平成 20 年度 線形代数学演習 II
プリント No.7（12 月 3 日配付）略解

問題 1. (1) 各 k に対して $\mathbf{e}_k$ と $\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ は直交すること（プリント No.5 問題 18(1) を見よ）、同値性 $\forall k\ (\mathbf{y}, \mathbf{e}_k) = 0 \Leftrightarrow y \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r \rangle^{\perp}$ が成り立つこと（プリント No.5 問題 9 と関連）および $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r \rangle$ であることによる。

(2) $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ が求めるものである。

(3) $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in V$, $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in V^{\perp}$, $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$ かつ $\mathbf{y}' + \mathbf{z}' = \mathbf{x}$ であるとする。 差し引きすると

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{z}' - \mathbf{z}$$

V, $V^{\perp}$ は部分空間であるから $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \in V$ かつ $\mathbf{z}' - \mathbf{z} \in V^{\perp}$ が成り立つ。よって

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{y} - \mathbf{y}') = (\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{z}' - \mathbf{z}) = 0 \ \because V \text{ の元と } V^{\perp} \text{ の元は直交}$$

となる。内積の性質より $\mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{o}$ すなわち $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ を得る。

問題 2. (1) $\mathbf{x}$ の V に関する直交分解を $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ とする。このとき $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z} \in V^{\perp}$ かつ $\mathbf{y} \in V$ である。一意性は問題 1(3) と同様に示せる。

(2) p の線形性：$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ とする。$p(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}')$ の決定条件は次の通りである。

$$\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in V^{\perp},\ p(\mathbf{x}) \in V, \mathbf{x}' - p(\mathbf{x}') \in V^{\perp},\ p(\mathbf{x}') \in V.$$

ここで V, $V^{\perp}$ は部分空間であるから

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' - (p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}')) = \mathbf{x} - p(\mathbf{x}) + \mathbf{x}' - p(\mathbf{x}') \in V^{\perp} \text{ かつ } p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}') \in V$$

これは $p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}') = p(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$ を意味する。スカラー倍に関する考察は省略する。

1° $\mathbf{y} \in V$ なら $\mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{o} \in V^{\perp}$ なので $p(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ が成り立つ。他方 $p(\mathbf{x})$ の決定条件より $p(\mathbf{x}) \in V$ である。従って $p(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x})$ を得る。

2° V の元と $V^{\perp}$ の元は直交するので、内積 $(p(\mathbf{a}), \mathbf{b} - p(\mathbf{b}))$ は 0 である。内積の性質（双線形性）を使って式変形する。

$$(p(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (p(\mathbf{a}), p(\mathbf{b}) + \mathbf{b} - p(\mathbf{b})) = (p(\mathbf{a}), p(\mathbf{b})) + (p(\mathbf{a}), \mathbf{b} - p(\mathbf{b})) = (p(\mathbf{a}), p(\mathbf{b}))$$

上の変形において $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を入れ替えると $(p(\mathbf{b}), \mathbf{a}) = (p(\mathbf{b}), p(\mathbf{a}))$ が得られる。よって

$$(p(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (p(\mathbf{a}), p(\mathbf{b})) = (p(\mathbf{b}), p(\mathbf{a})) = (p(\mathbf{b}), \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, p(\mathbf{b}))$$

ここで内積の性質（対称性）を 2 度適用している。

問題 3. 逆行列は転置行列で与えられる。

問題 4. ブロック分けをつかうと ${}^tAA$ は (i,j) 成分は内積 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ で与えられる。

問題 5. (1) $(a,b) = (\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ または $(a,b) = (-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$

(2) $(a,b,c) = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$ または $(a,b,c) = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$

問題 6. 与えられた行列が直交行列であることは直接確かめられる。逆に 2 次直交行列のブロック分けを $(\mathbf{a} \quad \mathbf{b})$ とする。$\mathbf{a}$ は単位ベクトル、即ち単位円周上に終点を持つので角度 θ を用いて $\mathbf{a} = {}^t(\cos\theta \quad \sin\theta)$ と表せる。これと直交する単位ベクトルは ${}^t(-\sin\theta \quad \cos\theta)$ あるいは ${}^t(\sin\theta \quad -\cos\theta)$ のみである。

問題 7. (1) 注 1 で述べたように直交行列 A に対して ${}^tA$ は A の逆行列を与える。

(2) ${}^t({}^tA) = A$ であるから小問 (1) より ${}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA = E$ を得る。

(3) 積行列の行列式および転置行列の行列式に関する公式より。

問題 8. (1) ${}^t(AB)\,AB = {}^tB\,{}^tA\,AB = {}^tB\,B = E$ より積 AB は直交行列である。

(2) B は逆行列を持ち、それは ${}^tB$ で与えられる。${}^tB$ も直交行列であり、直交行列の積は直交行列であるから $A = AB\,{}^tB$ も直交行列である。

問題 9. ヒントで述べたように $(\mathbf{e}_1 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n)$ は直交行列である。よって

$$A \text{ 直交行列} \underset{\text{問題 8}}{\Leftrightarrow} (A\mathbf{e}_1 \quad \dots \quad A\mathbf{e}_n) \text{ 直交行列} \underset{\text{問題 4}}{\Leftrightarrow} A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n \ \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系}$$

問題 10. 成分表示をすれば分かる。

問題 11. 内積に関する議論は問題 10(2) で尽くされている。全射性についての考察：A が直交行列なら注 1 で述べたように A は正則である。よって任意の $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{y} = A(A^{-1}\mathbf{y})$ が成り立つので、$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全射である。

問題 12. (1) 定義 2 の条件 1° を仮定すると $\|f(\mathbf{x})\|^2 = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ が成り立つ。逆に $\forall \mathbf{x} \in V$ $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ を仮定する。プリント No.5 問題 13 にょれば

$$\begin{aligned} 4(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= \|f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 \\ &= \|f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|^2 \underset{\text{仮定}}{=} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$ これは単射性を意味する。

(3) 小問 (2) より定義 2 の条件 1° を満たす線形変換は単射である。他方、注 2 によれば、線形変換に対しては単射性と全射性は同値である。よって条件 2° は冗長である。

問題 13. 問題 12(1) の条件を確かめる。双線形性を使って変形する。

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}, \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})(\mathbf{x}, \mathbf{e}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{x}) + 4(\mathbf{x}, \mathbf{e})^2(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 4(\mathbf{x}, \mathbf{e})^2 + 4(\mathbf{x}, \mathbf{e})^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

問題 14. (1) 線形写像の定義域を部分空間に制限しても線形であることは変わりない。さて問題 12 で述べたように直交変換は単射である。単射な写像の定義域を制限しても単射であることは変わりない。よって写像 $V \to V$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ は単射な線形変換である。注 2 で述べたように線形変換に関しては単射なら全射になってしまう。

(2) $\mathbf{y} \in V^{\perp}$ とする。任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して、小問 (1) により、$\mathbf{x} = f(\mathbf{z})$ となるような $\mathbf{z} \in V$ が存在する。このとき $(f(\mathbf{y}), \mathbf{x}) = (f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z})) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ が成り立つ。$\mathbf{x} \in V$ は任意なのでこれは $f(\mathbf{y}) \in V^{\perp}$ を意味する。

問題 15. (1) 省略　(2) $(3,4)$, $(3,-4)$, $(-3,4)$, $(-3,-4)$ および a と b を入れ替えたもの。

問題 16. $((E-A)(E+A)^{-1})^* = ((E+A)^{-1})^*(E-A)^* = (E+A^*)^{-1}(E-A^*)$ と変形し、$A = -A^*$ を使うと $((E-A)(E+A)^{-1})^* = (E-A)^{-1}(E+A) = (E+A)(E-A)^{-1}$ を得る。

問題 17. 問題 4 参照

問題 18. 問題 7 と問題 8 参照

問題 19. 問題 9 参照

問題 20. 問題 10 参照

問題 21. 問題 11 参照

問題 22. 問題 12 とプリント No.6 問題 12(2) 参照

問題 23. (1) 不等式 $\mathrm{tr}(XX^*) \geq 0$ と条件 $\mathrm{tr}(XX^*) = 0$ を調べるには、行列 X の i 行 j 列成分を X_{ij} とすると $\mathrm{tr}(XX^*) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |X_{ij}|^2$ であることを使えばよい。

(2) まず $AXB(AYB)^* = AXBB^*Y^*A^* = AXY^*A^*$ である。トレースの性質を使うと

$$\mathrm{tr}(AXY^*A^*) = \mathrm{tr}(A^*AXY^*) = \mathrm{tr}(XY^*)$$

問題 24. (1) 与えられた行列を順に I, J, K と書くと $I^* = -I$, $J^* = -J$, $K^* = -K$, $I^2 = J^2 = K^2 = -E/2$ であり、各 $X \in M(2, \mathbb{C})$ に対して次が成り立つ。

$$X = \frac{\mathrm{tr}\, X}{2} E - \mathrm{tr}(XI)I - \mathrm{tr}(XJ)J - \mathrm{tr}(XK)K$$

$X \in V$ なら $\mathrm{tr}\, X = 0$ であるから、これより V は I, J, K で張られる。

(2) 小問 (1) より、$X \in V^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(XI) = 0, \mathrm{tr}(XJ) = 0, \mathrm{tr}(XK) = 0 \Leftrightarrow X \in \langle E \rangle_{\mathbb{C}}$

(3) $\mathrm{tr}(AXB) = \mathrm{tr}(XBA) = \mathrm{tr}(X(A^*B^*)^*)$ と小問 (2) に注意する。

$$1^\circ \Leftrightarrow \forall X \in V\, \mathrm{tr}(AXB) = 0 \Leftrightarrow A^*B^* \in V^{\perp} \Leftrightarrow A^*B^* \in \langle E \rangle_{\mathbb{C}}$$

ここで $k \in \mathbb{C}$ に対して同値性 $A^*B^* = kE \Leftrightarrow BA = \overline{k}E$ が成り立ち、また BA はユニタリ行列であるから、上は 2° と同値になる。