線形代数学演習 II 試験（12 月 17 日実施） $\boxed{\text{学生番号}}$ $\boxed{\text{氏名}}$ 略解

問題 1. $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ -3 & 5 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ の 1 次独立性を判定し、その理由を述べよ。また $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ についてはどうか。

(2) $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の 1 次結合であるか判定し、1 次結合であるなら表し方をすべて求めよ。

解. 与えられた行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ -3 & 5 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ は 1 次独立である。また $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 1 次独立でない。

(2) 1 次結合であり、c を任意実数とするとき $\mathbf{b} = (2-3c)\mathbf{a}_1 + (5-2c)\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{a}_4$ が表し方のすべてである。 □

問題 2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形写像 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ に対し、その核の次元と基底を求めよ。また像の次元と基底も求めよ。

(2) 線形写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 12x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ 19x_1 + 5x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$ に対し、基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に関する表現行列を求めよ。

解. (1) 与えられた行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} >>> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

核：次元 $= 2$ 基底の例 $\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 　像：次元 $= 2$ 基底の例 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 19 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ □

問題 3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ を A とし、$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のブロック分けを $(\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3)$ とする。

(1) $A\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{b}_2$, $A\mathbf{b}_3$ を計算せよ。

(2) $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ の 1 次独立性を判定し、その理由を述べよ。

(3) 線形写像 $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は単射であることを示せ。

解. (1) 次の計算により、順に ${}^t(1 \quad 0 \quad 0)$, ${}^t(0 \quad 1 \quad 0)$, ${}^t(0 \quad 0 \quad 1)$ となる。

$$(A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad A\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 小問 (1) で見たように $A\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{b}_2$, $A\mathbf{b}_3$ は 1 次独立である。これより $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ も 1 次独立であることが示せる。

(3) $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle$ かつ $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ とする。前者の条件より $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3$ と 1 次結合で表せる。後者の条件を加味すると次が得られる。

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 A\mathbf{b}_1 + c_2 A\mathbf{b}_2 + c_3 A\mathbf{b}_3 = A(c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3) = A\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

よって $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ 即ち $\mathbf{x} = 0\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3 = \mathbf{o}$ となる。故に、核が自明な線形写像であるから、写像 $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は単射である。 □

問題 4. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を A とし、$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表現行列とする線形写像 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ の核を V とする。

(1) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $A\mathbf{x} \in V$ であることを示せ。

(2) 線形写像 $\mathbb{R}^3 \to V$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全射であることを示せ。

解. (1) 積 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$ が零行列であるから。

(2) A のブロック分けを $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)$ とする。$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ である。さて

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} >> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/3 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できるので、V の次元は 2 であり、組 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ がその基底をなすことが分かる。よって $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ を加味すると

$$V = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \{\mathbf{y} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$$

となる。故に写像 $\mathbb{R}^3 \to V$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ は全射である。 □

問題 5. 集合 V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であること、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が部分空間 V の基底であることとそれぞれの定義を述べよ。

解. 集合 V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることの定義：V は $\mathbb{R}^n$ の <u>空でない</u> 部分集合であり、

1° $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ $\quad 2^\circ$ $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V \Rightarrow c\mathbf{x} \in V$

の 2 条件を満たす。

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ が部分空間 V の基底であることの定義：$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は V の元であり、

1° $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ は 1 次独立
2° V の任意元は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ の 1 次結合で表せる

の 2 条件を満たす。 □