Hiroaki
Mukaidani, student member, Koichi Mizukami, member (Hiroshima University) This paper considers new recursive algorithm to find the positive semidefinite stabilizing solution of H_∞ type Riccati equation with small parameter $\varepsilon > 0$: $A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon + (P_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_\varepsilon + H^T C) + C^T C = 0$ where the solution P depend on the ε. In order to obtain the stabilizing solution of the H_∞ type Riccati equation, we must solve the generalized algebraic Riccati equation. Using the recursive algorithm, we show that the solution of the generalized algebraic Riccati equation converges to a positive semidefinite stabilizing solution with the rate of convergence of $O(\varepsilon^k)$.

We also show that for singularly perturbed systems, if the H_∞ norm of the transfer matrix function is less than the H_∞ norms for the fast system and for the reduced slow system, then the H_∞ type Riccati equation has a positive semidefinite stabilizing solution.

特異摂動システム, 有界実補題, H_∞ タイプリカッチ方程式, 再帰的アルゴリズム

論　文

The Recursive Algorithm for H_∞ Type Riccati Equation with Small Parameter.

1.　まえがき

近年, H_∞ 制御問題に関連するリカッチ方程式の解の構造について盛んに研究されている [2]。中でも, 有界実補題 [1],[2],[6] (strict bounded real lemma) に現れる以下の形式のリカッチ方程式 (1)

$$A^T P + PA + PBB^T P + C^T C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

について, 準正定である安定化解の存在する必要十分条件は, "A が漸近安定かつ $\|B(sI-A)^{-1}C\|_\infty < 1$" を満たすことである。

標準的な特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題において, Z.Pan ら [3],[4] はゲーム理論の手法を利用して, 2 つの subsystem である fast system および slow system の伝達関数の H_∞ ノルムの最大値を考えることによって, full-order system の制御則が存在するための十分条件を導出している。また, 特異摂動システムにおける有界実補題において, V.Dragon[5] は摂動項 ε が十分小さいとき, full-order system の伝達関数の H_∞ ノルムが, $\|G_\varepsilon\|_\infty < \gamma$ を満たすことは, 2 つの subsystem である fast system および slow system の伝達関数の H_∞ ノルムの最大値が $\max\{\|G_F\|_\infty, \|G_S\|_\infty\} < \gamma$ を満たすことと等価であることを証明している。

特異摂動システムの場合, 有界実補題で扱われる以下の形式の H_∞ タイプリカッチ方程式

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon + (P_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H) \\ &\quad \cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \\ &\quad \cdot(B_\varepsilon^T P_\varepsilon + H^T C) + C^T C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \ (2) \end{aligned}$$

について, 解の存在条件は, V.Dragon[5] によって研究された。しかし, 実際に方程式 (2) を解くとき, 係数行列である $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ に摂動項 ε を含むので, 数値的に解くことは困難である。

著者らは文献 (10), (11) において, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題や LQG 問題に現れる摂動項 (ε) を含むリカッチ方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案した。しかし, 再帰的アルゴリズム [7],[9] を利用した H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の数値解法は研究されていない。この理由は, まず H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の P_ε の 2 次項である係数行列中に存在する $\gamma^2 I - H^T H$ が正定であるために, 従来の仮定である可制御性や可観測性の条件のもとでは, 再帰的アルゴリズムを利用して得られた H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の解が準正定かつ安定化解である保証がない。つぎに, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の係数行列中には, パラメータ γ が含まれている。したがって, 準正定かつ安定化解が存在する γ の範囲を直接摂動項を含んだまま γ- イタレーションなどの方法によって試行錯誤的に決定しなければ H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を解くことができない。その結果, 準正定かつ安定化解が存在する γ の範囲が先に求まらない限り, 収束する保証がないため再帰的アルゴリズムを使用することはできない。以上の理由が考えられる。

そこで, 本論文では, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を一般化リカッチ方程式 [10],[11] に変換して, この一般化リカッチ方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案する。また, 同時に H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) が, 準正定かつ安定化解が存在するための十分条件に, 低次元化された 2 つの伝達関数を利用する。この十分条件は, 2 つの subsystem である fast system および slow system の伝達関数の H_∞ ノルム条件によって与えられるという点では本質的に V.Dragon[5] の結果と類似している。しかし, 証明方法において, 再帰的アルゴリズムの手法を取り入れるなど重要な変更点もある。提案した再帰的アルゴリズムは, 導出された 2 つの伝達関数の H_∞ ノルム条件を満足すれば, 必ず収束解をもつ。得られた収束解は, 従来の最適レギュレータ問題などで扱われるリカッチ方程式の可制御性, 可観測性を仮定しなくても H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の準正定かつ安定化解になる。

本論文で導出された H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の準正定かつ安定化解が存在する γ の範囲は, 十分条件に過ぎないが, 2 つの低次元化された fast system, slow system の伝達関数の H_∞ ノルムを計算するだけで求めることができる。

本論文は以下のように構成されている。第 2 章では，有界実補題についての既存の結果を照会する。第 3 章では，まず，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を一般化リカッチ方程式に変換する公式を照会する。つぎに変換された一般化リカッチ方程式の解を求めるための再帰的アルゴリズムを導出する。また，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) が準正定である安定化解をもつための十分条件を導出する。さらに，提案されたアルゴリズムが，十分小さな ε に対して，$O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束することを証明する。このとき，低次元化された 2 つのリカッチ方程式の準正定である安定化解が存在するための十分条件から，全次元の H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の準正定である安定化解が存在することを示す。第 4 章では本論文で提案されたアルゴリズムの有効性を確認するため，数値例に適用し準正定である安定化解を求める。第 5 章では，結果に対する考察を行う。

2. 準備

以下の線形時不変システムを考える [5]。

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad \cdots\cdots (3a)$$

$$z = Cx + Hw \quad \cdots\cdots (3b)$$

ここで，$w \in \mathbf{R}^m$ は外乱，$z \in \mathbf{R}^l$ は出力ベクトル，$x \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトルをあらわす。また，各係数行列は適当な次元をもつ。このとき，w から z までの伝達関数は (4) によって与えられる。

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + H \quad \cdots\cdots (4)$$

このとき以下の補題が成立する [1],[2],[6],[8]。

[補題 1]　2 つの条件 (I) および (II) は等価である。

(I)　A が安定行列かつ，

$$||G(s)||_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) < \gamma \quad \cdots\cdots (5)$$

ここで，$\bar{\sigma}$ は最大特異値をあらわす。

(II)　$\gamma^2 I - H^T H > 0$ かつリカッチ方程式

$$A^T P + PA + (PB + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \cdot (B^T P + H^T C) + C^T C = 0 \quad (6)$$

が準正定である安定化解をもつ。

3. 再帰的アルゴリズム

＜3・1＞ 一般化リカッチ方程式の変換　特異摂動システムにおいて，システム (3a)∼(3b) の係数行列 A, B, C は以下になる。

$$A = A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = B_\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

まず，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる [10],[11]。

[補題 2]　　H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) は，以下の一般化リカッチ方程式 (7a)∼(7b) を解くことに等価である。

$$\hat{A}^T P + P^T \hat{A} + (P^T \hat{B} + C^T H) \cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \cdot(\hat{B}^T P + H^T C) + C^T C = 0 \quad \cdots\cdots (7a)$$

$$D^T P = P^T D \quad \cdots\cdots (7b)$$

ただし，

$$D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

(補題 2 の証明)　　まず，方程式 (7b) を解く。

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

とおく。方程式 (7b) に代入して分割計算すれば

$$D_1^T X = X^T D_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}^T & X_{21}^T \\ X_{12}^T & X_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

$$X_{11} = X_{11}^T,\ X_{22} = X_{22}^T \quad \cdots\cdots (9)$$

また，方程式 (7a) に，(9) で定義された行列 X を代入して分割計算することにより，

$$A_{11}^T X_{11} + X_{11}^T A_{11} + A_{21}^T X_{21} + X_{21}^T A_{21} + F_1^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_1^T C_1 = 0 \quad (10a)$$

$$\varepsilon X_{21} A_{11} + X_{22}^T A_{21} + A_{12}^T X_{11} + A_{22}^T X_{21} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_2^T C_1 = 0 \quad (10b)$$

$$A_{22}^T X_{22} + X_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T X_{21}^T + \varepsilon X_{21} A_{12} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_2 + C_2^T C_2 = 0 \quad (10c)$$

$$X_{11}^T B_1 + X_{21}^T B_2 + C_1^T H = F_1^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots (10d)$$

$$\varepsilon X_{21}B_1 + X_{22}^T B_2 + C_2^T H = F_2^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots \quad (10e)$$

ここで，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の行列 P_ε は以下の (11) によって与えられる [3]。

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで，方程式 (10a)~(10e) に対して，(11) を直接リカッチ方程式 (2) に代入して分割計算した結果を比較する。このとき，

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = P$$

となる。したがって，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を解くことは一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) を解くことに等価である。 □

＜3・2＞ 再帰的アルゴリズムの導出 この節では一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) における再帰的アルゴリズムを導出する。リカッチ方程式 (7a) を各ブロックごとに計算する。すなわち，

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

を方程式 (7a) に代入して計算する。

$$A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} + F_1^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_1^T C_1 = 0 \quad (13a)$$

$$\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_2^T C_1 = 0 \quad (13b)$$

$$A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_2 + C_2^T C_2 = 0 \quad (13c)$$

$$P_{11}^T B_1 + P_{21}^T B_2 + C_1^T H = F_1^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots \quad (13d)$$

$$\varepsilon P_{21} B_1 + P_{22}^T B_2 + C_2^T H = F_2^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots \quad (13e)$$

(13a)~(13e) において $\varepsilon \equiv 0$ とおくと 0 オーダ方程式 (14a)~(14e) が得られる。ここで，0 オーダ方程式の解を $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ とおく。

$$A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} + F_1^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_1^T C_1 = 0 \quad (14a)$$

$$\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_1 + C_2^T C_1 = 0 \quad (14b)$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} + F_2^T(\gamma^2 I - H^T H)F_2 + C_2^T C_2 = 0 \quad (14c)$$

$$\bar{P}_{11}^T B_1 + \bar{P}_{21}^T B_2 + C_1^T H = F_1^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots \quad (14d)$$

$$\bar{P}_{22}^T B_2 + C_2^T H = F_2^T(\gamma^2 I - H^T H) \quad \cdots\cdots \quad (14e)$$

また，以下の行列を定義する。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} \\ A_{121} & A_{122} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 R^{-1} H^T C_1 & A_{12} + B_1 R^{-1} H^T C_2 \\ A_{21} + B_2 R^{-1} H^T C_1 & A_{22} + B_2 R^{-1} H^T C_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 R^{-1/2} \\ B_2 R^{-1/2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I + HR^{-1}H^T]^{1/2} C_1 & [I + HR^{-1}H^T]^{1/2} C_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \gamma^2 I - H^T H$$

$$S_{11} = B_{11} B_{11}^T = B_1 R^{-1} B_1$$

$$S_{12} = B_{11} B_{12}^T = B_1 R^{-1} B_2$$

$$S_{22} = B_{12} B_{12}^T = B_2 R^{-1} B_2$$

したがって，方程式 (14a)~(14e) は下記式 (15a)~(15c) になる。

$$A_{111}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{111} + A_{121}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{121} + \bar{P}_{11}^T S_{11} \bar{P}_{11} + \bar{P}_{21}^T S_{22} \bar{P}_{21} + \bar{P}_{11}^T S_{12} \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + C_{11}^T C_{11} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (15a)$$

$$\bar{P}_{22}^T A_{121} + A_{112}^T \bar{P}_{11} + A_{122}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{22}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{21} + C_{12}^T C_{11} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (15b)$$

$$A_{122}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{122} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + C_{12}^T C_{12} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (15c)$$

後で述べる [補題 3] のもとで方程式 (15c) が解をもつので，$A_{22} + B_2 R^{-1} H^T C_2 + B_2 R^{-1} B_2^T \bar{P}_{22} = A_{122} + S_{22}\bar{P}_{22}$ は，非特異である。したがって $(A_{122} + S_{22}\bar{P}_{22})^{-1}$ は存

在する。以上から 0– オーダ方程式 (16a)∼(16c) が得られる。

[0–order Equation]

$$\bar{P}_{11}^T A_P + A_P^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T S_P \bar{P}_{11} + Q_P = 0 \ \cdot \ (16a)$$

$$\bar{P}_{21} = N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16b)$$

$$\begin{aligned} &A_{122}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{122} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} \\ &\quad + C_{12}^T C_{12} = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16c) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A_P &= A_{111} + N_1 A_{121} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\ S_P &= S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12} N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T \\ Q_P &= C_{11}^T C_{11} + N_2 A_{121} + A_{121}^T N_2^T + N_2 S_{22} N_2^T \\ N_2 &= -\hat{Q}_{12} D_4^{-1}, \ N_1 = -D_2 D_4^{-1} \\ D_2 &= A_{112} + S_{12} \bar{P}_{22}, \ D_4 = A_{122} + S_{22} \bar{P}_{22} \\ \hat{Q}_{12} &= C_{11}^T C_{12} + A_{121}^T \bar{P}_{22} \end{aligned}$$

ここで, 以下の仮定を導入する [5]。

[仮定]　$A_{22}, \tilde{A} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ は安定行列である。

以上の条件のもとで, [補題 3] が成立する。

[補題 3]　[仮定] の条件が成立するとする。また,

$$\underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty, \ ||G_F||_\infty\} \ \cdots\cdots\cdots\cdots (17a)$$

$$G_S = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{H} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17b)$$

$$G_F = C_2 (sI - A_{22})^{-1} B_2 + H \ \cdots\cdots\cdots\cdots (17c)$$

と定義する。このとき, $\underline{\gamma} < \gamma$ を満足するすべての γ において, 2 つのリカッチ方程式 (16a), (16c) は準正定である安定化解 $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{22}$ をそれぞれもつ。ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \\ \tilde{B} &= B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \\ \tilde{C} &= C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \\ \tilde{H} &= H - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \end{aligned}$$

(補題 3 の証明)　はじめに, 同一である方程式 (15c), (16c) が簡単な計算によって方程式 (18) になる。

$$\begin{aligned} &A_{122}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{122} + \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + C_{12}^T C_{12} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} + (\bar{P}_{22}^T B_2 + C_2^T H) \\ &\quad \cdot (\gamma^2 I - H^T H)^{-1} (B_2^T \bar{P}_{22} + H^T C_2) \\ &\quad + C_2^T C_2 = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18) \end{aligned}$$

つぎに, 方程式 (15a) が以下の

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T \tilde{A} + (\bar{P}_{11}^T \tilde{B} + \tilde{C}^T \tilde{H}) \\ &\quad \cdot (\gamma^2 I - \tilde{H}^T \tilde{H})^{-1} (\tilde{B}^T \bar{P}_{11} + \tilde{H}^T \tilde{C}) \\ &\quad + \tilde{C}^T \tilde{C} = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19) \end{aligned}$$

お よ び, (16a) に 変 形できることを簡単に説明する [5],[10]。まず, 方程式 (15b) は, D_2, D_4 を用いて

$$D_2^T \bar{P}_{11} + D_4^T \bar{P}_{21} + \hat{Q}_{12}^T = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

と書ける。方程式 (16c) が安定化解をもてば D_4^{-1} は存在するので D_4^{-T} を (20) の左から掛けて方程式 (16b) が得られる。この方程式 (16b) を方程式 (15a) に代入すれば, A_P, S_P, Q_P を用いて方程式 (16a) が得られる。

続いて, 方程式 (16a) が方程式 (19) になることを示す。以下のハミルトン行列を定義する。

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{111} & S_{11} \\ -C_{11}^T C_{11} & -A_{111}^T \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} A_{112} & S_{12} \\ -C_{11}^T C_{12} & -A_{121}^T \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{121} & S_{12}^T \\ -C_{12}^T C_{11} & -A_{112}^T \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} A_{122} & S_{22} \\ -C_{22}^T C_{22} & -A_{122}^T \end{bmatrix}$$

このとき, T_4 に関して

$$T_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P}_{22}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 & S_{22} \\ 0 & -D_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P}_{22} & I \end{bmatrix}$$

が成立する。さらに,

$$T_4^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P}_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4^{-1} & D_4^{-1} S_{22} D_4^{-T} \\ 0 & -D_4^{-T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P}_{22}^T & I \end{bmatrix}$$

と計算される。したがって, 実際に $T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$ に代入すれば

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_P & S_P \\ -Q_P & -A_P^T \end{bmatrix} \ \cdots (21)$$

が得られる。 ここで, 関係式 (21) から, 行列 A_P, S_P, Q_P はハミルトン行列 $T_1 \sim T_4$ で表されるので, 実際には方程式 (16c) の解 $\bar{P}_{22}$ を含んでいないことに注意しなければならない。さらに, T_4^{-1} は存在するので, $A_{122}^{-1} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 (R + H^T C_2 A_{22}^{-1} B_2)^{-1} H^T C_2 A_{22}^{-1}$ などを利用して関係式 (21) の $T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$ を直接計算すれば, 行列 (22) が得られる。

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \left[\begin{array}{cc} \tilde{A} + \tilde{B}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{H}^T \tilde{C} & \tilde{B} \tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T \\ -\tilde{C}^T (I + \tilde{H} \tilde{R}^{-1} \tilde{H}^T) \tilde{C} & -(\tilde{A} + \tilde{B}^T \tilde{R}^{-1} \tilde{H}^T \tilde{C})^T \end{array} \right] \cdots (22)$$

ただし,

$$\tilde{R} = \gamma^2 I - \tilde{H}^T \tilde{H}$$

以上から方程式 (16a) を方程式 (19) に変形することができる。

次に, 方程式 (18)~(19) が準正定である安定化解が存在する条件は, $A_{22}, \tilde{A} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ が安定行列かつ, 条件式 (17a)~(17c) であたえられる $\underline{\gamma}$ について, $\underline{\gamma} < \gamma$ を満足することである。ここで, 方程式 (16a), (16c) は, それぞれ方程式 (19), (18) の変形にすぎないので, 条件式 (17a)~(17c) を満足すれば, ブロック分割された公式であるリカッチ方程式 (16a), (16c) が準正定である安定化解をもつことがわかる。 □

つぎに偏差を定義する。

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \cdots\cdots (23a)$$

$$P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \cdots\cdots (23b)$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \cdots\cdots (23c)$$

以上を方程式 (13a)~(13e) に代入する。

0 オーダ方程式 (16a)~(16c) から, 偏差 E について以下の再帰的アルゴリズム (24a)~(24c) が導出される。これは, 文献 (10), (11) と同様な手順で得ることができる。

$$E_{11}^{(j+1)T} D_0 + D_0^T E_{11}^{(j+1)} = V^T H_1^{(j)T} + H_1^{(j)} V - V^T H_3^{(j)} V - \varepsilon H_2^{(j)} \cdots\cdots (24a)$$

$$E_{11}^{(j+1)T} D_2 + E_{21}^{(j+1)T} D_4 + D_3^T E_{22}^{(j+1)} + H_1^{(j)} = 0 \cdots\cdots (24b)$$

$$E_{22}^{(j+1)T} D_4 + D_4^T E_{22}^{(j+1)} + H_3^{(j)} = 0 \cdots\cdots (24c)$$

ただし

$$\begin{aligned} H_1^{(j)} &= A_{111}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} \\ &\quad + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\ &\quad + \varepsilon (E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\ H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} \\ &\quad + E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)} \\ H_3^{(j)} &= A_{112}^T P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)} A_{112} \\ &\quad + \varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11} P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)} \\ &\quad + P_{21}^{(j)} S_{12} P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P_{11}^{(j)} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)},\ P_{21}^{(j)} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)} \\ &P_{22}^{(j)} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)},\ E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0 \\ &D_0 = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3,\ V = D_4^{-1} D_3 \\ &D_1 = A_{111} + S_{11} \bar{P}_{11} + S_{12} \bar{P}_{21} \\ &D_3 = A_{121} + S_{12}^T \bar{P}_{11} + S_{22} \bar{P}_{21} \end{aligned}$$

ここで, $^{(j)}$ は j 番目の値, $^{(j+1)}$ は $j+1$ 番目の値を意味する。したがって, j 番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい。

＜3・3＞ 再帰的アルゴリズムの収束　まず, 定理をあげる。

[定理]　[仮定] における条件のもとで, $\underline{\gamma} < \gamma$ を満足するすべての γ において, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) は準正定である安定化解をもつ。

このとき, 準正定である安定化解 P_ε は, 一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) の解 P を用いて

$$P_\varepsilon = \left[\begin{array}{cc} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} & \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21})^T \\ \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}) & \varepsilon(\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}) \end{array} \right] \cdot (25)$$

によって与えられる。また, アルゴリズム (24a)~(24c) は, 偏差 E の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する。すなわち,

$$||E - E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \cdots (26)$$

ただし

$$E = \left[\begin{array}{cc} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{array} \right],\ E^{(k)} = \left[\begin{array}{cc} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{array} \right]$$

又, マトリクスノルム $||\cdot||_2$ は, 任意の行列 X について最大特異値 $||X||_2 \equiv [\lambda_{\max}(X^T X)]^{1/2}$ をあらわす。

(定理の証明)　収束性の証明には, 文献 (10), (11) と同様に陰関数定理の手法を利用する。すなわち, 収束解の存在は, $\varepsilon = 0$ の近傍におけるヤコビ行列が非特異であることを示せばよい。アルゴリズム (24a)~(24c) に対するヤコビ行列は以下のように計算される。

[ヤコビ行列]

$$J|_{\varepsilon=0} = \left[\begin{array}{ccc} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{array} \right] \cdots\cdots (27)$$

ただし

$$\begin{aligned} &J_{11} = I \otimes D_0 + D_0^T \otimes I \\ &J_{22} = I \otimes D_4 \\ &J_{33} = I \otimes D_4 + D_4^T \otimes I \\ &J_{k1} = \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2} = \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

$$J_{k3} = \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k=1,2,3)$$
$$L_1 = E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} - V^T H_1^T - H_1 V + V^T H_3 V + \varepsilon H_2$$
$$L_2 = E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} + H_1$$
$$L_3 = E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} + H_3$$

$\otimes$ はクロネッカ積である。ここで, $D_4 = A_{122} + S_{22}\bar{P}_{22}$ はリカッチ方程式 (16c) が, [補題 3] から安定化解をもつので安定である。

同様に, $A_P + S_P\bar{P}_{11}$ は, リカッチ方程式 (16a) が, [補題 3] から安定化解をもつので安定である。したがって,

$$A_P + S_P\bar{P}_{11} = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3 = D_0 \quad (28)$$

となるので, D_0 は安定となる。以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される。

続いて, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の解 P_ε が準正定かつ安定化解であることを示す。通常, 文献 (9) などで扱われている最適レギュレータ問題において, 最適ゲインを得るために解く必要がある摂動項を含むリカッチ方程式は, 可制御性, 可観測性が仮定されている。したがって, 得られた解は準正定かつ安定化解を保証している。しかし, 本論文で扱われている H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) は, 可制御性, 可観測性を仮定していない。そこで, [補題 3] を利用して再帰的アルゴリズムによって得られた解が準正定かつ安定化解である証明を新たに行う。

この証明は, $\varepsilon = 0$ の近傍における解 P_ε が準正定かつ安定化解であることを示すことに等価である。(25) から

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \quad \cdots\cdots (29)$$

である。[補題 3] で $\bar{P}_{11}$ は準正定であるから ε が十分小さいとき, P_ε も準正定になる。続いて,

$$\begin{aligned} & A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T P_\varepsilon \\ &= \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} \\ \varepsilon^{-1} A_{121} & \varepsilon^{-1} A_{122} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} S_{11}P_{11} + S_{12}P_{21} & \varepsilon S_{11}P_{21}^T + S_{12}P_{22} \\ \varepsilon^{-1}(S_{12}^T P_{11} + S_{22}P_{21}) & \varepsilon^{-1}(\varepsilon S_{12}^T P_{21}^T + S_{22}P_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_1 + O(\varepsilon) & D_2 + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}(D_3 + O(\varepsilon)) & \varepsilon^{-1}(D_4 + O(\varepsilon)) \end{bmatrix} \cdot (30) \end{aligned}$$

である。収束性の証明と同様に [補題 3] から D_4 は安定行列であり, 関係式 (28) と [補題 3] から $D_0 = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3$ も安定行列である。また, 文献 (12) から以下の補題が成立する。

[補題 4]　M_{22}^{-1} が存在して, $M_0 = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ および M_{22} が安定行列であると仮定とする。このとき, システム

$$\dot{y}_1 = M_{11}y_1 + M_{12}y_2,\ y_1(t_0) = y_1^0 \quad \cdots\cdot (31a)$$
$$\varepsilon\dot{y}_2 = M_{21}y_1 + M_{22}y_2,\ y_2(t_0) = y_2^0 \quad \cdots\cdots\cdot (31b)$$

が $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*)$ を満たすすべての ε で漸近安定となるような $\varepsilon^* > 0$ が存在する。

したがって, ε が十分小さいとき [補題 4] から行列 (30) は安定となる。以上から, 解 P_ε が準正定かつ安定化解であることが示される。 □

本論文で提案した再帰的アルゴリズムの手法を用いて, [定理] から以下の [系] を得ることができる。

[系]　[仮定] および [補題 3] が成立するとき, 十分小さな ε に対して

$$\begin{aligned} ||G_\varepsilon(s)||_\infty &= \sup_\omega \bar{\sigma}(G_\varepsilon(j\omega)) \\ &\le \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} \quad \cdots\cdots (32) \end{aligned}$$

が成立する。ここで,

$$G_\varepsilon(s) = C(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon + H \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

である。

(系の証明)　[定理] および [補題 3] から, まず, $\gamma^2 I - H^T H > 0$ が成立している。次に, $\gamma > \underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\}$ を満たすすべての γ において, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) は準正定である安定化解をもつので, 有界実補題を利用して

$$||G_\varepsilon(s)||_\infty < \gamma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

となる。また, 係数行列 A_ε, B_ε, C, H を与えれば H_∞ ノルム $||G_\varepsilon(s)||_\infty$ は一意的に定まる。したがって, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) が準正定かつ安定化解をもつ γ の下限値 $\underline{\gamma}$ を用いて, $\underline{\gamma} \ge ||G_\varepsilon(s)||_\infty$ が成立する。 □

[注意]　[系] は, 文献 (5) の Corollary 3.2 に類似している。しかし, 全く同一の問題設定において, V.Dragon(5) によって

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup ||G_\varepsilon(s)||_\infty = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} \ (35)$$

が示されている。すなわち, ε が十分小さいとき, H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) が準正定かつ安定化解をもつための γ の範囲の決定には, 全次元の伝達関数の H_∞ ノルム $||G_\varepsilon(s)||_\infty$ を

計算するかわりに，低次元化された fast system, slow system の伝達関数の H_∞ ノルム $||G_S||_\infty$，$||G_F||_\infty$ を利用した $\underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\}$ を計算すれば十分である。

4. 数値例

以下のシステム (36a)〜(36b) に対して，本論文で提案された再帰的アルゴリズムを適用し解を求める。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (36a)$$

$$z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36b)$$

ここで，slow system および fast system の伝達関数は [補題 3] から (37a)〜(37b) によって与えられる。

$$G_S = (s+1)^{-1} + 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37a)$$

$$G_F = (s+1)^{-1} + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37b)$$

本論文で導出された [定理] の十分条件から，ε が十分小さいとき，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) は

$$\gamma > \underline{\gamma} = \max\{||G_S||_\infty,\ ||G_F||_\infty\} = 3 \quad \cdots\cdots (38)$$

を満たすすべての γ において，準正定である安定化解をもつことがわかる。ここで，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ におけるシステム (36a)〜(36b) の伝達関数 $G_\varepsilon = C(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon + H$ の H_∞ ノルムの値 γ_{opt} は MATLAB によって以下のように計算される。

$$\gamma_{opt} = ||G_\varepsilon||_\infty = 3.0 \quad (39)$$

したがって，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ であるとき

$$\gamma_{opt} = ||G_\varepsilon||_\infty = \underline{\gamma} \quad (40)$$

である。

続いて，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ におけるシュミレーション結果を示す。ただし，$\gamma = 4 > \underline{\gamma} = 3$ とする。まず，$\varepsilon = 0$ における 0 オーダ解を求める。方程式 (16a)〜(16c) から，

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8348486 & 0 \\ 2.7530492 & 0.5835921 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

となる。

通常，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ のオーダで H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) を分割計算しないで直接解を求めることは困難である。しかし，本論文で提案された再帰的アルゴリズムを上述の問題に適用すれば，一般化リカッチ方程式 (7a)〜(7b) の解 P_{pro} は，3 回の繰り返し計算によって得られる。収束の判定は $||P^{(j+1)} - P^{(j)}||_2 < 10^{-7}, j = 1, 2, \cdots$ となったところで計算を打ち切る。

表 1 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ の P の値

Tab.1. Value of P when $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$

j	P_{11}	P_{21}	P_{22}
1	0.83484861	2.75304923	0.58359214
2	0.83484863	2.75304923	0.58359217
3	0.83484863	2.75304923	0.58359217

表 1 から，一般化リカッチ方程式 (7a)〜(7b) の解 P_{pro} は

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} 8.3484863 \times 10^{-1} & 2.75304923 \times 10^{-8} \\ 2.75304923 & 5.8359217 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

となる。得られた非対称解 P_{pro} を用いて，行列 (11) から H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の解 $\hat{P}_\varepsilon$ は次式で与えられる。

$$\hat{P}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 8.3484863 \times 10^{-1} & 2.75304923 \times 10^{-8} \\ 2.75304923 \times 10^{-8} & 5.8359217 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (43)$$

一方，MATLAB の代数リカッチ方程式を解くための関数 are を用いた $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ での解 $P_{\rm are}$ は

$$P_{\rm are} = \begin{bmatrix} 0.8348 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (44)$$

である。ここで，本論文で提案されたアルゴリズムの有効性を確認するために，$\hat{P}_\varepsilon$ および $P_{\rm are}$ を H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) に代入したときの残差を計算する。

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon + \hat{P}_\varepsilon A_\varepsilon + (\hat{P}_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H) \\ &\quad \cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \\ &\quad \cdot(B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon + H^T C) + C^T C \\ &= \begin{bmatrix} 5.55202 \times 10^{-9} & -3.83165 \times 10^{-10} \\ -3.83165 \times 10^{-10} & -7.54666 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon^T P_{\rm are} + P_{\rm are} A_\varepsilon + (P_{\rm are} B_\varepsilon + C^T H) \\ &\quad \cdot(\gamma^2 I - H^T H)^{-1} \\ &\quad \cdot(B_\varepsilon^T P_{\rm are} + H^T C) + C^T C \\ &= \begin{bmatrix} 0.0686 \times 10^{-7} & 0.0003 \times 10^{-7} \\ 0.1266 \times 10^{-7} & 0.0007 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (46) \end{aligned}$$

したがって，本論文で提案されたアルゴリズムによって計算された H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の解 $\hat{P}_\varepsilon$ が，10^{-8} オーダの範囲で妥当であることがわかる。さらに，

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon \\ &= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -6.8313 \times 10^7 & -8.944272 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad \cdots (47) \end{aligned}$$

である。行列 $\hat{P}_\varepsilon$ が明らかに準正定かつ行列 (47) の固有値について ${\rm Re}\lambda\{A_\varepsilon + B_\varepsilon R^{-1} H^T C + B_\varepsilon R^{-1} B_\varepsilon^T \hat{P}_\varepsilon\} < 0$ を満たす。

以上から，再帰的アルゴリズムによって得られた解 $\hat{P}_\varepsilon$ は，H_∞ タイプリカッチ方程式 (2) の準正定かつ安定化解であることが数値的に示された。本論文で提案された再帰的アルゴリズムは，繰り返し計算によって解を求めているために，収束までの回数が 3 回となったが，この計算の複雑さを除けば，数値的に比較して，十分有効であることがわかる。

5．まとめ

本論文では摂動項 ε を含む H_∞ タイプリカッチ方程式 $A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon + (P_\varepsilon B_\varepsilon + C^T H)(\gamma^2 I - H^T H)^{-1}(B_\varepsilon^T P_\varepsilon + H^T C) + C^T C = 0$ について，一般化リカッチ方程式に変換して，再帰的アルゴリズムを導出した。また，準正定かつ安定化解が存在する十分条件を 2 つの subsystem である fast system および slow system のノルム条件によって与えた。得られた結果は，V.Dragon[(5)] に類似しているが，証明方法にアルゴリズムの手法を導入することによって，従来の証明方法を変更することが可能となった。同時に，提案された十分条件を満たすとき，導出した再帰的アルゴリズムが十分小さな ε に対して，$O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束することを示した。さらに，本論文では，導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために簡単な数値例を示した。この数値例によって，ε が十分小さくても，高精度の収束解が得られることが示された。ここで，得られた解は準正定かつ安定化解である。

今後の研究課題として，特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に関係するリカッチ方程式

$$A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - P_\varepsilon(B_\varepsilon B_\varepsilon^T - \frac{1}{\gamma^2} E_\varepsilon^T E_\varepsilon)P_\varepsilon + C^T C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (48)$$

を再帰的アルゴリズムを利用して解くことが考えられる。

最後に，本研究を進めるに当たり多大な御協力をいただいた広島大学の Xu Hua 助教授に感謝いたします。

(平成 8 年 7 月 19 日受付，平成 9 年 2 月 6 日再受付)

文　献

(1) K.Zhou and P.P.Khagonekar : “An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization”, Systems and Control Letters, Vol.11–2, 85 / 91 (1988)

(2) G.Hewer : “Existence Theorems for Positive Semidefinite and Sign Indefinite Stabilizing Solutions of H_∞ Riccati Equations”, SIAM J.Control and Optimization, 31, 16/29 (1993)

(3) Z.Pan and T.Basar : “H_∞ – Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part I. Perfect state mesurements”, Automatica, 29–2, 401 / 423 (1993)

(4) Z.Pan and T.Basar : “H_∞ – Optimal Control for Singularly Perturbed Systems – Part II. Imperfect state mesurements”, IEEE Trans. Automatic Control, 39–2, 280 / 299 (1994)

(5) V.Dragan : “H_∞ – Norms and Disturbance Attenuation for Systems with Fast Transients”, IEEE Trans. Automatic Control, 41–5, 747 / 750 (1996)

(6) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis : “State Space Solution to Standard H_2, and H_∞ Control Ploblems”, IEEE Trans. Automatic Control, 34–8, 831 / 847 (1989)

(7) Z.Gajic and M.T.J.Qureshi: “Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control”, ACADEMIC PRESS. Vol.195 (1995)

(8) P.Lancaster and L.Rodman : “Algebraic Riccati Equations”, CLARENDON PRESS · OXFORD. (1995)

(9) Z.Gajic, D.Petkovski and X.Shen : “Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System – A Recursive Approach”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Berlin ; Springer – Verlag (1990)

(10) 向谷，水上，徐 : “非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム”，計測自動制御学会論文集　32–5，672/678 (1996)

(11) 向谷，水上 : “非標準特異摂動システムにおける Linear – Quadratic – Gaussian (LQG) 問題のための再帰的アルゴリズム”，電気学会論文誌 C Vol.116–C, No12, 1382/1389 (1996)

(12) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O’Reilly : “Singular Perturbation Methods in Control”, Analysis and Design, Academic Press (1986)

(学生員) 1969 年 11 月 14 日生。1992 年広島大学総合科学部数理情報学専攻卒業。94 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。現在同博士課程後期在学中。ロバスト制御，アルゴリズムに関する研究に従事。計測自動制御学会学生会員。

(正員) 1936年3月30日生。1958年広島大学工学部電気工学科卒業。60年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。63年同博士課程修了。63年京都大学工学部助手，トロント大学客員研究員などを経て，68年広島大学工学部助教授，77年同総合科学部教授，同大学院工学研究科担当，現在に至る。関数解析，最適制御，微分ゲーム，情報検索などの研究に従事 (工学博士)。情報処理学会，計測自動制御学会，システム制御情報学会などの会員。