

# プロクシベースト・スライディングモード制御の安全性と速応性

菊植 亮, 藤本 英雄 (名古屋工業大学)

## Safety and Responsiveness of Proxy-Based Sliding Mode Control

\*Ryo Kikuuwe and Hideo Fujimoto (Nagoya Institute of Technology)

**Abstract**— Proxy-Based Sliding Mode (PSM) Control, which we previously proposed, is as accurate as conventional PID position control during normal operation, but is safer than PID control because it is capable of slow, overdamped recovery from large positional errors. This paper presents an analysis to explain the advantage of PSM control. The analysis reveals that the system under PSM control is decomposed into two subsystems, fast and slow. The fast subsystem is capable of responsive suppression of unmodeled system dynamics, while the slower subsystem cannot be affected by any disturbance as long as the actuator force is below the saturation level.

**Key Words:** Sliding mode control, Slow subsystem, Position control

### 1. はじめに

一般に産業用ロボットは、関節摩擦などのモデル化しにくい機械要素を多く含む。このため、力制御やインピーダンス制御を行う際にも、高ゲインのPID制御方式の位置制御器を最下層の帰還ループとして用いることが多い。しかし高ゲインのPID位置制御は安全性に問題があり、実測位置と目標位置との間の偏差が大きくなった場合、過大な速度やオーバーシュートを発生することがある。このような状況は、環境との接触や、アクチュエータの一時的なパワー低下、あるいは誤った目標位置の指令などによって発生する。

大きな位置誤差を回復する際の危険な動作を防ぐためには、オーバーシュートを起こさずに目標軌道へ緩やかに収束するような、遅い応答特性を持った制御則が必要である。通常、このような制御則は速応性が低く、正常動作時の追従性能の劣化を招く。したがって、正常動作時の正確な追従性能と異常時の安全性は、単純なPID制御のゲイン設計によって両立することが難しい。また、PID制御において収束性を確保するためには、速度帰還のゲインを大きくする方法があるが、これは特に低速運動時に速度信号のノイズを増幅し、高周波振動の原因となる。

この問題を解決するために、著者らは既報において『プロクシベースト・スライディングモード制御 (PSM 制御)』という新しい制御則を提案した [1]。この制御即ちPID制御の単純な拡張でもあり、スライディングモード制御の離散時間近似でもある。ただし既報においては、既存の手法との差別化について一部明確でない部分もあった。

本稿では、PSM制御の特性をより詳しく調べ、その利点を明らかにする。以下、第2節において、従来型のPID制御で制御される1自由度システムについて、離散時間の状態方程式表現を導びき、そこからPID制御の問題点を明らかにする。次に第3節においては、PSM制御で制御される1次元システムについての離散時間状態方程式表現を導びき、その利点を明らかにする。最後に第4節でまとめを述べる。

### 2. PID制御の問題点

まず、PID制御で制御されるシステムについて考察する。簡単のため、1自由度の制御系を考える。制御対象は質量  $M$  の質点であるとし、アクチュエータの発生力  $f(k)$  とそれ以外のモデル化できない力  $h(k)$  がその質点に働くものとする。ここで、カッコ内の  $k$  は離散時間のインデックスである。制御対象の位置を  $p(k)$ 、目標位置を  $p_d(k)$  とする。このとき、このシステムは下記の式に基づいて発展する。

$$M(p(k+1) - 2p(k) + p(k-1)) / T^2 = f(k) + h(k). \quad (1)$$

ここで  $T$  はステップ時間である。アクチュエータの発生力  $f(k)$  がPID制御に基づいて決定されるとすると、式 (1) は下記のようになる。

$$\begin{aligned} M \nabla^2 p(k+1) / T^2 &= K(p_d(k) - p(k)) \\ &+ B(\nabla p_d(k) - \nabla p(k)) / T + La(k) + h(k) \quad (2) \\ a(k) &= a(k-1) + T(p_d(k) - p(k)) \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $K$ 、 $L$ 、および  $B$  はそれぞれPID制御器の比例、積分、および微分ゲインである。また、 $\nabla$  は後退差分演算子であり、 $\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$  と表される。

ここで、新たな変数  $\tilde{p}(k-1)$  を

$$\tilde{p}(k-1) = p(k-1) + BTp_d(k-1) / (M - BT) \quad (4)$$

と定義すると、式 (2) から  $p(k-1)$  と  $p_d(k-1)$  を消去することができる。これにより式 (2) は

$$\begin{aligned} Mp(k+1) &= (2M - CT)p(k) + (BT - M)\tilde{p}(k-1) \\ &+ LT^2a(k-1) + TCp_d(k) + T^2h(k) \quad (5) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$C = B + KT + LT^2$$

である。したがって、状態ベクトルを

$$\mathbf{x}_{\text{pid}}(k) = [p(k), \tilde{p}(k-1), a(k-1)]^T \quad (6)$$

と定義すると、このシステムの状態方程式表現は下記のようになる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\text{pid}}\mathbf{x}_{\text{pid}}(k) + \mathbf{B}_{\text{pid}}p_d(k) + \mathbf{D}_{\text{pid}}h(k) \quad (7a)$$

$$p(k) = \mathbf{C}_{\text{pid}}\mathbf{x}_{\text{pid}}(k) \quad (7b)$$

$$\mathbf{A}_{\text{pid}} = \begin{bmatrix} 2 - CT/M & BT/M - 1 & LT^2/M \\ 1 & 0 & 0 \\ -T & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\text{pid}} = [CT/M, BT/(M - BT), T]^T,$$

$$\mathbf{D}_{\text{pid}} = [T^2/M, 0, 0]^T,$$

$$\mathbf{C}_{\text{pid}} = [1, 0, 0]$$

簡単な考察により、このシステムは少なくとも2つのサブシステムに分解できることが分かる。まず、行列  $\mathbf{A}_{\text{pid}}$  は少なくとも1つの実数の固有値をもつので、それを  $A_{p1}$  とすると、

$$\mathbf{V}\mathbf{A}_{\text{pid}}\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p2} & \mathbf{o}_2 \\ \mathbf{o}_2^T & A_{p1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

を満たす正則行列  $\mathbf{V} (\in \mathcal{R}^{3 \times 3})$  が存在する(ここで、 $\mathbf{A}_{FF} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  であり、 $\mathbf{o}_2$  は2次元の零ベクトルを表す)。すると、式(7)は下記のように書き直すことができる。

$$\mathbf{x}_{p2}(k+1) = \mathbf{A}_{p2}\mathbf{x}_{p2}(k) + \mathbf{B}_{p2}p_d(k) + \mathbf{D}_{p2}h(k) \quad (9a)$$

$$\mathbf{x}_{p1}(k+1) = A_{p1}\mathbf{x}_{p1}(k) + B_{p1}p_d(k) + D_{p1}h(k) \quad (9b)$$

$$p(k) = \mathbf{C}_{p2}\mathbf{x}_{p2}(k) + C_{p1}\mathbf{x}_{p1}(k) \quad (9c)$$

ここで、

$$\mathbf{V}\mathbf{x}_{\text{pid}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{p2}(k) \\ \mathbf{x}_{p1}(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}\mathbf{B}_{\text{pid}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{p2} \\ B_{p1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}\mathbf{D}_{\text{pid}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{p2} \\ D_{p1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{pid}}\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{p2} & C_{p1} \end{bmatrix}$$

である(ここで各行列と各ベクトルは、それぞれ適切な次元を持つとする)。このシステムのブロック線図を Fig. 1 に示す。

ゲイン(パラメータ  $K, L$ , および  $B$ )の適切な設定によって、 $A_{p1}$  を十分に1に近い1未満の値に設定すると、1次のサブシステムの応答は十分に遅くなる。これによって大きい位置誤差からの復帰動作が遅くなるので、安全性は向上するといえる。しかし、 $D_{p1}$  は必ず非零であるので、この1次のサブシステムは外乱  $h$  の影響を受けることになる。このサブシステムの応答を遅く設定すると、通常動作時の外乱に対する応答も遅くなり、外乱の影響が長時間残留することになる。その結果として、追従動作の正確さは劣化することになる。

### 3. プロクシベースト・スライディングモード制御の利点

#### 3.1 PSM 制御の制御則

PSM 制御は、Fig. 2 のように計算器内に、「プロクシ」と呼ばれるに質量の無い点状の仮想物体を想定し、

そのプロクシに対して仮想的にスライディングモード制御を行う制御手法である。ここで、プロクシと実際の制御対象とは、仮想的なPID制御器で結合されている。すなわちPSM制御とは、仮想的なPID制御器と仮想的なスライディングモード制御器を直列結合した制御則であるといえる。2つの制御則の演算はそれぞれが独立して行われているわけではなく、双方の出力が平衡するように陰的に(implicitに)行われる。

以下、PSM制御の概要を説明する。前節と同様に、1自由度の制御系を考える。プロクシの位置を  $q(k)$  とし、変数  $a(k)$  を

$$q(k) = p(k) + (a(k) - a(k-1))/T \quad (10)$$

と定義する。制御対象とプロクシを接続するPID制御器の出力はアクチュエータの出力  $f(k)$  に等しく、

$$f(k) = La(k) + K\nabla a(k)/T + B\nabla^2 a(k)/T^2 \quad (11)$$

を満たす。一方、プロクシに対して接続されたスライディングモード制御器の出力も  $f(k)$  に等しく、これは

$$f(k) = F\text{sgn}\left(p_d(k) - q(k) + H\frac{\nabla p_d(k) - \nabla q(k)}{T}\right) \quad (12)$$

を満たす。ここで、 $F$  および  $H$  は正の定数であり、 $\text{sgn}(x) = x/|x|$  である。

式(12)で表されるスライディングモード制御の制御則は、プロクシの位置  $q(k)$  と速度  $q(k)/T$  が

$$q(k) + H\nabla q(k)/T = s_d(k) \quad (13)$$

という等式を満たすように、プロクシの状態を拘束する役割を持つ。ただしここで、

$$s_d(k) = p_d(k) + H\nabla p_d(k)/T \quad (14)$$

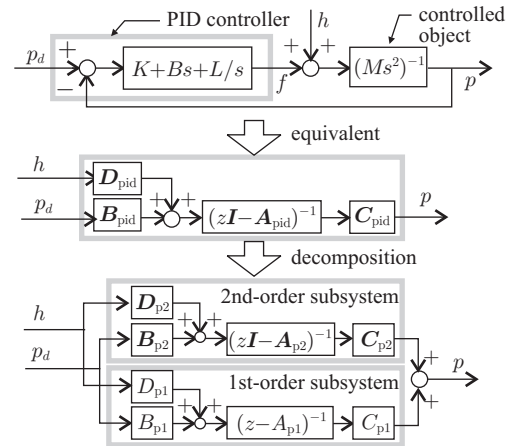


Fig.1 1-DOF system under PID control.

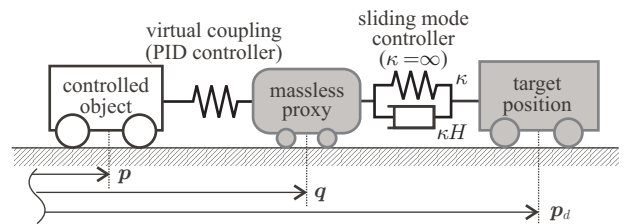


Fig.2 Physical interpretation of PSM control.

である。式 (13) が満たされるととき、プロクシの位置  $q(k)$  は  $k \rightarrow \infty$  において、目標位置  $p_d(k)$  に指数関数的に収束する。定数  $H$  はこの収束過程の時定数を表し、 $H$  が大きくなると収束は遅くなる。大きい位置誤差からの安全な復帰のためには、 $H$  をある程度大きい値（たとえば  $0.1[\text{sec}]$  以上）にすることが望ましい。なお、定数  $F$  はアクチュエータの発生力の大きさの上限値を表す。

式 (11) と式 (12) は、 $f(k)$  と  $a(k)$  が満たすべき代数拘束を表す。この代数拘束は解析的に解くことが可能であり、その演算手法は下記ようになる。

$$\sigma(k) := s_d(k) - (p(k) + H\nabla p(k)/T) \quad (15a)$$

$$f^*(k) := \frac{B + KT + LT^2}{H + T} \sigma(k) + \frac{KH - B + LT(2H + T)}{(H + T)T} a(k - 1) - \frac{KH - B + LHT}{(H + T)T} a(k - 2) \quad (15b)$$

$$f(k) := \begin{cases} f^*(k) & \text{if } |f^*(k)| \leq F \\ F \text{sgn}(f^*(k)) & \text{if } |f^*(k)| > F \end{cases} \quad (15c)$$

$$a(k) := \frac{(2B + KT)a(k - 1) - Ba(k - 2)}{B + KT + LT^2} + \frac{T^2}{B + KT + LT^2} f(k) \quad (15d)$$

この計算手法が PSM 制御の制御側である。この計算手法を計算機に実装し、得られた  $f(k)$  をアクチュエータから出力する。

なお、式 (15c) において  $|f^*(k)| \leq F$  が満たされるととき、プロクシの位置  $q(k)$  と速度  $\nabla q(k)/T$  は式 (13) を満たす。この状態をスライディングモードと呼ぶ。反対に  $|f^*(k)| > F$  である状態（すなわち式 (13) が満たされない状態）をリーチングモードと呼ぶ。

### 3.2 状態方程式表現

式 (1) の運動方程式に従う質量  $M$  の質点が、式 (15) の制御則で制御されているシステムを考える。ここで状態ベクトル  $\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) (\in \mathcal{R}^4)$  を

$$\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) = [p(k), p(k - 1), a(k - 1), a(k - 2)]^T \quad (16)$$

とすると、運動方程式 (1) と制御則 (15) から、このシステムの状態方程式を下記のように導くことができる。

$$\mathbf{x}_{\text{psm}}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) + \mathbf{B}f(k) + \mathbf{D}h(k) \quad (17a)$$

$$p(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) \quad (17b)$$

$$f^*(k) = \mathbf{G}\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) + \Psi s_d(k) \quad (17c)$$

$$f(k) = \alpha(k)f^*(k) \quad (17d)$$

$$\alpha(k) = \min(1, F/|f^*(k)|) \quad (17e)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2B+KT}{C} & -\frac{B}{C} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left[ \frac{T^2}{M}, 0, \frac{T^2}{C}, 0 \right]^T, \quad \mathbf{D} = \left[ \frac{T^2}{M}, 0, 0, 0 \right]^T, \\ \mathbf{C} = [1, 0, 0, 0], \quad \mathbf{G} = [0, 0, G_3, G_4], \\ \Psi = C/(H + T), \\ G_3 = (KH - B + LT(2H + T))/T/(H + T) \\ G_4 = -(KH - B + LHT)/T/(H + T)$$

式 (17d) を式 (17a) に代入すると、このシステムの状態方程式は下記ようになる。

$$\mathbf{x}_{\text{psm}}(k + 1) = (\mathbf{A} + \alpha(k)\mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) + \Psi\alpha(k)\mathbf{B}s_d(k) + \mathbf{D}h(k) \quad (18a)$$

$$p(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (18b)$$

このシステムは  $\alpha(k) = 1$  のときスライディングモードにあり、 $0 < \alpha(k) < 1$  のときリーチングモードにある。

### 3.3 サブシステムへの分解

特に  $\alpha(k) = 1$  のとき、式 (18) のシステムも、適切な変数変換によって少なくとも 2 つのサブシステムに分解できる。このことを以下に示す。まず、下記の変換行列  $\mathbf{U}$  を定義する。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{H}{T} & -\frac{H}{T} & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & H & U_{33} & -\frac{H}{T} \\ 0 & 1 & \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \\ U_{21} = -HM/(T(BT - M)) \\ U_{22} = (H - T)M/(T(BT - M)) \\ U_{23} = (KH - B + LHT)/(BT - M) \\ U_{24} = -(KH - B)/(BT - M) \\ U_{33} = 1 + \frac{H}{T} + \frac{(H + T)(KH - B - LH^2)}{M}$$

この行列  $\mathbf{U}$  を用いて変数変換を行うと、

$$\mathbf{U}\mathbf{x}_{\text{psm}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{m3}(k) \\ q(k - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{m3}(k) = \begin{bmatrix} s(k) \\ \tilde{s}(k - 1) \\ \eta(k - 1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる。なおここで、 $q(k - 1)$  は前節で定義したように、時刻  $(k - 1)T$  におけるプロクシの位置を表す。また、 $\mathbf{U}$  の定義より、

$$s(k) = p(k) + H\nabla p(k)/T \quad (20)$$

が成り立つ。

この変換行列  $\mathbf{U}$  によって、状態方程式 (18) 内の行

列は、下記のように変換できる．

$$U(A + BG)U^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\text{pid}} & \mathbf{o}_3 \\ \mathbf{o}_3^T & A_{m1} \end{bmatrix},$$

$$\Psi UB = \begin{bmatrix} B_{\text{pid}} \\ B_{m1} \end{bmatrix}, \quad UD = \begin{bmatrix} D_{m3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$UBG = \begin{bmatrix} F_{m33} & F_{m31} \\ F_{m13} & F_{m11} \end{bmatrix}, \quad CU^{-1} = \begin{bmatrix} C_{m3} & C_{m1} \end{bmatrix},$$

$$D_{m3} = \begin{bmatrix} T(H + T)/M \\ -HT/(BT - M) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{m1} = H/(H + T), \quad B_{m1} = T/(H + T)$$

$$C_{m1} = \frac{H(KH - B - LH^2)}{M + (H + T)(KH - B - LH^2)}$$

したがってこの変数変換によって、式 (18) のシステムは下記のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m3}(k + 1) = & A_{\text{pid}}\mathbf{x}_{m3}(k) + B_{\text{pid}}s_d(k) + D_{m3}h(k) \\ & - (1 - \alpha(k))(F_{m33}\mathbf{x}_{m3}(k) \\ & + F_{m31}q(k - 1) + B_{\text{pid}}s_d(k)) \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} q(k) = & A_{m1}q(k - 1) + B_{m1}s_d(k) \\ & - (1 - \alpha(k))(F_{m13}\mathbf{x}_{m3}(k) \\ & + F_{m11}q(k - 1) + B_{m1}s_d(k)) \end{aligned} \quad (21b)$$

$$p(k) = C_{m3}\mathbf{x}_{m3}(k + 1) + C_{m1}q(k - 1) \quad (21c)$$

このシステムのブロック線図を Fig. 3 に示す．

$\alpha(k) = 1$  のとき、式 (21a) と式 (21b) は 2 つの独立したサブシステムとして振舞うことが読み取れる．式 (21a) のサブシステムは第 2 節で導いた PID 位置制御系と同じ構造を持つ 3 次のシステムである．これに対し、式 (21b) のサブシステムは、プロクシの位置  $q(k - 1)$  を状態変数とする 1 次のシステムである．

式 (21b) のサブシステムは、パラメータ  $H$  を大きく設定すると遅い応答特性を示す．また式 (21b) より、このサブシステムは外乱  $h$  の影響を受けない、不可撓乱 (undisturbable) なシステムであるということが読み

取れる．PID 制御によってもシステムは 2 つのサブシステムに分解できるが、2 つのサブシステムがともに外乱の影響を受けるということは前節で示した．一方 PSM 制御では、誤差の影響が長時間残りやすい遅いサブシステムが外乱の影響を受けない構造になっているという点が特徴的である．すなわち PSM 制御は、安全性に必要な遅い応答のサブシステムを、外乱の影響を受けない形で包含することができる．

一方で、式 (21a) のサブシステムの動特性はパラメータ  $H$  に依存せず、PID ゲイン  $K, L$ 、および  $B$  のみによって決定される．したがって、式 (21a) のサブシステムの応答特性を速く設定することによって、このシステム全体は外乱の影響を受けにくくなることが分かる．速いサブシステムと遅いサブシステムを独立して設計することができ、かつ、遅いシステムが外乱の影響を受けないという点が、PSM 制御の利点であると言える．

なお、 $K - B/H - LH = 0$  または  $H = 0$  が満たされるとき、 $C_{m1} = 0$  となる．このとき遅いサブシステムが不可観測になり、遅いサブシステムの状態が出力  $p(k)$  に影響しなくなる．すなわちこの条件が満たされるとき、少なくともスライディングモードにおいては PSM 制御は PID 制御と等価になり、PSM 制御の不可撓乱であるという特性は失われる．

#### 4. おわりに

本稿では、著者らが既報で提案したプロクシベースト・スライディングモード制御 (PSM 制御) の性質をより深く調べた．PSM 制御で制御されるシステムは少なくとも 2 つのサブシステムに分解することができ、その一方は外乱の影響を受けない 1 次のサブシステム、もう一方は PID 制御系と等価である 3 次のサブシステムである．

それぞれのサブシステムの動特性は独立して設計することができ、1 次のサブシステムには遅い動特性、3 次のサブシステムには速い動特性を持たせることが望ましい．アクチュエータの発生力  $f(k)$  の大きさが上限値  $F$  を下回っている限り、1 次のサブシステムは外乱の影響を受けないので、その遅い動特性は追従性能に影響しない．この間、外乱  $h(k)$  の影響は応答の速い 3 次のサブシステムによって抑制されることになる．一方、異常の発生によって  $f(k)$  の大きさが上限値  $F$  に到達すると、システムはスライディングモードから離脱して大きな位置誤差が発生する．その後、再度スライディングモードに入ったとき後の動作は応答の遅い 1 次のサブシステムの応答が支配的になる．このようにして通常動作時の正確な追従性能と異常動作時の安全性を両立できるという点が、PSM 制御の利点である．

#### 参考文献

- [1] R. Kikuuwe and H. Fujimoto. Proxy-based sliding mode control for accurate and safe position control. In *Proc. of the 2006 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 26–31, 2006.

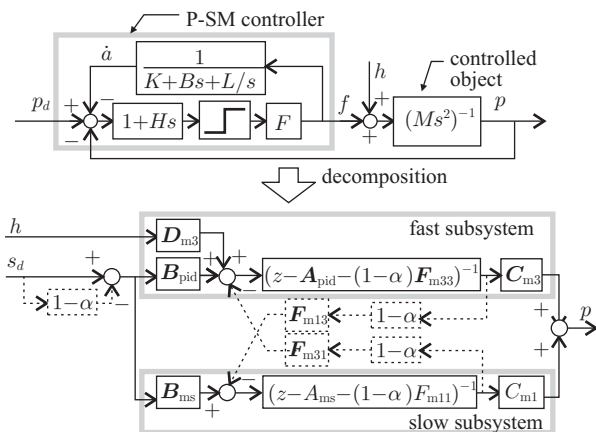


Fig.3 1-DOF system under PSM control.