公平さとランダム性

先端数学

岩田耕一郎

2008 April 18

原証券としてのくじ：価格付け

与えられたデータ：$0 \leq s_1 < s_2 < s_3$ （くじの当籤金）

価格 x：$x > 0$ 市場できまる。

戦略 $\xi,\ \eta$：$\xi x + \eta = 0$ 取引する人が選べる。

資産 V：価格がxのとき戦略$\xi,\ \eta$を選ぶと精算額は

$$V = \begin{cases} \xi s_1 + \eta & \text{当籤金が}s_1\text{のとき} \\ \xi s_2 + \eta & \text{当籤金が}s_2\text{のとき} \\ \xi s_3 + \eta & \text{当籤金が}s_3\text{のとき} \end{cases}$$

条件$\xi x + \eta = 0$を使ってηを消去すると

$$V = \begin{cases} \xi(s_1 - x) & \text{当籤金が}s_1\text{のとき} \\ \xi(s_2 - x) & \text{当籤金が}s_2\text{のとき} \\ \xi(s_3 - x) & \text{当籤金が}s_3\text{のとき} \end{cases}$$

Observation. $x \le s_1$あるいは$x \ge s_3$なら**リスクなし**で儲かる。

$x \le s_1$の場合、戦略$\xi = 1,\ \eta = -x$を選ぶと

$$V = \begin{cases} s_1 - x \ge 0 & \text{当籤金が}s_1\text{のとき} \\ s_2 - x > 0 & \text{当籤金が}s_2\text{のとき} \\ s_3 - x > 0 & \text{当籤金が}s_3\text{のとき} \end{cases}$$

$x \ge s_3$の場合、戦略$\xi = -1,\ \eta = x$を選ぶと

$$V = \begin{cases} x - s_1 > 0 & \text{当籤金が}s_1\text{のとき} \\ x - s_2 > 0 & \text{当籤金が}s_2\text{のとき} \\ x - s_3 \ge 0 & \text{当籤金が}s_3\text{のとき} \end{cases}$$

Definition. 戦略 $\xi,\ \eta$が**裁定機会**であるとは起こりうる全てのケースで$V \ge 0$かついずれかのケースで$V > 0$であること。

no risk

Observation. $s_1 < x < s_3$ なら裁定機会は存在しない。

$\boxed{\text{ポイント}}$　次を満たすように $p > 0,\ q > 0,\ r > 0$ が選べる。

$$p + q + r = 1, ps_1 + qs_2 + rs_3 = x$$

起こりうる全てのケースで $V \geq 0$ が成り立つとする。

$$p(\xi s_1 + \eta) + q(\xi s_2 + \eta) + r(\xi s_3 + \eta)$$

$$\geq 0 \qquad\qquad \geq 0 \qquad\qquad \geq 0$$

$$= \xi(ps_1 + qs_2 + rs_3) + \eta(p + q + r)$$

$$= \xi x + \eta = 0$$

$$\Rightarrow p(\xi s_1 + \eta) = 0,\ q(\xi s_2 + \eta) = 0,\ r(\xi s_3 + \eta) = 0$$

$$p > 0,\ q > 0,\ r > 0$$

$$\Rightarrow \xi s_1 + \eta = 0,\ \xi s_2 + \eta = 0,\ \xi s_3 + \eta = 0$$

$\Rightarrow$ 全てのケースで $V = 0$ $V > 0$ となるケースはない。

Definition.

裁定機会が存在しない市場を**無裁定市場**という。

無裁定市場を実現する価格を**無裁定価格**という。

Conclusion. 当籤金が s_1, s_2, s_3 のくじ市場では x が無裁定価格であるための必要十分条件は $s_1 < x < s_3$ である。

派生証券：オプションの導入

あらかじめ契約を交わせて次のような権利を確保しておく。

与えられたデータ：$s_2 \le k < s_3$　行使価格

当籤くじを価格kでコール（購入）し相応する当籤金を得る。

上の権利を放棄しても良い。

このタイプの契約をコールオプションという。ペイオフは

$$V = \begin{cases} 0 & \text{当籤金が} s_1 \text{のとき権利を放棄} \\ 0 & \text{当籤金が} s_2 \text{のとき権利を放棄} \\ s_3 - k > 0 & \text{当籤金が} s_3 \text{のときコールし当籤金を得る} \end{cases}$$

Observation.　無償のコールオプションは裁定機会を生み出す。無裁定とするには正の価格をつける必要がある。

$\downarrow$

くじとコールオプションが両方とも取引される市場を考える。

価格 くじx_1 オプションx_2：$x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 市場できまる。

戦略 ξ_1, ξ_2, η：$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \eta = 0$ 取引する人が選べる。

資産 V：戦略ξ_1, ξ_2, ηを選ぶと精算額は

$$V = \begin{cases} \xi_1 s_1 + \xi_2 0 + \eta & \text{当籤金が} s_1 \text{のとき} \\ \xi_1 s_2 + \xi_2 0 + \eta & \text{当籤金が} s_2 \text{のとき} \\ \xi_1 s_3 + \xi_2 c + \eta & \text{当籤金が} s_3 \text{のとき} \end{cases}$$

ここで$c := s_3 - k > 0$

Question. 無裁定価格x_1, x_2の条件は何か？

戦略の満たす条件と資産を決める式を行列により表現

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{pmatrix} = 0, \; V = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 1 \\ s_3 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta \end{pmatrix}$$

一般に

$S(0) := \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}$ **サイズ**$n+1$**の行ベクトル**

$S(1) := \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}$ **サイズ**$k \times (n+1)$**の行列**

を導入する。

Remark. 行ベクトルQが$S(0) = QS(1)$を満たすならQの成分和は1である。また

$$G := \{V : \exists h \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } S(0)h = 0 \text{ and } S(1)h = V\}$$
$$\triangle := \{V \in \mathbb{R}^k : \text{すべての成分} \geq 0 \text{ いずれかの成分} > 0\}$$

を導入すると

Gは可能な戦略hに対応する資産Vからなる集合である。

$G \cap \triangle \neq \emptyset$は裁定機会の存在を意味する。

Theorem. $G \cap \triangle = \emptyset$であるための必要十分条件は

$\exists Q$ サイズkの行ベクトル s.t.

すべての成分> 0かつ$S(0) = QS(1)$

上のようなQを**同値マルチンゲール測度**という。

なぜ同値マルチンゲール測度というのか？

標本空間$\Omega := \{1, 2, \ldots, k\}$

確率測度P：$\omega = 1, 2, \ldots, k$に対して

$$P(\{\omega\}) = \text{行ベクトル}Q\text{の第}\omega\text{成分}$$

$\omega = 1, 2, \ldots, k$と$i = 1, 2, \ldots, n$に対して

$$X^i(\omega) := \text{行列}S(1)\text{の}\omega\text{行}i\text{列成分}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$に対して

$$x^i := \text{行列}S(0)\text{の第}i\text{成分}$$

このとき

$P(\{\omega\}) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$かつ$E[X^i] = x^i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$

くじ・コールオプション市場に定理を適用する。

価格x_1, x_2が無裁定であるため必要十分条件は

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 1 \\ s_2 & 0 & 1 \\ s_3 & c & 1 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

を満たす$p > 0$, $q > 0$, $r > 0$が存在することである。

$(\star)$はp, q, rについて一意に解くことができる。

$$0 < (s_2 - s_1)p = (1 - \frac{x_2}{c})s_2 + \frac{x_2}{c}s_3 - x_1$$

$$0 < (s_2 - s_1)q = x_1 - (1 - \frac{x_2}{c})s_1 - \frac{x_2}{c}s_3$$

$$0 < r = \frac{x_2}{c}$$

Conclusion. くじ・コールオプション市場においてx_1, x_2が無裁定価格であるため必要十分条件は

$$(1-\frac{x_2}{c})s_1+\frac{x_2}{c}s_3<x_1,$$
$$x_1<(1-\frac{x_2}{c})s_2+\frac{x_2}{c}s_3,$$
$$x_2>0$$

である。

次のタイプの契約を**プットオプション**という。

与えられたデータ：k　**行使価格**

当籤くじを価格kで**プット**（売却）し相応する当籤金を支払う。

上の権利を放棄しても良い。

Report.（1）くじ・プットオプション市場においてプットオプションの行使価格をk（$s_1 < k \le s_2$）とするときx_1，x_2が無裁定価格であるための必要十分条件を求めよ。**必須**

（2）さいころ・コールオプション・プットオプション市場においてコールオプションの行使価格を$9/2$，プットオプションの行使価格を$5/2$とするときx_1，x_2，x_3が無裁定価格であるための必要十分条件を求めよ。**任意**