1. 電磁気学における単位系

電磁気学における単位系

§0 はじめに

電磁気学の学習の中で意外に高い障壁が単位系の理解である。単位は，物理量の大きさを共通の“言葉”で伝達し合うために人間が考案したものであるが，電磁気現象の記述において多くの単位(系)が存在するために混乱が生じやすく，現象の定式化よりも単位系という人為的な約束ごとの理解に時間とエネルギーを費やさざるをえない事態に陥ることがある[1]。地球上には多くの言語が存在するが，英語を“共通語”と認識することで(一応)混乱が避けられている。電磁気学にも MKSA 単位系という“標準語”が存在するが[2]，分野によってはいまだに“昔の標準語”である別の単位系が使われることがある(新刊書であっても非 SI の単位系が使われている場合もある)[3]。名著や古典と呼ばれる由緒ある成書をひもといて基本事項を学習しようとしても，古い書物の多くは MKSA 単位系以外の単位系で書かれているために，難解さが増すことさえある[4]。とはいえ，単位系を正しく理解しなければ，理論式に数値を代入して計算をすることも，ある単位系で書かれた式を別の単位系の式に変換することもできない。本書は，電磁気学に関する単位系の混乱を解消し，異なる単位系の間を自由に行き来するための“ワザ”の習得をめざして書かれた monograph である。

§1 単位系の種類

電磁気量を記述する単位系を考える際の基本は，電気系と磁気系の物理量およびそれらの相互作用(力)を表す法則式である。電荷(電気量)間にはたらく力を表す Coulomb(クーロン)の法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\alpha}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

磁荷(磁気量)間にはたらく力を表す Coulomb の法則[5]

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\beta}\frac{q_{\mathrm{m}1} q_{\mathrm{m}2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2}$$

電流と磁場の相互作用を表す Ampère(アンペール)の力

---

1 筆者は大学教養時代にこの状況に陥った。同じ現象を表す式の形が成書ごとに異なっていると，論理展開よりも単位系を理解することの方が先決問題になってしまうことがある。

2 英語が最も合理的で使いやすい言語とは限らないのと同様に，MKSA 単位系が電磁気学の単位系の中で最も合理的で使いやすいとはいえない。

3 理論物理学系の分野(量子力学など)では，現在でも Gauss 単位系が用いられていることが多い。

4 時代が遡るほど，MKSA 単位系で記述されている確率は低くなる。

5 あとで述べるように，磁気の本質は磁荷ではなく電流であり，単極の磁荷は仮想的なものでしかないが，単位系を考える上では，磁荷を想定しても問題は生じない。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\gamma} I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{3}$$

が電磁気学において重要な力の式である[1]。ここで，$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ は力，r は電荷間や磁荷間の距離，$\boldsymbol{e}_r$ は r に沿う単位ベクトル(= $\boldsymbol{r}/r$)，q は電荷，q_m は磁荷，I は電流，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は電流に沿う素片のベクトル($I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ が電流素片ベクトル), $\boldsymbol{B}$ は磁束密度であり, α, β, γ(の逆数)は比例定数である。ここで，電気系には誘電率(permittivity)ε，磁気系には透磁率(permeability)μと呼ばれる物理量を設定し[2]，α, βをそれぞれ

$$\alpha = k\varepsilon \tag{4}$$

$$\beta = k\mu \tag{5}$$

と書くと，Maxwell(マクスウェル)の方程式は次の4式で表されることになる[3]。

Gauss の法則(電気) $$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{k}\rho \tag{6}$$

Faraday の法則 $$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{7}$$

Gauss の法則(磁気) $$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{8}$$

Ampère の法則 $$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{\gamma k}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$ は電気変位[4](electric displacement)，ρは電荷密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ[5]，$\boldsymbol{j}$ は電流密度[6]である。なお，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{10}$$

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の間には

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{11}$$

の関係がある。真空を想定すると(電荷や電流が存在しない状態 : ρ = 0, $\boldsymbol{j}$ = $\boldsymbol{0}$)，ε = ε_0, μ = μ_0

---

1 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は(電荷)(時間)$^{-1}$(長さ) = (電荷)(速度) の次元をもつから, 速度が $\boldsymbol{v}$ の点電荷 q であれば, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ となり, Lorentz(ローレンツ)力を表している。

2 現段階ではその単位(次元)も大きさも未定である。誘電率も透磁率も物質に依存する。

3 Maxwell の方程式の導出は電磁気学のテキストを参照のこと。(Maxwell の方程式が解説されていない電磁気学のテキストを見つけるのは難しい。)

4 Maxwell の時代から電気変位と呼ばれていたが，一時期，「電束密度」(electric flux density)が主流になり，最近，再び電気変位が使われるようになった。Green Book(文献 5)は日本語訳として「電気変位」のみを掲載している。また，物理的な意味からも電気変位の方が適切である。

5 IUPAC による $\boldsymbol{H}$ の正式名称は「磁場」ではなく「磁場の強さ」である。また，IUPAC は $\boldsymbol{B}$ を「磁束密度」と呼び，磁場と呼ぶべきでないと述べているが(後述)，本書では，混乱が生じない限り，$\boldsymbol{H}$ も $\boldsymbol{B}$ も磁場と呼ぶ。

6 単位時間あたり単位面積を通過する電気量(電荷量)である。言い換えると，電荷の流束(flux)である。

とおけるから(ε_0，μ_0はそれぞれ真空の誘電率と真空の透磁率[1])，式(6)～(9)に対応するMaxwellの方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{12}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{15}$$

の形となる。

式(13)の両辺のrot($\equiv \nabla \times$)をとると[2]，

$$(\text{左辺}) \to \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{16}$$

$$(\text{右辺}) \to \nabla \times \left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\gamma}\left(\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{17}$$

となる。式(16)は，ベクトルの代数公式を使って，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{18}$$

と変形できるが，式(12)により右辺第1項が消えて，

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{19}$$

の形になる。一方，式(17)の$\nabla \times \boldsymbol{B}$に式(15)を代入すると，

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{20}$$

となり，式(19)と式(20)が等しいことから，

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{21}$$

が成立する。これは波動を表す方程式であり，$\boldsymbol{E}$が速さ

$$v = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{22}$$

[1] 真空「の」誘電率，真空「の」透磁率というように「の」を入れるのが正式な用語名である。

[2] rotは「回転」に由来しておりcurlとも記す。$\nabla \times \boldsymbol{A}$ = rot $\boldsymbol{A}$ = curl $\boldsymbol{A}$ である。

で進行する波動であることを示している(たとえば，波長λ, 速さ v で伝搬する波の式 $e^{2\pi i(x-vt)/\lambda}$ が式(21)を満足することは容易に確認することができる)。

一方，式(15)の両辺の rot をとると，左辺からは,

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{23}$$

が得られ(式(14)を適用)，式(15)の右辺からは,

$$\nabla \times \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{24}$$

が得られるから(式(13)を適用),

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{25}$$

が成立する。この式は式(21)とまったく同型であるから，磁場も電場と同じ速さ$\gamma\big/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$で伝搬する波として存在することがわかる。速さ v は真空中の光速$2.997\ 924\ 58 \times 10^8$ $\mathrm{m\ s^{-1}}$に対応しており[1]，以後，この光速を c_0で表す[2]。以上より，

$$\boxed{c_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \tag{26}$$

が常に成立する。式(13)および(15)からわかるように，定数γは電気的な現象と磁気的な現象をつなぐ役割を果たしており，その意味で「連結因子」と呼ばれる[3]。式(26)の関係は単位系にかかわらず常に成立しなければならないから, 3つの定数α, β, γのうち独立に与えうるもの(独立量)は2つだけである。したがって，定数α, β, γのとり方(言い換えると，ε_0, μ_0, γ, k の与え方)にもとづいて，いくつかの単位系が構成される。

[1] ε_0, μ_0, γのとり方 → 独立量の相違
[2] k のとり方 → 定数値の相違
[3] 単位のとり方 → 基本単位の相違

[1]は非常に重要であり，電気量にかかわるもの(たとえばε_0)を定義してからその他の定数を決める(静電単位系; **E**lectro**s**tatic system of **u**nits＝esu 単位系), 磁気量にかかわるもの(たとえばμ_0)を定義してから他の定数を決める(電磁単位系; **E**lectro**m**agnetic system of **u**nits＝emu 単位系)，ε_0とμ_0両方に定義を与える(Gauss 系)などの単位系があり，それぞれの単位系ごとに物理量の単位(次元)だけでなく理論式の(見かけの)形も変わる。

---

[1] この数値は測定値ではなく，不確かさのない定義値(exact)である。
[2] したがって，本書ではc_0 = $2.997\ 924\ 58 \times 10^8$ $\mathrm{m\ s^{-1}}$ = $2.997\ 924\ 58 \times 10^{10}$ $\mathrm{cm\ s^{-1}}$ である。
[3] 対称化定数と呼んでいる成書もある。

[2]に関して，$k = 4\pi$とする場合を有理系といい，$k = 1$とする場合を非有理系という[1]。これらは，理論式の見かけの形にかかわる問題であり本質的な点ではないが，いくつかの成書に書かれた式同士を比較したり，式に数値を代入して計算したりするときには，どちらの系で書かれたものかを把握しておかなければ正しい値を得ることができない。有理系では，Coulomb の法則や Biot-Savart(ビオ･サバール)の法則に4πが現れて複雑に見えるが, 逆に, Maxwell 方程式に4πが現れなくなるため見かけがきれいになる。非有理系はこの逆で，Coulomb の法則は見かけがすっきりするが，Maxwell 方程式の随所に4πが現れる。

[3]は，物理量の大きさを表す単位を cm, g, s で統一するか，m, kg, s, A(または C)で統一するかという区別である。前者を3元系，後者を4元系と呼ぶ。

以下に，主な単位系の定義と特徴を記す。

1) CGS esu(CGS 静電単位系)

・基本単位は cm, g, s である(3元系)。
・$k = 1$(非有理系)とする。
・真空の誘電率ε_0と連結因子γを独立量にとり，$\varepsilon_0 = 1$および$\gamma = 1$(いずれも無次元)と定義する。したがって，真空の透磁率μ_0は式(26)より，

$$\mu_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.112\,65\cdots\times10^{-21}\ \mathrm{cm^{-2}\,s^2} \tag{27}$$

となる。

2) CGS emu(CGS 電磁単位系)

・基本単位は cm, g, s である(3元系)。
・$k = 1$(非有理系)とする。
・真空の透磁率μ_0と連結因子γを独立量にとり，$\mu_0 = 1$および$\gamma = 1$(いずれも無次元)と定義する。したがって，真空の誘電率ε_0は式(26)より，

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.112\,65\cdots\times10^{-21}\ \mathrm{cm^{-2}\,s^2} \tag{28}$$

となる。

3) Gauss 単位系

・基本単位は cm, g, s である(3元系)。
・$k = 1$(非有理系)とする。
・真空の誘電率ε_0と真空の透磁率μ_0を独立量とし, 両方を1(無次元)と定義する。したがって, 連結因子が$\gamma = c_0 = 2.997\,924\,58\times10^{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$となる。

[1] 4πは全球の立体角に由来している。

4) MKSA 単位系[1]

・基本単位は m, kg, s，A(または C)である(4元系)。

・$k = 4\pi$(有理系)とする。

・真空の透磁率μ_0と連結因子γを独立量にとる。真空の透磁率の値は定義値ではなく，測定によって決まる数値(＝不確かさをもつ数値)であり，2020年8月現在の値は

$$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19)\times 10^{-6}\ \mathrm{N\ A^{-2}} \tag{29-1}$$

$$\approx 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}} = 4\pi\times 10^{-7}\ \mathrm{kg\ m\ C^{-2}} \tag{29-2}$$

である[2]。なお，式(29)-1に記されている(19)は，最後の2桁の不確かさ(標準偏差σの大きさ)を表している[3]。連結因子は$\gamma = 1$(無次元)とするから，式(26)より真空の誘電率は

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = 8.854\ 187\ 8128(13)\times 10^{-12}\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}} \tag{30}$$

となる。ε_0もかつては定義値であったが，2019年5月20日以降，測定により決まる値(＝不確かさをもつ数値)となった。MKSA 単位系は1901年に G. Giorgi が提案し，1954年の第10回国際度量衡総会の決議により国際単位系(SI)として採択された。

以下では，各単位系を，CGS esu 系，CGS emu 系，Gauss 系，MKSA 系と呼ぶ。これらの代表的4単位系の設定をまとめたものが表1である。

5) その他の単位系

○Lorentz–Heaviside(ローレンツ–ヘビサイド)単位系

Gauss 系同様に，電気的な量には CGS esu を，磁気的な量には CGS emu を使うが，有理系の単位系である。Heaviside(ヘビサイド)が1882～83年に提案し Lorentz(ローレンツ)が再編成したもので，有理系の元祖といえる単位系である。一時期広く使われたが MKSA 系へと移行した。

---

1 MKSQ 単位系ともいう。

2 物理定数の最新値については，NIST(National Institute of Standards and Technology)の web サイト
https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html
あるいは，NIST が配付している Wall Chart
https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wall_2018.pdf
を参照。

3 2019 年 5 月 20 日に SI 基本単位の定義が変更され，基礎物理定数の再定義により μ_0 は測定値となった(詳細は付録 1 を参照)。再定義より前は，μ_0 に $4\pi\times 10^{-7}$ N A^{-2} という不確かさのない定義値が与えられていた。定義値として，とても思い付きようがない値($4\pi\times 10^{-7}$)に設定されていたのは，古くから電気工学分野で使われていた V(ボルト)，A(アンペア)，Ω(オーム)，W(ワット)などの単位をもつ数値の大きさを変えなくてもよいように単位系を構築したからであり，結果的に，基本量である透磁率や誘電率に根拠不明の数値を与えざるをえなかったという経緯である。(値を自由に決めていいといわれて $4\pi\times 10^{-7}$ という数値を思い付く人は，まず，いないであろう。) 5 月 20 日という日はメートル条約が 1875 年 5 月 20 日に締結されたことにちなんでいる。また，毎年 5 月 20 日は「世界計量記念日」である。

表 1．代表的な 4 単位系の設定

単位系	基本単位	独立量	k	ε_0	μ_0	γ
CGS esu	cm, g, s	ε_0, γ	1	1	$1/c_0^2$	1
CGS emu	cm, g, s	μ_0, γ	1	$1/c_0^2$	1	1
Gauss	cm, g, s	ε_0, μ_0	1	1	1	c_0
MKSA	m, kg, s, A	μ_0, γ	4π	$1/(\mu_0 c_0^2)$	$\approx 4\pi\times10^{-7}$	1

・c_0 は真空中の光速であり，その大きさは各単位系の基本単位を用いて表す。したがって，MKSA 系では $c_0 = 2.997\,924\,58\times10^8$ m s^{-1} であり，それ以外の単位系については $c_0 = 2.997\,924\,58\times10^{10}$ cm s^{-1} である。

○一般化 CGS 静電単位系(一般化 CGS esu)

CGS esu を4元系にしたもの。cm, g, s, Fr(フランクリン)を基本単位とする(Fr は同単位系の電荷の単位の名称)。CGS esu 系から MKSA 系へ移行する過渡的措置として，国際記号単位述語委員会(SUN 委員会)が採択したもの。

○一般化 CGS 電磁単位系(一般化 CGS emu)

CGS emu 系を4元系にしたもの。cm, g, s, Bi(ビオ)を基本単位とする(Bi は同単位系の電流の単位の名称)。

○MKSP 単位系

文献1で紹介されている単位系。MKSP の P は Physical を意味する。有理3元系(MKS)であり，$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\gamma = c_0$とする。したがって，Gauss 単位系の MKS 版ということもできる。電気系と磁気系に対する Gauss 系の対称性のよさを活かしつつ，非有理系という Gauss 系の欠点[1]を解消するために考案されたが広く普及はしていない。

§2 電場と磁場の対応($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応)

電磁気学の単位に関する重要な点として，電気的な量と磁気的な量の対応の問題がある。電気量である電荷に対応するものとして，磁気量として“磁荷”を考え，磁荷に対する Coulomb の法則を基本とする立場が「$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応」と呼ばれるものである。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応は<u>磁石が作る磁場</u>を出発点とする立場である。しかし，電荷と違って，これまでに単独の

[1] 文献 1 に述べられているように，非有理系では 1 次元問題の式中に係数 4πが現れ，球対称問題では逆に 4πが消えるという(イメージとは逆の)違和感が生じる。これは，非有理系では単位電荷から電気力線が 4π本出ているとするのに対して，有理系では単位電荷から電気力線が 1 本出ているとする前提(設定)の違いが原因である。また，同書の著者は，「MKSA 系が純理的にも他に隔絶してすぐれているかに思い込まれると，それは誤りである。」(文献 1, p. 154)「MKSA 系では，非対称の電磁単位系統であるため，電磁波らしくないところに c が現れ(例：ε_0)，かえって Maxwell の方程式のように電磁波と直接関連するところにそれが現れず，積$\varepsilon\mu$の中に埋没してくる。これも MKSA 系の欠点の一つである」(文献 1, p. 155)と述べている。(筆者もその通りであると思う。)

磁荷のみ(つまり単独の N 極あるいは S 極のみ)が取り出されたことはなく，磁荷は存在しないとされている[1]。しかし，理論的な取り扱いにおいて，$q \leftrightarrow q_\mathrm{m}$, $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$, $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ という対応により，電気現象と磁気現象がまったく同じ形式で扱えるというメリットがあるためこの立場($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応)が存在する。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での磁気に関する Coulomb の法則は

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_\mathrm{m1}q_\mathrm{m2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{31}$$

で表され，電荷の Coulomb の法則と同様に，q_m1 と q_m2 という磁荷間に力 $\boldsymbol{F}$ がはたらくことを意味している。電荷の Coulomb の法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{32}$$

から，電荷 q_2 が作る電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{33}$$

で与えられ，力が $\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E}$ で表されるのと同様に，磁荷 q_m2 が作る磁場 $\boldsymbol{H}$ を，

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_\mathrm{m2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{34}$$

と書くことができ，磁荷間にはたらく力を

$$\boldsymbol{F} = q_\mathrm{m1}\boldsymbol{H} \tag{35}$$

と表すことができる。

一方，「$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応」の立場では，磁荷というものを考えず，磁石の基本は(円)電流であるとする。磁気的な力の基本法則は Coulomb の法則ではなく Ampère の力(式(3))

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{36}$$

であり，電流と Biot–Savart の法則で表される磁場(正確には磁束密度)の間の相互作用により力が生じる[2]。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応は，電流が作る磁場を出発点とする立場である[3]。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は μ_0 によって $\boldsymbol{H}$ と結ばれ，真空中では

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} \tag{37}$$

---

1 2016 年に固体中で磁荷(磁気モノポール)の存在を示す研究結果が報告された(文献 7)。

2 Ampère の式は有名な「Fleming(フレミング)の左手の法則」を表したものであり，親指 = $\boldsymbol{F}$，人差し指 = $\boldsymbol{B}$，中指 = $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ という対応になるが，外積を習得していれば(=大学生は)「フレミング」を使う必要はなく，$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角が鈍角になると(指が痛いので)外積で考える方がよい。旧 国鉄吹田教習所(現 関西鉄道学園)の電気工学の講義では「親指 = $\boldsymbol{F}$ = **う**ごき，人差し指 = $\boldsymbol{B}$ = **じ**ば，中指 = $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ = **でん**りゅう」を略して(フレミングの右手法則も左手法則も)「うじでん = 宇治電」(旧 宇治川電気，現在の山陽電気鉄道)と呼んでいたというエピソードがある。

3 もちろん，磁石が作る磁場も電流が作る磁場も本質は同じである。

の関係がある。式(36)を $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での $\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}1}\boldsymbol{H}$ (式(35))に対応する式と見なすことができるから，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では，電流素片 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ を(一種の)磁荷，$\boldsymbol{B}$ を磁場と考えていることになる[1]。しかし，式(36), (37)より，$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H}$ の形にし，この $\boldsymbol{H}$ が作用して力 $\boldsymbol{F}$ がはたらく対象として磁荷に相当するものを考えてしまうと，磁場を($\boldsymbol{B}$ ではなく)$\boldsymbol{H}$ とする $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と同じ立場になってしまうので，あくまで $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場で磁気の Coulomb の法則を表す必要がある。そこで，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応で書かれた磁気の Coulomb の法則(たとえば式(35))

$$\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \tag{38}$$

の形に合わせて，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応での磁気の Coulomb の法則の式を，

$$\boldsymbol{F} = \xi\boldsymbol{B} \tag{39}$$

の形に書き，新しい“磁荷” ξ を形式的に導入すると，真空中では $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ であるから，

$$\boldsymbol{F} = \mu_0\xi\boldsymbol{H} \tag{40}$$

となり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応での磁荷 ξ は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応(式(38))の磁荷 q_{m} と(μ_0の分だけ)次元も値も異なるものになる。つまり，

$$\xi = \frac{q_{\mathrm{m}}}{\mu_0} \tag{41}$$

であり，ξ の単位は A m，q_{m} の単位は N A^{-1} m (= Wb; ウェーバ[2])となる。同じ磁荷であるにもかかわらず単位も大きさも異なるのは，そもそも磁荷というものを考えない $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場において，あえて磁荷というものを考えた結果である。逆に見れば，磁荷という物理量に違いを設けたことによって，<u>$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, μ_0</u>それぞれ<u>が同じ次元と値をもつ</u>ことができるのである[3]。

仮想的な磁荷とは別に，測定される物理量の中にも $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応とで定義が変わるものがあるので注意する必要がある。その典型例は磁化[4]である。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での磁化 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$ (添字の $_{\mathrm{H}}$ は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応を意味する)は次式の形で導入される(k は表1を参照)[1]。

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{H} + \frac{4\pi}{k}\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ \text{対応}) \tag{42}$$

これは，電気(静電)系の関係式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{k}\boldsymbol{P} \tag{43}$$

---

1 $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では $\boldsymbol{B}$ を単に磁場と呼ぶことがあるが，正しくは，$\boldsymbol{H}$ を「磁場の強さ」，$\boldsymbol{B}$ を「磁束密度」と呼ぶべきである。文献 5 は，$\boldsymbol{B}$ について，「この量を磁場と呼ぶべきではない」(p. 19)と警告しているが，同書 p. 170 には磁束密度の別名として磁場が記されている。

2 名称はドイツの物理学者 W. H. Weber(ウェーバー)に由来するが，単位名としては「ウェーバ」と書く。Wb(ウェーバ)は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁荷の単位名称であるが，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応では磁束の単位名称である。

3 電場や磁場が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応とで異なる値をもつことになると大混乱を招くであろう。

4 磁化は単位体積あたりの磁気双極子モーメントであり，単位は(磁気双極子モーメント)/(体積)である。

($\boldsymbol{D}$：電気変位，$\boldsymbol{E}$：電場，$\boldsymbol{P}$：誘電分極[2])における誘電分極 $\boldsymbol{P}$ と磁気系の磁化 $\boldsymbol{M}_\mathrm{H}$ が対応していることを表している。

一方，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の場合，磁化 $\boldsymbol{M}_\mathrm{B}$ は次式により導入される。

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \frac{4\pi}{k}\mu_0 \boldsymbol{M}_\mathrm{B} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ \text{対応}) \tag{44}$$

式(42)と式(44)の比較から，

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{B} = \frac{\boldsymbol{M}_\mathrm{H}}{\mu_0} \tag{45}$$

という関係が得られ，同じ磁化と呼ばれる物理量でも，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応とで同一ではなく，式(41)の磁荷と同様にμ_0倍の違いが生じることになる(μ_0は1.26×10^{-6} N A^{-2}という数値であるから差は非常に大きい)。このように，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応のいずれの対応で定義されているかを正しく認識した上で式や数値を扱わなければ，桁違いの誤りを引き起こす危険性がある。

媒体の誘電率は電気感受率(electric susceptibility)を用いて表されるが，電気感受率も単位系に依存して異なる値となる。MKSA 系と Gauss 系の誘電率は

$$\varepsilon^\mathrm{M} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}) \qquad (\text{MKSA 系}) \tag{46}$$

$$\varepsilon^\mathrm{G} = 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G} \qquad (\text{Gauss 系}) \tag{47}$$

により表される。$\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}$ と $\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}$ がそれぞれの単位系での電気感受率であり，いずれも無次元数である(添字 $_\mathrm{e}$ は電気的物理量であることを示すために付けられている)。混乱を防ぐために MKSA 系の定数には添字 $^\mathrm{M}$, Gauss 系の定数には添字 $^\mathrm{G}$ を記した。ε^M は N^{-1} C^2 m^{-2} という単位をもつが，ε^G は無次元数である。MKSA 系の式(46)から次式で定義される比誘電率(relative permittivity)[3]

$$\varepsilon_\mathrm{r} \equiv \frac{\varepsilon^\mathrm{M}}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_\mathrm{e}^\mathrm{M} \tag{48}$$

はε^G に等しい。したがって，式(47)と式(48)から $\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}$ と $\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}$ の関係は

$$\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M} = 4\pi\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G} \tag{49}$$

となる。

MKSA 系でも Gauss 系でも $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ (式(10))が成り立つから，それぞれの単位系で

---

[1] $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁化を区別し，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応では「磁化」，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では「磁気分極」と呼ぶ成書もある。

[2] 誘電分極は単位体積あたりの電気双極子モーメントに相当し，単位は(電気双極子モーメント)/(体積)である。

[3] 比誘電率は，古くは dielectric constant と呼ばれていた。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M})\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}\boldsymbol{E} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{D} = (1+4\pi\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} + 4\pi\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}\boldsymbol{E} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{51}$$

が成り立ち，両式と式(43)の比較から，誘電分極 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}\boldsymbol{E} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{P} = \chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}\boldsymbol{E} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{53}$$

と表される[1]。以上の分極関連の式を表2にまとめる。

表2．誘電分極関連の関係式

	MKSA系	Gauss系
電気変位	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$
誘電分極	$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{P} = \chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}\boldsymbol{E}$
誘電率	$\varepsilon^\mathrm{M} = \varepsilon_0(1+\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M})$	$\varepsilon^\mathrm{G} = 1+4\pi\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}$

・単位は ε^M : $\mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}}$； ε^G，$\chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}$，$\chi_\mathrm{e}^\mathrm{G}$: (−)

Green Book(文献5)は電気感受率の単位を無次元数としているので，上記の定義に合致しているが，成書によっては，MKSA 系でも誘電分極を $\boldsymbol{P} = \chi_\mathrm{e}^\mathrm{M}\boldsymbol{E}$ と定義し，電気感受率に誘電率と同じ単位(次元)をもたせる場合があるので注意する必要がある。

式(52)，(53)では誘電分極 $\boldsymbol{P}$ が電場 $\boldsymbol{E}$ に比例する項だけを示したが，レーザ光のような強い光と物質が相互作用し，非線形光学現象過程が生じる場合は，それぞれ，

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0\left(\chi_\mathrm{e}^{\mathrm{M}(1)}\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\chi_\mathrm{e}^{\mathrm{M}(2)}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{6}\chi_\mathrm{e}^{\mathrm{M}(3)}\boldsymbol{E}^3 + \cdots\right) \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{54}$$

および

$$\boldsymbol{P} = \chi_\mathrm{e}^{\mathrm{G}(1)}\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\chi_\mathrm{e}^{\mathrm{G}(2)}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{6}\chi_\mathrm{e}^{\mathrm{G}(3)}\boldsymbol{E}^3 + \cdots \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{55}$$

[1] 一般に，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{E}$ は平行とは限らず，電気感受率はテンソル量となる。

となり，$\boldsymbol{E}$の2次以上の項の係数にある $\chi_e^{M(i)}$ や $\chi_e^{G(i)}$ を i 次の非線形感受率と呼ぶ。一般には，$\chi_e^{M(i)}$ も $\chi_e^{G(i)}$ もテンソル量である。

媒体の透磁率は磁気感受率[1](magnetic susceptibility)を用いて表すことができるが，MKSA系には $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応があるので，誘電率よりも複雑になる。MKSA系では，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の透磁率は

$$\mu^{\mathrm{M}} = \mu_0 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ 対応) \tag{56}$$

$$\mu^{\mathrm{M}} = \mu_0[1 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})] \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ 対応) \tag{57}$$

と表される[2]。$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ であるから，各対応について

$$\boldsymbol{B} = [\mu_0 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H})]\boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) \cdot \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ 対応) \tag{58}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0[1 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})]\boldsymbol{H} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) \cdot \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ 対応) \tag{59}$$

となり，式(58)と式(42)および式(59)と式(44)の比較から(MKSA系では $k = 4\pi$)，それぞれの対応での磁化は次式となる[3]。

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) \cdot \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ 対応) \tag{60}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) \cdot \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ 対応) \tag{61}$$

いずれも，MKSA系の式であるが，(式(58)と式(59)から予想されるように) $\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$ と $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ は異なる単位をもち，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$ は $\mathrm{Wb\ m^{-2}}$，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ は $\mathrm{A\ m^{-1}}$ である。その結果，2つの磁気感受率も異なる単位をもち，$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H})$ は $\mathrm{N\ A^{-2}} = \mathrm{H\ m^{-1}} = \mathrm{Wb\ A^{-1}\ m^{-1}}$，$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})$ は無次元数である[4]。

Gauss系では，透磁率と磁気感受率の関係が次式で与えられる。

$$\mu^{\mathrm{G}} = 1 + 4\pi \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}} \qquad (\mathrm{Gauss}\ 系) \tag{62}$$

---

1 「磁化率」あるいは「帯磁率」と呼ばれることもある。見かける頻度は磁気感受率よりも磁化率の方がはるかに高い。

2 $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H})$ と $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})$ は，それぞれMKSA系での $\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$-$\boldsymbol{B}$ 対応の磁気感受率を表している。添字 m は磁気的物理量であることを示すために付けられているが，文献5は，χ_{m} という表記は「モル磁気感受率」と混同する可能性があるので，磁気感受率には添字 $_{\mathrm{m}}$ を付けないことを推奨している。

3 電場の場合と同様に，磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ が比較的小さく，$\boldsymbol{H}$ に比例する(1次)項のみを考えている。

4 磁気感受率も一般にはテンソル量である。

式(62)を $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ に代入すると，

$$\boldsymbol{B} = (1 + 4\pi\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}})\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + 4\pi\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}}\boldsymbol{H} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{63}$$

が得られる。Gauss 系の場合，式(42)も式(44)も次式

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}^{\mathrm{G}} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{64}$$

を与えるから(Gauss 系では k = 1)，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の区別はなく，式(63)と式(64)の比較から，

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}} \cdot \boldsymbol{H} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{65}$$

となる。Gauss 系の透磁率 μ は無次元数であるから，磁気感受率 $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}}$ も無次元である。誘電率の場合と同様に，MKSA 系の式(57)式から次式の形で定義される比透磁率(relative permeability)，

$$\mu_{\mathrm{r}} \equiv \frac{\mu^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})}{\mu_0} = 1 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) \tag{66}$$

は無次元数であり μ^{G} に等しい。したがって，式(63)と式(66)から $\chi_{\mathrm{e}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})$ と $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}}$ の関係は

$$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) = 4\pi\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}} \tag{67}$$

となる。表3に MKSA 系の2対応と Gauss 系の式をまとめる。

Green Book(文献5)は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場をとり，磁化の単位を A m^{-1} とし，磁気感受率を無次元数としている。しかし，必ずしも表3の定義に従わず，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}} = \mu_0\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) \cdot \boldsymbol{H}$ や $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \mu_0\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) \cdot \boldsymbol{H}$ と定義している成書や論文があるので注意する必要がある。文献8は30以上の成書について，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$

表3．磁化関連の関係式

	MKSA系		Gauss系
	$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$対応	$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$対応	
磁束密度	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$	$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}})$	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}^{\mathrm{G}}$
磁化	$\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) \cdot \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B}) \cdot \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{M}^{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}} \cdot \boldsymbol{H}$
透磁率	$\mu^{\mathrm{M}} = \mu_0 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H})$	$\mu^{\mathrm{M}} = \mu_0[1 + \chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})]$	$\mu^{\mathrm{G}} = 1 + 4\pi\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}}$

・単位は μ^{M}と$\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{H})$: N A^{-2} = H m^{-1} = Wb A^{-1} m^{-1}； μ^{G} ， $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{M}}(\mathrm{B})$， $\chi_{\mathrm{m}}^{\mathrm{G}}$: (−)

対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応のいずれの立場であるか，また，電気感受率と磁気感受率をどのように定義しているか，について，ユニークなコメント付きの分類表を示している。

§3 単位の換算

以下では，いろいろな単位系の間での単位の換算を行う[1]。まず，最も基本的な MKSA 系の C(クーロン)と CGS esu 系の電荷単位 esu との変換を行う。この場合，基本になるのは Coulomb の法則であり，MKSA 系では，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{68}$$

CGS esu 系では，

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{69}$$

と表される[2]。両者がまったく同じ現象を表している場合でも，基本単位の違いを反映して，両左辺の F の値は異なる尺度(N(ニュートン)と dyn(ダイン)は 10^5 倍異なる)で測られる。単純な例を示すと，ある式の中で長さを表現する変数 x が m(メートル)単位で測られるとき，その式の x を cm(センチメートル)単位で測られる変数 x' に置き換えるには，$x\,\mathrm{m} = x'\,\mathrm{cm}$ に対して m = 100 cm を適用して得られる

$$x = x'\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{x'}{100} \tag{70}$$

という関係を元の式の x に代入すればよい。以下に示す単位の換算はすべてこの(単純な)原理を利用する。式(70)の x も x' も物理量ではなく数値を表しており，このような数値間の関係式を「数値方程式」と呼ぶ。数値方程式 $100x = x'$ は，単位間の関係 m = 100 cm と逆の関係になっており[3]，(当然ながら)物理量を表現する単位のサイズが大きい文字ほど数値は小さくなる。

C と esu の換算を行うために，Coulomb の法則の数値方程式を変形する[4]。MKSA 系で書かれた式(つまり N で測られた力)と CGS esu 系で書かれた式(dyn で測られた力)を区別するために，後者の文字にプライム記号($'$)を付けて，

$$F' = \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \tag{71}$$

と書き，次の手順に従って換算を行う。

1. MKSA 系の式(68)を数値方程式とみなし，既知の単位間の換算関係を利用して式変形を行

---

1 本節は文献 4 を参考に書かれている。
2 単位の換算を考える場合はベクトル量で考える必要がないので，スカラーで表した式を用いることにする。
3 これを単位と測定値の「反傾的関係」と呼ぶ。
4 C と esu の換算のために使用する式は，電荷が使用されている式であれば Coulomb の法則以外でも構わない。

う。

2. 得られた式から，CGS esu 系の数値方程式(式(71))を“抜き取る”ことにより，残った部分の関係から C と esu の単位としての大きさの比を求める。

式(68)に現れた文字(数値)に単位を付けてから変形する。

$$F\cdot\mathrm{N}=F'\cdot\mathrm{dyn}\ \rightarrow\ F=F'\cdot\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) \tag{72}$$

$$q\cdot\mathrm{C}=q'\cdot\mathrm{esu}\ \rightarrow\ q=q'\cdot\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right) \tag{73}$$

$$r\cdot\mathrm{m}=r'\cdot\mathrm{cm}\ \rightarrow\ r=r'\cdot\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right) \tag{74}$$

これらを式(68)に代入すると，

$$F'\cdot\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'q_2'\cdot\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2\cdot\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{75}$$

が得られる(式(75)に含まれている(esu/C)の値が得られれば C と esu の換算を行うことができる)。式(75)は(物理量の方程式ではなく)数値方程式であるから，変換後，「′」が付いた文字の関係式が得られたとき， F' や q_1' などの文字以外はすべて数値になっていなければならない。したがって，式(75)の ε_0 を(次元がない)数値として置き換える必要がある。式(68)の中の ε_0 は式(30)で示したように $8.854\,187\,817\cdots\times10^{-12}$ という大きさであるが, この数値をそのまま式(75)中に表記すると式が見えにくくなるので， ε_0 を式(30)を用いて

$$\varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0 c_0^2} \tag{76}$$

に書き換える。μ_0 は2019年5月20日の SI 単位の再定義までは $4\pi\times10^{-7}$ という定義値であったが，再定義以降不確かさをもつ測定値になったので[1]，単純に

$$\varepsilon_0=\frac{10^7}{4\pi c_0^2} \tag{77}$$

とすることができない。再定義後の μ_0 の大きさは $1.256\,637\,062\,12(19)\times10^{-6}$ であり，数値の11桁目に不確かさが生じる精度で測定されている数値であるから，

[1] SI 単位の再定義については**付録1**を参照。

$$\mu_0 = [4\pi \times (1.000\,000\,000x)] \times 10^{-7} \tag{78}$$

と表せる。ここで,

$$\boxed{\delta^2 \equiv 1.000\,000\,000x} \tag{79}$$

を定義すると[1],

$$\mu_0 = 4\pi\delta^2 \times 10^{-7} \tag{80}$$

と書ける。式(80)を式(76)に代入すると,

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi\delta^2 c_0^2} \tag{81}$$

となるが,このままでは c_0 という文字が m s^{-1} という単位に対応する数値をもっており,CGS esc 系での光速の単位 cm s^{-1} に対応する数値になっていない。MKSA 系 $\rightarrow$ CGS esu 系の数値の置き換えでは,光速を $2.997\,924\,58 \times 10^{10}$ という数値で(CGS esu 系に)引き渡す必要があるから,

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi\delta^2 c_0^2} = \frac{10^{11}}{4\pi\delta^2 \zeta_0^2} \qquad (\text{無次元}) \tag{82}$$

と置き換える[2]。ここで,ζ_0 は <u>cm s^{-1} 単位で表した真空中での光速の数値</u>($2.997\,924\,58 \times 10^{10}$)であり[3], 分子の$10^4$倍の相違は$\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ と $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-2}$ の比を反映している(当然ながら, 式(82)の置き換えを行っても, 値は元のε_0と同じ$8.854\,187\,817\cdots \times 10^{-12}$ である)。式(82)の右辺を式(75)のε_0に代入すると次式が得られる。

$$F' \cdot \left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi\delta^2\zeta_0^2}{10^{11}} \frac{q_1' q_2' \cdot \left(\dfrac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{83}$$

したがって,

---

1 δ^2 の範囲は $0.999\,999\,9990 < \delta^2 < 1.000\,000\,0010$ である。有効数字が 10 桁を超えるような高精度の測定や計算でない限り,$\delta = 1$ として扱ってよい。

2 MKSA 系 $\leftrightarrow$ CGS esu 系について「$1/(4\pi\varepsilon_0) \leftrightarrow \delta^2\zeta_0^2/10^{11}$」という置き換えを覚えておくと便利である。

3 物理量ではなく無次元の数値であることに注意する。

$$F' \cdot \left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^{11} \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}}\right)^2 \tag{84}$$

さらに変形して，

$$F' = \frac{10^5 \times \delta^2 \zeta_0^2}{10^{11} \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}}\right)^2 = \frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^2} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}}\right)^2 \tag{85}$$

この式から，CGS esu 系の Coulomb の法則式(式(71))を抜き取ると(言い換えると，$F' = q_1' q_2' \big/ r'^2$ を代入すると)，

$$1 = \frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^2} \cdot \left(\frac{\text{esu}}{\text{C}}\right)^2 \tag{86}$$

であるから，

$$\left(\frac{\text{esu}}{\text{C}}\right)^2 = \frac{10^2}{\delta^2 \zeta_0^2} \tag{87}$$

つまり，

$$\frac{\text{esu}}{\text{C}} = \frac{10}{\delta \zeta_0} \tag{88}$$

となり，単位の換算として，

$$\text{(電荷)} \quad \boxed{\text{esu} = \left(\frac{10}{\delta \zeta_0}\right) \text{C} \quad \text{または} \quad \text{C} = \left(\frac{\delta \zeta_0}{10}\right) \text{esu}} \tag{89}$$

が得られる。繰り返しになるが，$\delta\zeta_0$ が $\approx 2.997\,924\,58 \times 10^{10}$ という大きさの無次元数であることに注意する。また，単位換算表などに，1 C = $2.997\,924\,58 \times 10^9$ esu あるいは1 esu = $3.335\,641 \times 10^{-10}$ C と書かれていることがあるが，これらの換算には物理法則が関係しているという意味で，1 m = 100 cm のような換算とは異なる換算である[1]。

上記の C と esu の変換はあまりにも有名であり，換算表に頻繁に登場するものなので，以下では，通常，あまり見かけない特殊なケースを扱うことにする。MKSA 系の C と CGS emu 系の電荷の単位の換算はどのようになるであろうか。CGS emu 系の電荷の単位には名前がないので，ここでは単に「emu 電荷」と書く。まず，MKSA 系での Coulomb の法則は，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{90}$$

1 文献 5, p. 235 に掲載されている「エネルギーに関する単位の相互換算表」では，物理法則が関係する換算を示すために，単なる等号「＝」ではなく「≙」という記号を用いている。

一方，CGS emu 系での Coulomb の法則は，

$$F' = \frac{1}{\varepsilon_0'} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \tag{91}$$

である。前回のケースと同様に，式(82)を用いて式(90)を数値方程式に変形すると，

$$F' \cdot \left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi\delta^2\zeta_0^2}{10^{11}} \frac{q_1' q_2' \cdot \left(\dfrac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{92}$$

となる。式(28)にもとづいて，ε_0' の大きさが $1/\zeta_0^2$ であることを考慮すると，

$$F' \cdot \left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{\delta^2}{10^{11} \times \varepsilon_0' \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{93}$$

つまり，

$$F' = \frac{10^5 \delta^2}{10^{11} \times \varepsilon_0' \times 10^{-4}} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 = \frac{\delta^2}{10^2} \frac{1}{\varepsilon_0'} \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{94}$$

この式から，CGS emu 系の Coulomb の法則の数値方程式(式(91))を抜き取ると，

$$1 = \frac{\delta^2}{10^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{95}$$

であるから，

$$\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 = \frac{10^2}{\delta^2} \tag{96}$$

つまり，

$$\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}} = \frac{10}{\delta} \tag{97}$$

となり，単位の換算として，

(電荷) $$\boxed{\mathrm{emu電荷} = \left(\frac{10}{\delta}\right)\mathrm{C} \text{ または } \mathrm{C} = \left(\frac{\delta}{10}\right)\mathrm{emu電荷}} \tag{98}$$

が得られる。このように，あまり見かけない単位の換算でも簡単に行うことができる。

ここまで電気量の方を中心に扱ってきたので，次に，MKSA 系の磁気量 Wb(= N A^{-1} m) と CGS emu 系の磁気量(emu)の間の換算を行ってみよう。単位換算の問題は ***E–H*** 対応か ***E–B*** 対応かにはよらないので，比較的わかりやすい ***E–H*** 対応で考えることにする。MKSA 系の磁気の Coulomb の法則は，

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{\mathrm{m1}}q_{\mathrm{m2}}}{r^2} \tag{99}$$

であり，CGS emu 系では，

$$F' = \frac{q'_{\mathrm{m1}}q'_{\mathrm{m2}}}{r'^2} \tag{100}$$

である。これまでと同様の手順で変形を進めると，

$$F'\cdot\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\delta^2\times10^{-7}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2}{r'^2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{101}$$

となる。ここで，式(80)により，μ_0を $4\pi\delta^2\times10^{-7}$ (数値)に置き換えた[1]。変形を続けると，

$$F'\cdot\left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\delta^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2 \tag{102}$$

さらに，

$$F' = \frac{10^5}{(4\pi\delta)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2 = \frac{10^{16}}{(4\pi\delta)^2}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2 \tag{103}$$

となり，この式から，CGS emu 系での Coulomb の式(式(100))を抜き取ると，

$$\left(\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2 = \frac{(4\pi\delta)^2}{10^{16}} \tag{104}$$

が残る。したがって，

$$\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}} = \frac{4\pi\delta}{10^8} \tag{105}$$

であるから，

[1] §1 で述べたように，μ_0 は $4\pi\times10^{-7}$ という定義値ではなく，最新の測定値は 11 桁目に $4\pi\times10^{-7}$ との相違が生じるレベルの数値であるから，$4\pi\delta^2\times10^{-7}$ という数値に置き換える。

$$\text{(磁荷)}\qquad \boxed{\mathrm{emu} = \left(\frac{4\pi\delta}{10^8}\right)\mathrm{Wb}\ \text{または}\ \mathrm{Wb} = \left(\frac{10^8}{4\pi\delta}\right)\mathrm{emu}} \tag{106}$$

が得られる。これが，磁気量に関する MKSA 系と CGS emu 系の間の換算である。

次に，CGS emu 系の磁束の単位 Mx(マクスウェル)と MKSA 系の磁束の単位 Wb の間の換算を考えてみよう。磁束Φは，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を面積分したものであり，

$$\Phi = \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{107}$$

の関係があるから[1]，まず，磁束密度の単位換算から考える。MKSA 系での磁束密度 B は，真空中の場合，磁場の強さ H と

$$B = \mu_0 H \tag{108}$$

で結ばれる。一方，CGS emu 系では$\mu_0 = 1$であるから

$$B' = H' \tag{109}$$

である。B と B' の間の換算を行うために必要な，磁場の強さ H と H' の単位換算をまだ行っていないので，先に磁場の強さの単位換算を行うことにする。MKSA 系の磁場の強さ H は式(34)より

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2} \tag{110}$$

と書け，単位は$\mathrm{A\ m^{-1}}$である。一方，CGS emu 系での磁場の強さ H' は

$$H' = \frac{q'_m}{r'^2} \tag{111}$$

であり，単位は$\mathrm{dyn\ emu^{-1} = dyn^{1/2}\ cm^{-1}}$である(これには Oe(エルステッド)という名称が与えられている)。$\mathrm{A\ m^{-1}}$と Oe の換算には q_m と q'_m つまり Wb と emu の換算が必要であるが，すでに式(106)で得たからその結果($\mathrm{emu} = 4\pi\delta\times10^{-8}\ \mathrm{Wb}$)を利用すればよい。式(110)を変形すると，

$$H'\cdot\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\delta^2\times10^{-7}}\frac{q'_m\cdot\left(\dfrac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)}{r'^2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{112}$$

---

[1] dS は面要素，$\boldsymbol{n}$ は面要素の単位法線ベクトル。

となり，既知の単位換算を利用すると，

$$H' \cdot \left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}} \right) = \frac{4\pi\delta \times 10^{-8}}{(4\pi\delta)^2 \times 10^{-7} \times 10^{-4}} \frac{q'_m}{r'^2} \tag{113}$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}} = \frac{10^3}{4\pi\delta} \tag{114}$$

つまり，

(磁場の強さ) $$\boxed{\mathrm{Oe} = \left(\frac{10^3}{4\pi\delta} \right) \mathrm{A\ m^{-1}} \quad \text{または} \quad \mathrm{A\ m^{-1}} = \left(\frac{4\pi\delta}{10^3} \right) \mathrm{Oe}} \tag{115}$$

を得る。これで，磁場の強さの単位換算ができたので，次は，磁束密度の換算を行う。磁束密度には MKSA 系，CGS emu 系いずれにおいても単位に名称が与えられており，前者は T(テスラ)，後者は G(ガウス)である。したがって，式(108)は

$$B' \cdot \left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}} \right) = 4\pi\delta^2 \times 10^{-7} H' \cdot \left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}} \right) \tag{116}$$

と変形できる。直前の Oe と A $\mathrm{m^{-1}}$の間の換算の結果(式(115))を適用して得られる

$$B' \cdot \left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}} \right) = 4\pi\delta^2 \times 10^{-7} \times \frac{10^3}{4\pi\delta} H' = 10^{-4} \times \delta H' \tag{117}$$

から CGS emu 系の式$B' = H'$ (式(109))を抜き取れば，

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}} = \frac{\delta}{10^4} \tag{118}$$

となり，G と T の関係

(磁束密度) $$\boxed{\mathrm{G} = \left(\frac{\delta}{10^4} \right) \mathrm{T} \quad \text{または} \quad \mathrm{T} = \left(\frac{10^4}{\delta} \right) \mathrm{G}} \tag{119}$$

が得られる。以上で，当初の目的であった磁束の換算を行う準備がすべて整った。

磁束を表す式は式(107)に示した

$$\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{120}$$

であるから, MKSA 系の磁束の単位 Wb と CGS emu 系の磁束の単位 Mx の換算を行うために式(120)を変形すると,

$$\Phi' \cdot \left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = \int \boldsymbol{B}' \cdot \left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right) \cdot \boldsymbol{n}\, dS' \cdot \left(\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{m}^2}\right) \tag{121}$$

となる。G と T の換算は式(119)より $\mathrm{G} = (10^{-4} \times \delta)T$ であるから,

$$\Phi' \cdot \left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = 10^{-4} \times \delta \times 10^{-4} \int \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{n}\, dS' \tag{122}$$

これより,

$$\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}} = 10^{-8} \times \delta \tag{123}$$

つまり,

$$\text{(磁束)} \quad \boxed{\mathrm{Mx} = \left(\frac{\delta}{10^8}\right)\mathrm{Wb} \ \text{ または } \ \mathrm{Wb} = \left(\frac{10^8}{\delta}\right)\mathrm{Mx}} \tag{124}$$

が得られる。MKSA 系では，次元が同じである磁気量と磁束が両方とも Wb という名称で呼ばれるが，CGS emu 系では磁束にのみ Mx という名称があるだけで磁気量には名称がないことに注意する必要がある。MKSA 系と同様に，CGS emu 系の磁気量にも Mx という名称を与えてもよいと考えられるかもしれないが，<u>磁気量間の換算</u>は,

$$\mathrm{Wb} = \frac{10^8}{4\pi\delta}\mathrm{emu} \tag{125}$$

であり，<u>磁束間の換算</u>は,

$$\mathrm{Wb} = \left(\frac{10^8}{\delta}\right)\mathrm{Mx} \tag{126}$$

であるから，磁気量間の換算と磁束間の換算の係数は同じにならず，4π分の違いがある。

§4 異なる単位系での式表現

前節では，単位の換算を扱ったが，単位系間で式の変換を行うにはどうすればいいであろうか。基本的な方針としては，1つの単位系での数値方程式を既知の単位換算を利用して変形し，別の単位系の数値方程式に書き換えればよい[1]。(§3の単位の換算では，1つの未知の単位換算以外について，既知の単位換算を利用して数値方程式の文字を置き換えることにより目標とする単位系に向けた変形を行ったが，式表現の変換の場合は，単位換算がすべて既知である状況で，数値方程式の文字の置き換えを行って式を整理し，目標とする単位系での式を得るという手順となる。)

まず，最も基本的な Coulomb の法則の式の CGS esu 単位系での式から

$$F' = \frac{q_1' q_2'}{r'^2} \tag{127}$$

を MKSA 単位系の式を導出してみよう[2](§3では MKSA 系 $\rightarrow$ CGS esu 系という方向で変形したが，逆方向の変換を扱うことで，ζ やε_0の扱い方が正確に理解できるであろう)。それぞれの文字の単位を付けた置き換えをまとめると，

$$F' = F \cdot \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{dyn}} \right) = 10^5 F \tag{128}$$

$$q' = q \cdot \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{esu}} \right) = \left(\frac{\delta \zeta_0}{10} \right) q \tag{129}$$

$$r' = r \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{cm}} \right) = 10^2 r \tag{130}$$

となる。式(128), (129), (130)を式(127)に代入した

$$10^5 F = \left(\frac{\delta \zeta_0}{10} \right)^2 \frac{1}{10^4} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{131}$$

を整理すると，

$$F = \frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^{11}} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{132}$$

となる。今は CGS esu 系 $\rightarrow$ MKSA 系の変換であるから，MKSA 系 $\rightarrow$ CGS esu 系の場合の式(82)とは逆に，$\mathrm{cm\ s^{-1}}$単位での光速の数値である ζ_0 を $\mathrm{m\ s^{-1}}$単位の光速の数値$(2.997\,924\,58 \times 10^8)$を含めた形にして(MKSA 系に)引き渡す必要がある。そこで，

---

[1] MKSA 系と Gauss 系間の数式変換を容易に行うための変換表が**付録 2** にある。

[2] わざわざ導出しなくても結果はわかっているが，結果が既知である方が，手順の中身や進め方の意味を理解しやすいであろう。

$$\zeta_0 = 10^2 \times c_0 \qquad \text{(無次元)} \tag{133}$$

と置き直すと，式(132)の右辺の係数は

$$\frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^{11}} = \frac{10^4 \times \delta^2 c_0^2}{10^{11}} = \frac{\delta^2 c_0^2}{10^7} \tag{134}$$

となる。式(81)

$$c_0^2 = \frac{10^7}{4\pi \delta^2 \varepsilon_0} \tag{135}$$

を式(134)に代入すると，

$$\frac{\delta^2 \zeta_0^2}{10^{11}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \tag{136}$$

となるから[1]，式(136)を式(132)に代入して，MKSA 系の Coulomb の式

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{137}$$

が得られる。

次に，§1で示した Maxwell の方程式の1つである式(13)について考えよう。MKSA 系で

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{138}$$

と表される式を Gauss 系の表記に変換する。この式の場合は，あらゆる単位系に対応できる式(7)と表1を使えば，任意の単位系での形を知ることができるが，ここでは式(7)のような一般形が与えられていないとして考える。式(138)の中の ∇ も E も B も最終的に式の中に残すものであるから，これらの単位換算を把握しておく必要がある。Gauss 系では，電気に関する量を CGS esu 単位で扱うから(表7)，電場については，これまでと同様の方法で，MKSA 系の電場(E) と Gauss 系の電場(E')の単位換算を行えばよい。MKSA 系の電場 E は(式(33)の形を参考にして)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \tag{139}$$

であり，Gauss 系の電場 E' は

$$E' = \frac{q'}{r'^2} \tag{140}$$

---

[1] まさに，先述した MKSA 系 $\leftrightarrow$ CGS esu 系での便利な置き換え「$1\big/(4\pi\varepsilon_0) \leftrightarrow \delta^2\zeta_0^2\big/10^{11}$」である

である。ここで，E の単位を「MKSA 電場」，E' の単位を「esu 電場」と書いて，式(139)を変形すると，

$$E'\cdot\left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{4\pi\delta^2\zeta_0^2}{10^{11}}\frac{q'\cdot\left(\dfrac{\text{esu電荷}}{\text{C}}\right)}{r'^2\cdot\left(\dfrac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^2} \tag{141}$$

となり，式(89)を利用して

$$E'\cdot\left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}}\right)=\frac{4\pi\delta^2\zeta_0^2\times 10}{4\pi\times 10^{11}\times\delta\zeta_0\times 10^{-4}}\frac{q'}{r'^2}=\frac{\delta\zeta_0}{10^6}\frac{q'}{r'^2} \tag{142}$$

と変形できるから，これより式(140)を抜き取ると

$$\text{MKSA電場}\,(\text{N C}^{-1})=\left(\frac{10^6}{\delta\zeta_0}\right)\text{esu電場}\,(\text{dyn}^{1/2}\,\text{cm}^{-1}) \tag{143}$$

が得られる。これより，E と E' の関係として，

$$E=E'\cdot\left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}}\right)=\left(\frac{\delta\zeta_0}{10^6}\right)E' \tag{144}$$

が得られる。また，磁場に関しても，B の単位である T と B' の単位である G の間には，

$$\text{T}=\left(\frac{10^4}{\delta}\right)\text{G} \tag{145}$$

の関係(式(119))があるから，B と B' の関係は，

$$B=B'\cdot\left(\frac{\text{G}}{\text{T}}\right)=10^{-4}\times\delta B' \tag{146}$$

となる。最後に，∇ をあらわに書くと，

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{147}$$

であり，∇ の単位が m^{-1}，∇' の単位が cm^{-1} であること，および $\text{m}^{-1} = 10^{-2}\,\text{cm}^{-1}$ より，

$$\nabla=\nabla'\cdot\left(\frac{\text{cm}^{-1}}{\text{m}^{-1}}\right)=10^2\nabla' \tag{148}$$

となる。これら(式(144), (146), (148))を MKSA 系の式(式(138))に代入すると,

$$10^2\nabla'\times\frac{\delta\zeta_0}{10^6}\boldsymbol{E}' = -10^{-4}\times\delta\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{149}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{\zeta_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{150}$$

が得られる。この数値方程式の各文字に Gauss 系として付ける単位は，∇' が cm^{-1}，$\boldsymbol{E}'$ が $\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$，$\boldsymbol{B}'$ は $\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$, t は s であるから，ζ_0 には $\mathrm{cm\ s}^{-1}$ という単位が付くことになる。ζ_0 は $2.997\,924\,58\times10^{10}$ という数値であるが，これに $\mathrm{cm\ s}^{-1}$ という単位を付けると真空中の光速になるから，式(150)を物理量の関係式にするには ζ_0 を c_0 と書けばよい[1]。したがって，Gauss 系で表した Maxwell の方程式(のうち式(13)にあたるもの)として，

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{151}$$

が得られる。この結果は，表1を利用して式(7)を Gauss 系の式として表したものと一致している。

最後に，異なる単位系への式の変換の例として，MKSA 系の磁気モーメントを Gauss 系で表すことを考えてみる。電子の軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ にもとづく磁気モーメントは，MKSA 系で $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の場合，次のような表記になる。

$$\boldsymbol{m}_\mathrm{H} = -\frac{\mu_0 e}{2m_\mathrm{e}}\boldsymbol{l} \quad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ \text{対応}) \tag{152}$$

ここで，e は電気素量(電子の電荷の大きさで，ここでは $e>0$ にとる)，m_e は電子の質量であり，右辺の負号は電子の電荷が負であることに対応している。式中の μ_0 は真空の透磁率であり，$\boldsymbol{m}_\mathrm{H}$ の単位は $\mathrm{N\ A^{-1}\ m^2}$(= Wb m)である。なお，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁気モーメントを $\boldsymbol{m}_\mathrm{B}$ と記すと

$$\boldsymbol{m}_\mathrm{B} = -\frac{e}{2m_\mathrm{e}}\boldsymbol{l} \quad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ \text{対応}) \tag{153}$$

となり，単位が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応とはまったく異なる $\mathrm{A\ m^2}$ となることに注意する。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁荷に $1/\mu_0$ がかけられたことに対応して，$\boldsymbol{m}_\mathrm{H}$ に $1/\mu_0$ がかけられた形になっている(式(41)および式(45)参照)。MKSA 系での磁気モーメント $\boldsymbol{m}_\mathrm{H}$ の単位は Wb m であり，これを Gauss 系に変換するには，Wb m を emu cm(= $\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$)に変換すればよい。Wb と emu の変換はすでに式(106)で得たから,

$$\mathrm{Wb\ m} = \frac{10^8}{4\pi\delta}\mathrm{emu\ m} = \frac{10^{10}}{4\pi\delta}\mathrm{emu\ cm} \tag{154}$$

---

[1] CGS esu 単位系での c_0 の大きさは $2.997\,924\,58\times10^{10}$ である。

となり，

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{\mathrm{emu\ cm}}{\mathrm{Wb\ m}}\right) = \frac{4\pi\delta}{10^{10}} \boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} \tag{155}$$

が得られる。Gauss 系は電荷については esu を用いるので，式(89)の

$$\mathrm{C} = \left(\frac{\delta\zeta_0}{10}\right)\mathrm{esu} \tag{156}$$

より

$$e = e' \cdot \left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right) = \frac{10}{\delta\zeta_0} e' \tag{157}$$

となる。質量 m_{e} は MKSA 系では kg，Gauss 系では g であるから，kg = 10^3 g より，

$$m_{\mathrm{e}} = m'_{\mathrm{e}} \left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{kg}}\right) = 10^{-3} m'_{\mathrm{e}} \tag{158}$$

となる。さらに，角運動量 l は MKSA 系では kg $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1}$，Gauss 系では g $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$であるから，kg $\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1}$ = 10^7 g $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}$より，

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}' \cdot \left(\frac{\mathrm{g\ cm^2\ s^{-1}}}{\mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}}\right) = 10^{-7} \boldsymbol{l}' \tag{159}$$

を得る。式(80), (155), (157), (158), (159)を式(152)に代入すると，

$$\frac{4\pi\delta}{10^{10}} \boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = -\frac{4\pi\delta^2 \times 10^{-7}}{2} \frac{\frac{10}{\delta\zeta_0} e'}{10^{-3} m'_{\mathrm{e}}} 10^{-7} \boldsymbol{l}' \tag{160}$$

となり，これを整理して，

$$\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = -\frac{e'}{2m'_{\mathrm{e}}\zeta_0} \boldsymbol{l}' \tag{161}$$

を得る。それぞれの文字に単位を付けて考えると，ζ_0 は真空中の光速 c_0に置き換えられるから，最終的に，Gauss 系での磁気モーメントを表す式として

$$\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = -\frac{e'}{2m'_{\mathrm{e}}c_0} \boldsymbol{l}' \tag{162}$$

が得られる。式(162)は式(152)とまったく同じ物理量を表しているが，一見しただけでは同じ物理量とは思えないくらい異なった形をしている。

以上のように，単位と数値の反傾性を利用して，希望する単位系で書かれた式表現を得る

ことができる。MKSA 系と Gauss 系の Coulomb の法則式の比較から，「MKSA 系で書かれた式を Gauss 系で書かれた式に書き換えるには，MKSA 系の式に現れる$4\pi\varepsilon_0$の部分を1に置き換えればよい」というような“対処療法”的方法を記した解説を目にすることがあるが，この方法がいかに危険であるかがわかるであろう(そもそも，式(138)には$4\pi\varepsilon_0$がないので対処療法が使えない)。逆に，式の中に埋もれている「1」を見つけることは不可能であるから，単なる文字や数字の置き換えだけで式変形ができると考えてはならない。代表的4単位系の単位をまとめたものを表4から表7に示す。

表 4. MKSA 単位系(有理 4 元系) (主に ***E*–*B*** 対応)

物理量	記号	名称	単位			
電荷 [a]	q	ｸｰﾛﾝ(C)	C			
誘電率 [b]	ε	―	$\mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}}$	$\mathrm{kg^{-1}\ m^{-3}\ C^2\ s^2}$		
電場	$\boldsymbol{E}$	―	$\mathrm{N\ C^{-1}}$	$\mathrm{kg\ m\ C^{-1}\ s^{-2}}$	$\mathrm{V\ m^{-1}}$	
電気変位	$\boldsymbol{D}$	―	$\mathrm{C\ m^{-2}}$			
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ [c]	$\boldsymbol{\mu}$		C m			
磁荷(磁気量) [d]	ξ		A m			
磁束 [e]	Φ	ｳｪｰﾊﾞ(Wb)	$\mathrm{N\ A^{-1}\ m}$	$\mathrm{kg\ m^2\ C^{-1}\ s^{-1}}$	V s	H A
透磁率 [f]	μ	―	$\mathrm{N\ A^{-2}}$	$\mathrm{kg\ m\ C^{-2}}$	$\mathrm{Wb\ A^{-1}\ m^{-1}}$	$\mathrm{H\ m^{-1}}$
磁場の強さ [g]	$\boldsymbol{H}$	―	$\mathrm{A\ m^{-1}}$	$\mathrm{N\ Wb^{-1}}$		
磁束密度 [h]	$\boldsymbol{B}$	ﾃｽﾗ(T)	$\mathrm{N\ A^{-1}\ m^{-1}}$	$\mathrm{Wb\ m^{-2}}$		
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ [i]	$\boldsymbol{m}_\mathrm{H}$	―	$\mathrm{N\ A^{-1}\ m^2}$	Wb m		
	$\boldsymbol{m}_\mathrm{B}$		$\mathrm{A\ m^2}$			

[a] 電荷：C(クーロン) = $(\delta\zeta_0/10)$ esu = $(\delta\zeta_0/10)$ Fr(フランクリン)
ζ_0 は cm $\mathrm{s^{-1}}$ 単位での真空中の光速の値(無次元)：$2.997\,924\,58\times10^{10}$。
δ は真空の透磁率の記述(下記)を参照。

[b] 真空の誘電率：$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) = 8.854\,187\,8128(13)\times10^{-12}\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}}$
c_0 は真空中の光速(次元あり)：$2.997\,924\,58\times10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$。

[c] 双極子モーメントの大きさを表す単位に D(デバイ)があるが，D = C m ではない。D(デバイ)は CGS esu の双極子モーメントの単位で，D = 10^{-18} esu cm として定義され，SI 単位ではない。換算は D = 10^{-18} esu cm = $[10^{-19}/(\delta\zeta_0)]$ C m = $3.335\,640\cdots\times10^{-30}$ C m。

[d] ***E*–*B*** 対応では磁荷は存在しないが，***E*–*H*** 対応の磁荷 q_m との対応は $\xi = q_\mathrm{m}/\mu_0$。
E*–*H 対応の磁荷 q_m：Wb(ウェーバ) = $\mathrm{N\ A^{-1}\ m = kg\ m^2\ C^{-1}\ s^{-1} = V\ s = H\ A}$。
H(ヘンリー)はインダクタンスの単位：$\mathrm{H = N\ m\ A^{-2} = kg\ m^2\ C^{-2} = V\ A^{-1}\ s = Wb\ A^{-1}}$。

[e] 磁束：Wb(ウェーバ) = 10^8 Mx(マクスウェル)

[f] 真空の透磁率：$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19)\times10^{-6}\ \mathrm{N\ A^{-2}} \approx 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}}$
$\mu_0 = 4\pi\times(1.000\,000\,000x)\times10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}} \equiv 4\pi\delta^2\times10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}}$ (x は測定で決まる)

[g] 磁場の強さ：$\mathrm{A\ m^{-1}} = (4\pi/10^3)$ Oe(エルステッド)

[h] 磁束密度：T(テスラ) = 10^4 G(ガウス)

[i] $\boldsymbol{m}_\mathrm{H}$ は ***E*–*H*** 対応の磁気モーメント，$\boldsymbol{m}_\mathrm{B}$ は ***E*–*B*** 対応の磁気モーメント。

表 5. CGS esu(CGS 静電単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷[a]	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
誘電率[b]	ε	―	-	-	-
電場	$\boldsymbol{E}$	―	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
電気変位	$\boldsymbol{D}$	―	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{\mu}$	―	esu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{5/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
磁束	Φ	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
透磁率[c]	μ	―	$\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$		
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-2}$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-3/2}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}$

[a] 電荷：Fr(フランクリン) = statcoulomb(スタットクーロン; stC)

[b] 真空の誘電率： $\varepsilon_0 = 1$ (無次元)

[c] 真空の透磁率： $\mu_0 = 1/c_0^2 = 1.112\,65\cdots\times10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$

表 6. CGS emu(CGS 電磁単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
誘電率[a]	ε	―	$\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$		
電場	$\boldsymbol{E}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-2}$
電気変位	$\boldsymbol{D}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-3/2}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{\mu}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	―	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁束	Φ	ﾏｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
透磁率[b]	μ	―	-	-	-
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	$\mathrm{dyn\ emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁束密度[c]	$\boldsymbol{B}$	ｶﾞｳｽ(G)	$\mathrm{dyn\ emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	―	emu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{5/2}\ \mathrm{s}^{-1}$

[a] 真空の誘電率：$\varepsilon_0 = 1/c_0^2 = 1.112\,65\cdots\times10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$

[b] 真空の透磁率：$\mu_0 = 1$ (無次元)

[c] 磁束密度：G(ガウス) = $\mathrm{Mx\ cm}^{-2}$

・電流：Bi(ビオ) = 10 A

表 7. Gauss 単位系(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
誘電率[a]	ε	―	-	-	-
電場	$\boldsymbol{E}$	―	dyn esu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
電気変位	$\boldsymbol{D}$	―	dyn esu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{\mu}$	―	esu cm	dyn$^{1/2}$ cm^{2}	g$^{1/2}$ cm$^{5/2}$ s^{-1}
磁荷(磁気量)	q_{m}	―	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
磁束	Φ	ﾏｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
透磁率[b]	μ	―	-	-	-
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	ｶﾞｳｽ(G)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	―	emu cm	dyn$^{1/2}$ cm^{2}	g$^{1/2}$ cm$^{5/2}$ s^{-1}

[a] 真空の誘電率：$\varepsilon_0 = 1$ (無次元)

[b] 真空の透磁率：$\mu_0 = 1$ (無次元)

付録1. 国際単位系(SI)の再定義の影響

第26回国際度量衡総会(General Conference on Weights and Measures (26th meeting)，2018年11月開催)で承認された SI 単位の再定義が2019年5月20日から施行された。新しく定義値(不確かさのない数値)が与えられた4つの物理定数と合わせ，定義値が与えられている基礎物理定数は次の7つである。

- 原子(^{133}Cs)の基底状態の超微細構造遷移周波数$\Delta\nu$: 9 192 631 770 $\mathrm{s^{-1}}$
- 真空中の光速 c_0 : 299 792 458 $\mathrm{m\ s^{-1}}$
- Planck 定数 h : $6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ J s
- 電気素量 e : $1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ C
- Boltzmann 定数 k_B : $1.380\ 649 \times 10^{-23}$ $\mathrm{J\ K^{-1}}$
- Avogadro 定数 N_A : $6.022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ $\mathrm{mol^{-1}}$
- 視感効果度 K_{cd} : 683 $\mathrm{lm\ W^{-1}}$

基本物理量である，時間，長さ，質量，物質量，電流，温度，光度は上記の基礎物理定数を用いて与えられ，それぞれの物理量に関係する定数を以下に記す。

時間(s) $\leftrightarrow \Delta\nu$, 長さ(m) $\leftrightarrow c_0, \Delta\nu$, 質量(kg) $\leftrightarrow h, c_0, \Delta\nu$, 物質量(mol) $\leftrightarrow N_A$,
電流(A) $\leftrightarrow e, \Delta\nu$, 温度(K) $\leftrightarrow k_B, h, \Delta\nu$, 光度(cd) $\leftrightarrow K_{cd}\ h, \Delta\nu$

である。2019年の改定により，以下の物理量の値は( )内に記した定義値から，測定により決まる(不確かさをもつ)数値[1]になった。

- 真空の透磁率μ_0 ($4\pi \times 10^{-7}$ $\mathrm{N\ A^{-2}}$)
- 真空の誘電率ε_0 ($1/(\mu_0 c_0^2) = 8.854\,187\,817\cdots\times 10^{-12}\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}}$)
- 1 mol の^{12}C の質量 (0.012 kg)
- 水の三重点 (273.16 K)

特に，透磁率μ_0と誘電率ε_0が定義値ではなくなったことは電磁気学にとって大きな変更であり，μ_0とε_0がどのようにして決められ，どの程度の不確かさをもつ数値であるかを理解しておく必要がある。

真空の透磁率は微細構造定数(fine-structure constant)と呼ばれる無次元数αと次の関係がある。

$$\mu_0 = \frac{2\alpha h}{c_0 e^2} \tag{163}$$

また，誘電率は透磁率を用いて

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \tag{164}$$

により表されるから，誘電率と微細構造定数の関係は

[1] 測定により決まる数値には必ず不確かさがある。

$$\varepsilon_0 = \frac{e^2}{2\alpha h c_0} \tag{165}$$

となる。基礎物理定数の改定により h と e が定義値になったので(c_0は以前から定義値)，式(163)と式(165)の右辺の物理量のうち，測定値である微細構造定数αのみが不確かさをもっている。CODATA[1]によるα^{-1}の値は137.035 999 084(21)であるから[2]，μ_0とε_0の不確かさは数値の11桁目に現れることになる。つまり，μ_0の場合，$[4\pi\times(1.000\,000\,000x)]\times10^{-7}$ N A^{-2}と表記した x の桁に不確かさがある。

[1] Committee on Data for Science and Technology (科学技術データ委員会; 所在地：パリ(フランス))

[2] URL は https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

付録2. MKSA 単位系 $\leftrightarrow$ Gauss 単位系変換法(安直（アンチョコ）法[1])

§4で異なる単位間での式表現の変換について解説したが，文献6に紹介されている，簡単に変換するためのシンプルな対応関係を表8に記す。§4で扱った式変換を表8にもとづいて行ってみよう。

MKSA 系で表された式(138)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{166}$$

に適用すると，

表8. MKSA単位系 $\leftrightarrow$ Gauss単位系変換式[a]

物理量[b]	MKSA単位系	Gauss単位系
電荷[c]	q	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,q' = \dfrac{1}{c_0}\sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}}q'$
電場	$\boldsymbol{E}$	$\dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{E}' = c_0\sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}}\boldsymbol{E}'$
電気変位	$\boldsymbol{D}$	$\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{4\pi}}\boldsymbol{D}' = \dfrac{1}{c_0\sqrt{4\pi\mu_0}}\boldsymbol{D}'$
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	$c_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{4\pi}}\boldsymbol{H}' = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}\boldsymbol{H}'$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	$\dfrac{1}{c_0\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{B}' = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\pi}}\boldsymbol{B}'$
磁気モーメント[d]	$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}$ ($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$対応)	$\dfrac{1}{c_0}\sqrt{\dfrac{4\pi}{\varepsilon_0}}\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = \sqrt{4\pi\mu_0}\,\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}}$
	$\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}}$ ($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$対応)	$c_0\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\boldsymbol{m}'_{\mathrm{B}} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}}\boldsymbol{m}'_{\mathrm{B}}$

[a] Gauss単位系からMKSA単位系に変換する場合は係数の逆数を用いる。
(例： $\boldsymbol{E}' \to \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\boldsymbol{E}$)

[b] 質量，長さ，速度，時間などは変換不要。

[c] 電流，電荷密度，分極，電流密度，双極子モーメントも電荷と同じ変換。

[c] 磁荷，磁化もそれぞれの対応の中で同じ変換。

---

[1] “安直法”は筆者の勝手な命名です。

$$\nabla' \times \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c_0\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{167}$$

となり，一瞬で，Gauss 系の式(151)

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{168}$$

が得られる。また，MKSA 系で表された $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁気モーメント(式(152))

$$\boldsymbol{m}_\mathrm{H} = -\frac{\mu_0 e}{2m_\mathrm{e}} \boldsymbol{l} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{169}$$

の場合は，表8の変換を代入して得られる

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\, \boldsymbol{m}'_\mathrm{H} = -\frac{\mu_0 \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, e'}{2m'_\mathrm{e}} \boldsymbol{l}' \tag{170}$$

を変形すると

$$\boldsymbol{m}'_\mathrm{H} = -\frac{\mu_0 \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, e'}{2m'_\mathrm{e}} \boldsymbol{l}' \tag{171}$$

となり，Gauss 系の式(162)

$$\boldsymbol{m}'_\mathrm{H} = -\frac{e'}{2m'_\mathrm{e} c_0} \boldsymbol{l}' \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{172}$$

が得られる。MKSA 系で表された $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁気モーメント(式(153))

$$\boldsymbol{m}_\mathrm{B} = -\frac{e}{2m_\mathrm{e}} \boldsymbol{l} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{173}$$

では，表8の変換を代入して得られる

$$c_0\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, \boldsymbol{m}'_\mathrm{B} = -\frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, e'}{2m'_\mathrm{e}} \boldsymbol{l}' \tag{174}$$

より，式(172)と同じ Gauss 系の式

$$\boldsymbol{m}'_\mathrm{B} = -\frac{e'}{2m'_\mathrm{e} c_0} \boldsymbol{l}' \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{175}$$

が得られる。Gauss 系では $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の区別がないので $\boldsymbol{m}'_\mathrm{H} = \boldsymbol{m}'_\mathrm{B}$ となる。

式(166)以外の Maxwell の方程式の変換も行ってみよう。MKSA 系での Gauss の法則(電気)の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{176}$$

に表8の変換を代入して得られる

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\rho' \tag{177}$$

より，

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = 4\pi\rho' \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{178}$$

が得られる。MKSA 系での Ampère の法則の式については，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{179}$$

に表8の変換を代入して得られる

$$c_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\nabla' \times \boldsymbol{H}' = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\boldsymbol{j}' + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} \tag{180}$$

を変形して，

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' = \frac{4\pi}{c_0}\boldsymbol{j}' + \frac{1}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{181}$$

が得られる。最後に Lorentz 力の式を変換しよう。MKSA 系の Lorentz 力の式

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{(MKSA 系)} \tag{182}$$

に表8の変換を代入して得られる

$$\boldsymbol{F}' = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,q'\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}' \times \frac{1}{c_0\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\boldsymbol{B}'\right) \tag{183}$$

を変形して，

$$\boldsymbol{F}' = q'\left(\boldsymbol{E}' + \frac{\boldsymbol{v}'}{c_0} \times \boldsymbol{B}'\right) \qquad \text{(Gauss 系)} \tag{184}$$

が得られる。以上のように，表8を適用すれば，MKSA 系と Gauss 系の式を容易に変換できる。

文献

1. 鈴木範人，小塩高文「応用光学 II」，朝倉書店 (1982年)，pp. 152～156

　同書の表4.1および表4.2に，単位系の間の関係がまとめられている。2つの表は ***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応にも配慮されており，任意の単位系での電磁気学の理論式を簡単に知ることができる素晴らしい表である。さらに，「(MKSA 系が)どの面からも理想的にできているかというとなかなかそうはいかない」と述べて MKSA 系の欠点を指摘するとともに，新しい MKSP 系という単位系(＝MKSA 系と Gauss 系の長所を組み合わせた単位系)を紹介している。

2. 広瀬立成「***E*** と ***H***，***D*** と ***B***」，共立出版 (1981年)，pp. 23～36

　同書 p. 23に書かれているように「電気的な量と磁気的な量の対応のよさを第一に考えて」基本的に ***E*–*H*** 対応の立場で書かれており，書名もそれを反映しているが，***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応の関係に関する丁寧な解説がある。

3. 「世界大百科事典」，平凡社 (1972年)

　見出し「単位」を参照。専門書ではないものの，電磁気単位系の話が丁寧に解説されている。文献1.と類似の表(第2表)が掲載されており，それぞれの単位系での基本量や定義がわかりやすく記述されている。また，単位系の単位同士の数値比をまとめた表(第4表)は，他に例を見ない貴重なもので，本書で示した単位系間の式変換を機械的に行う場合にきわめて有効である。ただし，出版年によっては，該当する表が掲載されていないので注意が必要である[1]。

4. A. Sommerfeld (伊藤大介　訳)「理論物理学講座3　電磁気学」，講談社 (1982年)，pp. 433～441 (付録：初学者のための準備)

　単位と測定値(数値)の反傾的関係の一般論を解説し，電磁気学の理論式を各単位系に合わせて変換するための独創的な方法が紹介されている。ただし，式変形の方向を決める際の「単純性の要請」はやや曖昧で説得力が弱い印象を受ける。(たとえば，Gauss 系は，もともと誘電率と透磁率を無次元としたので，そのしわよせとして式変換の際出てくる光速を物理量として残さなければならないこと，あるいはその逆に，Gauss 系から変換するときには，光速は数値化されて残す変数以外の定数部分に含めてしまう必要がある，ということが明確に記述されていない。)

5. 産業技術総合研究所計量標準総合センター 訳「物理化学で用いられる量・単位・記号」第3版，講談社サイエンティフィク (2009年). (原著：E. R. Cohen, T. Cvitaš, J. G. Frey, B. Holmström, K. Kuchitsu, R. Marquardt, I. Mills, F. Pavese, M. Quack, J. Stohner, H. L. Strauss, M. Takami, and A. J. Thor, *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*, IUPAC Green Book, 3rd Edition, 2nd Printing, IUPAC & RSC Publishing, Cambridge, 2007.)

　同書は下記 URL

http://media.iupac.org/publications/books/gbook/IUPAC-GB3-2ndPrinting-Online-22apr2011.pdf

[1] 筆者自身が掲載を確認したのは 1972 年 4 月 25 日初版のみ。

からダウンロード可能。
日本語訳は講談社サイエンティフィクの厚意により
http://www.nmij.jp/public/report/translation/IUPAC/iupac/iupac_green_book_jp.pdf
からダウンロード可能。正誤表は
http://www.nmij.jp/public/report/translation/IUPAC/iupac/GB-errata-20101201.pdf
からダウンロード可能。

6. N. G. Lehtinen, *Conversion of formulae and quantities between unit systems*, a self-cooked reference, 2010. URL は下記。
http://nlpc.stanford.edu/nleht/Science/reference/conversion.pdf

7. N. Kanazawa, Y. Nii, X.-X. Zhang, A. S. Mishchenko, G. De Fillipis, F. Kagawa, Y. Iwasa, N. Nagaosa, Y. Tokura, Critical phenomena of emergent magnetic monopoles in a chiral magnet. *Nat. Commun.* **7**, 11622 (2016).
DOI: 10.1038/ncomms11622

8. 遠藤雅守「電磁気学教科書」考 (2010年9月4日改訂). URL は下記。
http://teamcoil.sp.u-tokai.ac.jp/lectures/EM1/Unit/index.html
また，同著者による「E–H 対応の電磁気学」も大変参考になる[1]。URL は下記。
http://teamcoil.sp.u-tokai.ac.jp/lectures/EM1/E-H/index.html

[1] 締めくくりの文章に，「本稿が，E–B 対応と E–H 対応の狭間で惑う電磁気学の「迷える子羊」たちを救う一助になれば幸いである。」と記されている。

電磁気学における単位系

1983年	10月	3日	初版第1刷
1991年	8月	22日	第2版第1刷
1993年	6月	20日	第3版第1刷
1999年	2月	7日	第4版第2刷
2005年	7月	31日	第5版第6刷
2012年	9月	9日	第6版第3刷
2017年	8月	20日	第7版第2刷
2020年	8月	16日	第8版第2刷
2020年	11月	1日	第9版第3刷
2021年	11月	21日	第10版第3刷

著者 山崎 勝義
発行 漁火書店

検印 山崎

印刷 ブルーコピー
製本 ホッチキス