) 定義 2 の条件 1° は次の条件と同値である：$\forall \mathbf{x} \in V \ \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$
ヒント：プリント No.5 問題 13 で述べた関係 $4(a, b) = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$

(2) 線形変換 f が定義 2 の条件 1° を満たすなら、それは単射である。

(3) 定義 2 において条件 2° は冗長である（この演習を通じて V は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることが前提となっている）。

問題 13. $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル $\mathbf{e}$ に対して次は直交変換であることを示せ。

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$$

問題 14. 直交変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V に対し $\mathbf{x} \in V \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in V$ とする。

(1) 写像 $V \to V$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ は全射であることを示せ。

(2) $\mathbf{y} \in V^\perp \Rightarrow f(\mathbf{y}) \in V^\perp$ が成り立つことを示せ。

定義 3. **ユニタリ行列**とは条件 $A^*A = E$（E は単位行列）を満たす正方行列 A をいう。

問題 15. (1) $\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 & (1-i)/2 \\ i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -i/2 & (-1+i)/2 \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを確かめよ。

(2) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & -a+bi \\ a+bi & 5 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列になるような整数の組 a, b を全て求めよ。

問題 16. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対し $A = -A^*$ かつ $E + A$（E は n 次単位行列）が正則なら $(E - A)(E + A)^{-1}$ はユニタリ行列であることを示せ。

問題 17. $A \in M(n, \mathbb{C})$ のブロック分け $(\mathbf{a}_1 \ \ \dots \ \ \mathbf{a}_n)$ について以下が成り立つことを示せ。

$$A \text{ ユニタリ行列} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \ \mathbb{C}^n \text{ の正規直交系}$$

問題 18. (1) ユニタリ行列 A に対して A^* もユニタリ行列であることを示せ。

(2) A, B が n 次ユニタリ行列なら AB も n 次ユニタリ行列であることを示せ。

(3) ユニタリ行列の行列式は絶対値 1 の複素数であることを示せ。

問題 19. $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ と $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対し次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ ユニタリ行列} \Leftrightarrow A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n \ \mathbb{C}^n \text{ の正規直交系}$$

問題 20. $A \in M(m, n, \mathbb{C})$ に対して次が成り立つことを示せ。

(1) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{C}^m \ (A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$

(2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow A^*A = E$（$n$ 次単位行列）

定義 4. エルミート計量空間 V 上の**ユニタリ変換**とは次の 2 条件

$$1^\circ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 2^\circ \ f \text{ は全射}$$

を満たす複素線形変換 $f : V \to V$ をいう。

問題 21. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ ユニタリ行列} \Leftrightarrow \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \text{ ユニタリ変換}$$

問題 22. エルミート計量空間 V 上の複素線形変換 $f : V \to V$ について以下を示せ。

(1) 定義 4 の条件 1° は次の条件と同値である：$\forall \mathbf{x} \in V \ \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$

(2) f が定義 4 の条件 1° を満たすなら、それは全単射である（この演習を通じて V は $\mathbb{C}^n$ の部分空間であることが前提となっている）。

問題 23. (1) $M(n, \mathbb{C})$ において $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY^*)$ はエルミート内積であることを示せ。

(2) n 次ユニタリ行列 A, B を与える。このとき小問 (1) のエルミート内積について写像 $M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C}),\ X \mapsto AXB$ はユニタリ変換であることを示せ。

問題 24. $M(2, \mathbb{C})$ にエルミート内積 $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY^*)$ を導入する。以下を示せ。

(1) 次は部分空間 $V = \{X \in M(2, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$ の正規直交基底である。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(2) 小問 (1) の部分空間 V について $V^\perp = \langle E \rangle_{\mathbb{C}}$ が成り立つ（E は 2 次単位行列）。

(3) 2 次ユニタリ行列 A, B を与える。このとき次の 1°, 2° は同値である。

1° 全ての $X \in V$ に対して $AXB \in V$ が成り立つ。
2° $B = cA^{-1}$ かつ $|c| = 1$ を満たす $c \in \mathbb{C}$ が存在する。