論 文

不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト安定化

正員 向谷博明 （広島市立大学）
正員 水上孝一 （広島大学）

Robust Stabilization of Singularly Perturbed Systems with Uncertainties

Hiroaki Mukaidani, Member (Hiroshima City University), Koichi Mizukami, Member (Hiroshima University)

This paper considers the robust stabilization of singularly perturbed systems with time–varying unknow–but–bounded uncertainties. The H_∞ control method are used to establish the stability of the closed–loop system. The construction of the stabilizing controller involves solving a certain algebraic Riccati equation with small parameter $\varepsilon > 0$. In order to overcome the computation difficulties caused by small parameter ε, we propose the ε–less quadratically stabilizing controller by using the results of the solution for above a algebraic Riccati equation. It is shown that if the reduced order Riccati equations have a positive definite stabilizing solution then the given uncertain linear system with the proposed controller independ of ε is quadraticaly stabilizable. To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical examples are included.

キーワード：特異摂動システム, 2 次安定化, H_∞ 制御理論, ゲーム型リカッチ方程式, 有界実補題

1. はじめに

不確定要素を含むシステムのロバスト安定化について, さまざまな研究が報告されている[(1)～(3)]。Petersen[(1)] または Zhou ら[(2)] は, システムの係数行列 A に時変である不確定要素 $F\Delta(t)E$, $\Delta(t)^T\Delta(t) \le I$ が含まれる線形システムに対して, リアプノフ関数の手法によるリカッチ方程式の解を利用した 2 次安定化のための必要十分条件を導出している。Khargonekar ら[(3)] は, 不確定要素を含む線形システムに対して, H_∞ 制御理論を応用した 2 次安定化制御器を構築している。近年, 不確定要素を含む特異摂動システムについて, 2 次安定化の研究が行われている[(6)(7)]。Shao ら[(6)] は, システムに含まれる不確定要素に対して, H_∞ ノルムによる上限を設定し, スモールゲイン定理[(4)(12)] を応用した 2 次安定である摂動項 ε の範囲を導出している。鈴木ら[(7)] は, リアプノフ関数を利用して, 2 次安定化のための制御器を提案している。ここで, 文献 (6), (7) のいずれも, 特異摂動システムの性格上, slow system と fast system に分割して解析を行っている。このような解析手法を一般に特異摂動法[(11)] と呼んでいるが, この解析手法の欠点は, 仮定として, 係数行列である $A_{22} + F_2\Delta(t)E_2$ が非特異であるとしなければならない点である。この仮定は文献 (6), (7) のいずれも設定されている。

本論文は, 1 ブロックタイプの構造的不確かさを含む特異摂動システムについて, 特異摂動法を利用しないロバスト安定化問題を考える。本論文では, 係数行列である $A_{22} + F_2\Delta(t)E_2$ が非特異である仮定を行わないでシステムが 2 次安定になるための十分条件を H_∞ 制御理論に基づくリカッチ方程式の可解条件として導出する。与えられたリカッチ方程式が正定対称解をもてば, システムは 2 次安定である。ここで注意しなければならないことは, 導出されたリカッチ方程式は凸性が保証されないゲーム型リカッチ方程式であるということである。さらに, 摂動項 ε を含むために解を求めることは数値計算上困難である。このような数値計算上の困難な問題に対し, 従来, 著者らは, 再帰的アルゴリズムの手法[(5)(9)(10)] を利用してきた。しかし, 再帰的アルゴリズムを利用して制御器を構築すれば, 制御器を得るための数値計算の時間が増加する傾向がある。以上を踏まえて, 本論文では, 新たに ε を含まない簡単化された制御器の構築を提案する。基本的な設計手順は, まず, 低次元化された 0– オーダ方程式 (リカッチ方程式) を導入することによって, 正定対称かつ安定化解の存在性の判定を行う。 続いて, 0– オーダ方程式の解を求める。この 0– オーダ方程式による解を利用して, 制御器を構築する。したがって, 再帰的アルゴリズムを使用することなく, 独立した 2 つの 0– オーダ方程式 (リカッチ方程式) を解くだけで, 2 次安定性を保証する制御器を

構築できる。

本論文で得られた2次安定性のための十分条件は，従来の研究[(1)~(3)]と比較して保守的である。すなわち，従来の研究[(1)~(3)]では状態空間に対する2次安定化のための必要十分条件を導出している。一方，本論文では特異摂動システムに対する2次安定化のための十分条件を導出しており，十分条件を満足する特異摂動システムのクラスにしか2次安定化可能でないという意味で保守的である。しかし，文献(6),(7)と異なり，本論文では係数行列である $A_{22}+F_2\Delta(t)E_2$ が非特異である仮定を必要としない。さらに,低次元化した ε に依存しない2つのリカッチ方程式の可解性を判定するだけで2次安定性を判定できる。また制御器の設計も ε に依存しない2つのリカッチ方程式の解を利用することによって可能である。以上から,特異摂動システムの安定化可能であるクラスを $A_{22}+F_2\Delta(t)E_2$ が特異であるクラスにも拡張できたところに本論文の有用性がある。

本論文では，以下の記号を用いる。すなわち，$||X(t)||$ は，実時間関数行列 $X(t)\in\mathbf{R}^{k_1\times k_1}$ の最大特異値 $||X||\equiv[\lambda_{\max}(X^TX)]^{1/2}$，$||G(s)||_\infty$ は，伝達関数行列 $G(s)\in\mathbf{R}^{k_2\times k_2}$ の H_∞ ノルム $||G(s)||_\infty\equiv\sup_s[\lambda_{\max}(G^*(s)G(s))]^{1/2}$ $(s=j\omega,\ \omega\in\mathbf{R})$ をそれぞれ表す。

2. 問題設定

以下の線形時不変特異摂動システムを考える[(1)(3)(13)]。

$$\dot{x}(t)=(A_\varepsilon+F_\varepsilon\Delta(t)E)x(t)+B_\varepsilon u(t)\ \cdots\cdots\cdots\ (1)$$

$$A_\varepsilon=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22}\end{bmatrix},\ B_\varepsilon=\begin{bmatrix}B_1\\ \varepsilon^{-1}B_2\end{bmatrix}$$

$$F_\varepsilon=\begin{bmatrix}F_1\\ \varepsilon^{-1}F_2\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}E_1 & E_2\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

ここで,ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ,$u(t)\in\mathbf{R}^l$ は制御入力,$x_i(t)\in\mathbf{R}^{n_i}(i=1,\ 2)$ は状態ベクトルである。また，初期状態は $x_1(0)=x_1^0,\ x_2(0)=x_2^0$ で与えられる。$\Delta(t)$ は，システムの不確かさを表す未知の時間関数行列であり，$\Delta(t)$ の各要素はルベーグ可積分かつノルム条件 $||\Delta(t)||\leq 1$ を満足する。また,各係数行列は適当な次元をもつと仮定する。本論文では,文献(6),(7)と異なり,システム(1)において,$A_{22}+F_2\Delta(t)E_2$ が任意の $\Delta(t)$ に対して非特異であると仮定しない。

次に,システム(1)に関して,基本的仮定を行う。

[仮定1] 行列対 $(A_\varepsilon,\ B_\varepsilon)$ は可安定である。

3. 2次安定化のための必要十分条件

まず,特異摂動システム(1)に対する線形フィードバック $u(t)=-Kx(t)$ による2次安定化可能を保証する以下の補題を紹介する[(3)(12)(13)]。

[補題1] 特異摂動システム(1)が線形フィードバック $u(t)=-Kx(t)$ により2次安定化可能であるための必要十分条件は,

(条件1) $A_\varepsilon-B_\varepsilon K$ が安定(全ての固有値の実部が負)である。

(条件2) 不等式 $||E(sI-A_\varepsilon+B_\varepsilon K)^{-1}F_\varepsilon||_\infty<1$ を満足する。

(注意1) 補題1の証明は,$||\Delta(t)||\leq 1$ からスモールゲイン定理を利用することによってできる[(4)(12)]。

上記の補題1は,さらに,以下に述べられる補題2と等価である[(3)(12)(13)]。

[補題2] リカッチ方程式

$$A_\varepsilon^TP_\varepsilon+P_\varepsilon A_\varepsilon-P_\varepsilon(\mu^{-1}B_\varepsilon B_\varepsilon^T-F_\varepsilon F_\varepsilon^T)P_\varepsilon$$
$$+E^TE+\mu I=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

が正定対称解をもつとき,特異摂動システム(1)は2次安定化可能である。ここで,μ は正の任意の実数,I は単位行列である。さらに,2次安定化するための制御器は

$$u(t)=-\frac{1}{2\mu}B_\varepsilon^TP_\varepsilon x(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

である。

(注意2) 補題2の証明は，以下の有界実補題(strict bounded real lemma)[(4)(12)(13)]を利用することによってできる。

[補題3–有界実補題] 次の3条件は同値である。

(a) A が漸近安定かつ $||B(sI-A)^{-1}C||_\infty<1$ を満たす。

(b) リカッチ方程式 $A^TP+PA+PBB^TP+C^TC=0$ が準正定かつ安定化解をもつ。

(c) リカッチ不等式 $A^TP+PA+PBB^TP+C^TC<0$ が正定対称解をもつ。

4. 2次安定化制御器

まず,一般化リカッチ方程式を紹介する[(9)(10)]。

[補題4] リカッチ方程式(2)は,以下の一般化リカッチ方程式(4)を解くことに等価である。

$$P^TA+A^TP-P^T(\mu^{-1}BB^T-FF^T)P$$
$$+E^TE+\mu I=0\ \cdots\cdots\cdots\ (4a)$$

$$P_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^TP=P^T\Pi_\varepsilon\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4b)$$

$$\Pi_\varepsilon = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$P_{11} = P_{11}^T,\ P_{22} = P_{22}^T$$
$$A = \Pi_\varepsilon A_\varepsilon,\ B = \Pi_\varepsilon B_\varepsilon,\ F = \Pi_\varepsilon F_\varepsilon$$

このとき, (3) で与えられる制御器 $u(t)$ は以下によって変形できる。

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} Px(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(補題 4 の証明)　まず, (4a) は (2) から

$$\begin{aligned} &A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - P_\varepsilon(\mu^{-1}B_\varepsilon B_\varepsilon^T - F_\varepsilon F_\varepsilon^T)P_\varepsilon \\ &\qquad + E^T E + \mu I = 0 \\ \Leftrightarrow\ & A^T \Pi_\varepsilon^{-T}\Pi_\varepsilon^T P + P^T \Pi_\varepsilon \Pi_\varepsilon^{-1} A \\ &\quad - P^T \Pi_\varepsilon(\mu^{-1}\Pi_\varepsilon^{-1}BB^T\Pi_\varepsilon^{-T} \\ &\quad - \Pi_\varepsilon^{-1}FF^T\Pi_\varepsilon^{-T})\Pi_\varepsilon^T P + E^T E + \mu I = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P^T A + A^T P - P^T(\mu^{-1}BB^T - FF^T)P \\ &\quad + E^T E + \mu I = 0 \end{aligned}$$

また, 制御器 (5) は (3) から

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2\mu}B_\varepsilon^T P_\varepsilon x(t) = -\frac{1}{2\mu}B\Pi_\varepsilon^{-T}\Pi_\varepsilon^T Px(t) \\ &= -\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} Px(t) \end{aligned}$$

と変形できる。以上から補題 4 が証明される。　□

はじめに制御器 (5) を設計することを考える。そこで, (4) を各ブロックごとに計算する。

$$\begin{aligned} &A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\ &\quad - P_{11}^T S_{11}^\mu P_{11} - P_{21}^T S_{22}^\mu P_{21} \\ &\quad - P_{11}^T S_{12}^\mu P_{21} - P_{21}^T S_{12}^{\mu T} P_{11} + Q_{11} = 0 \cdots\cdots (6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_{21}A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\ &\quad - \varepsilon P_{21}S_{11}^\mu P_{11} - \varepsilon P_{21}S_{12}^\mu P_{21} \\ &\quad - P_{22}^T S_{12}^{\mu T} P_{11} - P_{22}^T S_{22}^\mu P_{21} + Q_{12}^T = 0 \cdots (6b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21}A_{12} \\ &\quad - P_{22}^T S_{22}^\mu P_{22} - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^{\mu T} P_{21}^T - \varepsilon P_{21}S_{12}^\mu P_{22} \\ &\quad - \varepsilon^2 P_{21}S_{11}^\mu P_{21}^T + Q_{22} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6c) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} &Q_{11} = E_1^T E_1 + \mu I,\ Q_{12} = E_1^T E_2 \\ &Q_{22} = E_2^T E_2 + \mu I \\ &S_{11}^\mu = \mu^{-1}B_1 B_1^T - F_1 F_1^T \\ &S_{12}^\mu = \mu^{-1}B_1 B_2^T - F_1 F_2^T \\ &S_{22}^\mu = \mu^{-1}B_2 B_2^T - F_2 F_2^T \end{aligned}$$

リカッチ方程式 (6) において $\varepsilon = 0$ とすれば, 方程式 (7) を得る。ここで, 0– オーダ方程式の解を $\bar{P}_{11}\ \bar{P}_{21}\ \bar{P}_{22}$ とおく。

$$\begin{aligned} &A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{11}^T S_{11}^\mu \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^T S_{22}^\mu \bar{P}_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{11}^T S_{12}^\mu \bar{P}_{21} - \bar{P}_{21}^T S_{12}^{\mu T} \bar{P}_{11} + Q_{11} = 0 \cdots\cdots (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{22}^T S_{12}^{\mu T} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\mu \bar{P}_{21} + Q_{12}^T = 0 \cdots (7b) \end{aligned}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\mu \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \cdots (7c)$$

ここで μ_f を以下のように定める [9][10]。

$\mu_f = \sup\{0 < \mu|$ リカッチ方程式 (7c) が正定対称である安定化解 $\bar{P}_{22}$ をもつ $\}$

(注意 3)　Petersen [1] は, リカッチ方程式 (7c) が正定対称解をもつようなある正定数 μ_f が存在するなら, $0 < \mu < \mu_f$ を満足するすべての μ に対して, リカッチ方程式 (7c) が正定対称解をもつような μ_f が存在することを示している。

μ_f の定義から $0 < \mu < \mu_f$ を満たすすべての μ に対して, 行列 $D_4 = A_{22} - S_{22}^\mu \bar{P}_{22}$ は安定行列であるので, $(A_{22} - S_{22}^\mu \bar{P}_{22})^{-1} = D_4^{-1}$ が存在する。したがって, D_4^{-1} を利用してリカッチ方程式 (7) は 0– オーダ方程式 (8) に変形できる。

[0– オーダ方程式]

$$\bar{P}_{11}^T A_0^\mu + A_0^{T\mu}\bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_0^\mu \bar{P}_{11} + Q_0^\mu = 0 \cdot\cdot (8a)$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8b)$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\mu \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \cdot (8c)$$

ただし,

$$\begin{aligned} &A_0^\mu = A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12}^\mu N_2^T + N_1 S_{22}^\mu N_2^T \\ &S_0^\mu = S_{11}^\mu + N_1 S_{12}^{T\mu} + S_{12}^\mu N_1^T + N_1 S_{22}^\mu N_1^T \\ &Q_0^\mu = Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22}^\mu N_2^T \\ &N_2^T = D_4^{-T}\hat{Q}_{12}^T,\ N_1^T = -D_4^{-T}D_2^T \\ &D_2 = A_{12} - S_{12}^\mu \bar{P}_{22},\ D_4 = A_{22} - S_{22}^\mu \bar{P}_{22} \\ &\hat{Q}_{12} = Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22} \end{aligned}$$

(注意 4)　行列 A_0^μ , S_0^μ, Q_0^μ を記述する公式の中には, リカッチ方程式 (8c) の解 $\bar{P}_{22}$ が含まれているが,

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11}^\mu \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12}^\mu \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix}$$
$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^{\mu T} \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22}^\mu \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}$$

に対し,

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_0^\mu & -S_0^\mu \\ -Q_0^\mu & -A_0^{\mu T} \end{bmatrix} \cdots\cdots (9)$$

が成立するので実際には，行列 A_0^μ，S_0^μ，Q_0^μ はリカッチ方程式 (8c) の解 $\bar{P}_{22}$ に依存しない [9][10]。したがって，リカッチ方程式 (8a) 及び (8c) は独立である。

次に，リカッチ方程式 (8a) において μ_s を以下のように定める [9][10]。

$\mu_s = \sup\{0 < \mu \leq \mu_f |$ リカッチ方程式 (8a) が正定対称である安定化解 $\bar{P}_{11}$ をもつ $\}$

以上から, 2 つのリカッチ方程式 (8a), (8c) は $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して, 正定対称である安定化解をもつ。ただし, $\bar{\mu} = \min\{\mu_s,\ \mu_f\}$ とする。

次に, 偏差を定義する。

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11},\ P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21},$$
$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

以上を方程式 (6) に代入する。 0– オーダ方程式 (7) を用いて，偏差 E についての以下の方程式 (11) が導出される。

$$E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} = -V^T H_1^T - H_1 V$$
$$+V^T H_3 V + \varepsilon H_2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11a)$$

$$E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} = H_1 \ \cdots\cdots\cdots (11b)$$

$$E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} = H_3 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11c)$$

ただし

$$H_1 = -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11}^\mu P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^{\mu T} P_{21}^T$$
$$+\varepsilon(E_{11}^T S_{12}^\mu E_{22} + E_{21}^T S_{22}^\mu E_{22})$$
$$H_2 = E_{11}^T S_{11}^\mu E_{11} + E_{21}^T S_{22}^\mu E_{21}$$
$$+E_{11}^T S_{12}^\mu E_{21} + E_{21}^T S_{12}^{\mu T} E_{11}$$
$$H_3 = -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11}^\mu P_{21}^T$$
$$+\varepsilon E_{22}^T S_{22}^\mu E_{22} + P_{21} S_{12}^\mu P_{22} + P_{22}^T S_{12}^{\mu T} P_{21}^T$$
$$D_1 = A_{11} - S_{11}^\mu \bar{P}_{11} - S_{12}^\mu \bar{P}_{21}$$
$$D_3 = A_{21} - S_{12}^{\mu T} \bar{P}_{11} - S_{22}^\mu \bar{P}_{21}$$
$$D_0 = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3,\ V = D_4^{-1} D_3$$

ここで, 方程式 (11) に対して, 以下の補題を得ることができる。

[**補題** 5]　ε が十分小さいと仮定する。また，仮定 1 が成立するとする。このとき, $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して, 方程式 (11) は唯一解 E_{11}，E_{21}，E_{22} をもつ。また, リカッチ方程式 (2) は正定対称解 P_ε をもつ。

(補題 5 の証明)　まず, 方程式 (11) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における唯一解 E_{11}，E_{21}，E_{22} の存在は陰関数定理により証明できる [9][10]。陰関数定理を用いるために，方程式 (11) に対するヤコビ行列を以下のように計算する。

[ヤコビ行列]

$$J^1|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & J_{23}^1 \\ 0 & 0 & J_{33}^1 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

ただし

$$J_{11}^1 = I \otimes D_0 + D_0^T \otimes I$$
$$J_{22}^1 = I \otimes D_4$$
$$J_{33}^1 = I \otimes D_4 + D_4^T \otimes I$$
$$J_{k1}^1 = \frac{\partial L_k^1}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2}^1 = \frac{\partial L_k^1}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0}$$
$$J_{k3}^1 = \frac{\partial L_k^1}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k = 1, 2, 3)$$
$$L_1^1 = E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V$$
$$-V^T H_3 V - \varepsilon H_2$$
$$L_2^1 = E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_1$$
$$L_3^1 = E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_3$$

$\otimes$ はクロネッカ積である。ここで，$D_4 = A_{22} - S_{22}^\mu \bar{P}_{22}$ は，$0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲に対してリカッチ方程式 (8c) が安定化解をもつので安定である。同様に, $A_0^\mu - S_0^\mu \bar{P}_{11}$ も $0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲に対してリカッチ方程式 (8a) が安定化解をもつので安定である。したがって,

$$A_0^\mu - S_0^\mu \bar{P}_{11} = D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3 = D_0 \ \cdots (13)$$

となるので，D_0 は安定となる。以上より，ヤコビ行列が非特異であるから，陰関数定理を適用して方程式 (11) に対する唯一解 E_{11}，E_{21}，E_{22} の存在が証明される。

続いて，リカッチ方程式 (2) の解 P_ε が正定対称解であることを示す。この証明は，$\varepsilon = 0$ の近傍における解 P_ε が正定対称解であることを示すことと等価である。(10) を利用して得られたリカッチ方程式 (2) の解 P_ε は

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + O(\varepsilon) & \varepsilon\{\bar{P}_{21} + O(\varepsilon)\}^T \\ \varepsilon\{\bar{P}_{21} + O(\varepsilon)\} & \varepsilon\{\bar{P}_{22} + O(\varepsilon)\} \end{bmatrix} \cdot\cdot (14)$$

となる。ここで, 以下の補題を準備する [14]。

[**補題 6–Schur Complement 補題**]　次の 2 条件は同値である。

(a)

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} > 0$$

(b)

$$Z > 0,\ \ X - YZ^{-1}Y^T > 0$$

以上の準備のもと, $\varepsilon = 0$ の近傍における解 P_ε が正定対称解であることを示すことは, Schur Complement 補

題より $\varepsilon\{\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)\} > 0$ かつ $[\bar{P}_{11}+O(\varepsilon)] - \varepsilon[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)]^T[\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)]^{-1}[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)] > 0$ であることを示すことと等価である。まず, $0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲ではリカッチ方程式 (8c) の解 $\bar{P}_{22}$ は正定である。したがって，十分小さな $\varepsilon = 0$ に対して, $\varepsilon\{\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)\} > 0$ は正定である。次に, ε が十分小さいとき, $\varepsilon\{\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)\} > 0$ は正定であるから逆行列が存在する。ここで, $[\bar{P}_{11}+O(\varepsilon)] - \varepsilon[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)]^T[\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)]^{-1}[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)]$ の第 1 項及び第 2 項に対してのオーダの違い (第 2 項には ε がある。)，かつ, $0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲ではリカッチ方程式 (8a) の解 $\bar{P}_{11}$ は正定であることから $[\bar{P}_{11}+O(\varepsilon)] - \varepsilon[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)]^T[\bar{P}_{22}+O(\varepsilon)]^{-1}[\bar{P}_{21}+O(\varepsilon)] > 0$ となる。したがって解 P_ε が正定対称解であることが示された。 □

補題 5 の結果から以下の定理を得る。

〔定理 1〕 ε が十分小さいと仮定する。また, 仮定 1 が成立するとする。このとき，2 つのリカッチ方程式 (8a), (8c) の正定対称かつ安定化解が存在すれば，すなわち, $\bar{\mu} = \min\{\mu_s,\ \mu_f\}$ が存在すれば $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_s,\ \mu_f\}$ を満たすすべての μ に対して，特異摂動システム (1) は制御器 (5) によって $\Delta(t)$ に無関係に 2 次安定である。

定理 1 で，ε は十分小さいと仮定している。これは，ε が十分小さくなければ, 制御器 (5) によって 2 次安定化不可能となるからである。詳しく説明すれば, ε が十分小さくないとき, ヤコビ行列 (12) の非特異性が崩れ, リカッチ方程式 (2) の正定対称解が存在しなくなるためである。したがって，応用上 ε がどの程度の大きさなら本論文の定理 1 で述べられている十分条件が成立するか問題となる。しかし，従来の再帰的アルゴリズムを利用した文献 (5), (9), (10) には定理が成立するための ε の上限値について何も言及されていない。以上から, 本論文の結果を適用するときは $\varepsilon = 0$ の近傍で制御器を設計する必要がある。(特に設計段階で，ε の大きさには十分な注意が必要である。)

(**注意 5**) 陰関数定理から $\varepsilon = 0$ の近傍で偏差の方程式 (11) の解 E_{11}, E_{21}, E_{22} が存在する。すなわち, $\varepsilon \in [0,\ \varepsilon^*)$ を満たすすべての ε に対してヤコビ行列 (12) が非特異となる ε^* が存在することは保証されている [(5)(9)(10)]。

2 次安定性の判定は，リカッチ方程式 (2) を利用して行うのでなく，2 つの低次元化されたリカッチ方程式 (8a), (8c) によって行う。この方法によって, ε が十分小さくても, ε に依存することなく 2 次安定化の判別ができる。ここで, $\bar{\mu}$ の探索には 2 分法を利用すれば良い。また, 制御器の構築は, 関係式 (10) の P_{11}, P_{21}, P_{22} を利用すれば良い。

従来の研究 [(3)(12)(13)] と比較して，本論文の定理 1 で述べられている 2 次安定性の条件は十分条件である。すなわち，文献 (3), (12), (13) に記述されている安定化条件と等価な本論文の補題 2 は, 特異摂動システム (1) が 2 次安定化可能であるための必要十分条件である。一方，本論文に記述されている定理 1 は，直接 ε を含むリカッチ方程式 (2) の可解性によって 2 次安定化可能を判定するのではなく, ε に依存しない低次元化された 2 つのリカッチ方程式 (8a)，(8c) を利用して 2 次安定性の判定を行っているので十分条件である。詳しく説明すれば，文献 (9), (10) の結果を応用して，リカッチ方程式 (2) が解析的に正定対称解をもつ μ の上限値を μ^*，2 つのリカッチ方程式 (8a)，(8c) がともに正定対称解をもつ μ の上限値を $\bar{\mu}$ とすれば, ε が十分小さいという仮定の下で $0 < \bar{\mu} \le \mu^*$ の関係が成立する。したがって, 本論文の定理 1 は, 特異摂動システム (1) が 2 次安定化可能であるための十分条件ということになる。(本論文では $0 < \bar{\mu} \le \mu \le \mu^*$ を満たす μ に対しては 2 次安定化可能かどうか不明である。)

5. ε–less 2 次安定化制御器

4 章では，リカッチ方程式 (2) の解 P_ε を直接求めるのではなく，低次元化された 2 つの独立なリカッチ方程式 (8a)，(8c) 及び 2 つのリアプノフ方程式 (11a)，(11c) を解くことによって (5) の制御器を構築した。従来, 著者らは偏差の方程式 (11) を解くために，再帰的アルゴリズム [(5)(9)(10)] を提案した。しかし, (5) を成分で表示すれば,

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} B_1^T\bar{P}_{11} + B_2^T\bar{P}_{21} + O(\varepsilon) \\ B_2^T\bar{P}_{22} + O(\varepsilon) \end{bmatrix} x(t) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

であり, ε が十分小さいとき (15) は以下の (16) に近似できる。

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} B_1^T\bar{P}_{11} + B_2^T\bar{P}_{21} & B_2^T\bar{P}_{22} \end{bmatrix} x(t) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

ただし，$\bar{P}_{11}$，$\bar{P}_{21}$，$\bar{P}_{22}$ は 0– オーダ方程式 (8) の解である。したがって，ε が十分小さいとき，ε を含まない制御器 (16) は, 制御器 (5) と同様に不確定要素 $\Delta(t)$ を含む特異摂動システム (1) を 2 次安定化できると予想される。以下の定理は, ε を含まない制御器 (16) が, 2 次安定化可能であることを保証するものである。

〔定理 2〕 ε が十分小さいと仮定する。また, 仮定 1 が成立するとする。このとき, $\bar{\mu} = \min\{\mu_s,\ \mu_f\}$ が存在すれば $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_s,\ \mu_f\}$ を満たすすべての μ に対して，特異摂動システム (1) は制御器 (16) によって $\Delta(t)$ に無関係に 2 次安定である。

(定理 2 の証明) 定理 1 と同様に陰関数定理によって証明できるので, 付録参考。 □

(**注意 6**)　定理 1 と同様に，定理 2 で述べられている 2 次安定性の条件も十分条件である。すなわち，リカッチ方程式 (2) が正定対称解をもつ (2 次安定化可能である)μ の上限値を μ^*，2 つのリカッチ方程式 (8a)，(8c) がともに正定対称解をもつ μ の上限値を $\bar{\mu}$ とすれば，ε が十分小さいという仮定の下で $0 < \bar{\mu} \le \mu^*$ の関係が成立する。

6. 設計手順

以下に，ε–less 2 次安定化制御器の設計手順を紹介する。

Step 1.　注意 4 で与えられる関係式 (9) (ハミルトン行列 T_0) を利用することによって，行列 A_0^μ，S_0^μ，Q_0^μ を計算する。

Step 2.　2 分法によって，2 つのリカッチ方程式 (8a)，(8c) の正定対称解が存在する μ の上限値 μ_f，μ_s を求める。$0 < \bar{\mu}(= \min\{\mu_s,\ \mu_f\})$ を満足すれば，$0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲で μ を決定して Step 3 に移る。ただし，$\bar{\mu}$ が使用計算機の計算精度よりも小さくなれば，特異摂動システム (1) は線形 2 次安定化不可能と判定する。

Step 3.　リカッチ方程式 (8a)，(8c) の正定対称かつ安定化解 $\bar{P}_{11}$，$\bar{P}_{22}$ を求める。ここで，リカッチ方程式 (8a)，(8c) は ε を含まないので，通常の方法で解くことができる。

Step 4.　制御器 (16) に 0– オーダ方程式 (8) で得られた解 $\bar{P}_{11}$，$\bar{P}_{21}$，$\bar{P}_{22}$ を代入する。

7. 数　値　例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し，ε–less 制御器 (16) を設計する。システムは以下で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(2\pi t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \cdot \ (17)$$

本論文の数値例では，不確定要素を除いたノミナルシステムの係数行列 A_{22} が $A_{22} = 0$ である非標準特異摂動システムなので，文献 (6)，(7) の結果は適用できない。したがって，従来の方法では 2 次安定化できないことに注意を要する。

2 次安定化制御器 $u(t)$ の構築は，6 章の設計手順に従う。ここで，システム (17) の係数行列は，$F_\varepsilon = [0\ \varepsilon^{-1}]^T$，$E = [0\ 1]$，$\Delta(t) = \sin(2\pi t)$ に対応している。まず，(9) で定義されているハミルトン行列 T_0 を用いて，A_0^μ，S_0^μ，Q_0^μ は

$$A_0^\mu = 0,\ S_0^\mu = \frac{1}{\mu+1},\ Q_0^\mu = \frac{\mu(2-\mu)}{1-\mu}$$

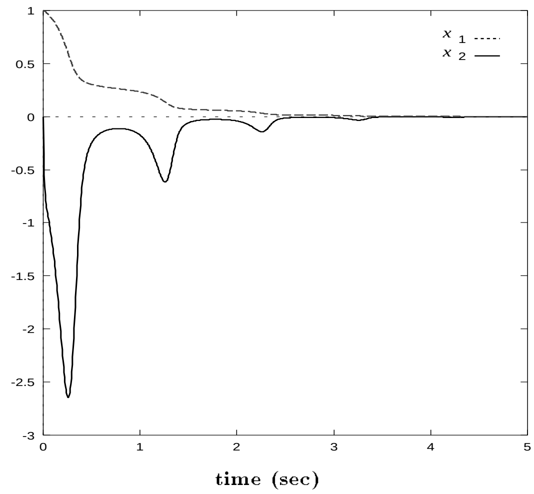

図 1　状態の応答

Fig. 1 The response of the state variables.

と計算される。本論文の数値例の場合，設計手順の Step 3 にある μ_f，μ_s の値は，それぞれ解析的に $\mu_f = \mu_s = 1$ と計算される。したがって，2 つのリカッチ方程式 (8a)，(8c) は $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_f,\ \mu_s\} = 1$ の範囲で正定対称かつ安定化解をもつ。さらに 0– オーダ方程式 (8) の解 $\bar{P}_{11}$，$\bar{P}_{21}$，$\bar{P}_{22}$ は解析的に

$$\bar{P}_{11} = \sqrt{\frac{\mu(1+\mu)(2-\mu)}{1-\mu}}$$

$$\bar{P}_{21} = \frac{\mu}{1-\mu}(1+\sqrt{2-\mu})$$

$$\bar{P}_{22} = \sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}}$$

と計算される。以上の結果から，特異摂動システム (17) を 2 次安定化する制御器は，$\bar{P}_{11}$，$\bar{P}_{21}$，$\bar{P}_{22}$ を制御器 (16) に代入することによって

$$u = -\frac{1+\sqrt{2-\mu}}{2(1-\mu)}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mu}{\mu(1-\mu)}}x_2 \quad \cdots (18)$$

と計算される。ただし，$0 < \mu < \bar{\mu} = 1$ の範囲で設計者が μ を設定する。

制御器 (18) をシステム (17) に入力したとき，付録で紹介するリカッチ方程式 (付2) の解 X_ε は，解析的に

$$X_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \varepsilon\beta \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

ただし，

$$\alpha = \frac{2\mu - 1 + \sqrt{2-\mu}}{2(1-\mu)} > 0$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu(1-\mu)}} - \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu(1-\mu)} - 4} \right) > 0$$

と計算される。したがって，簡単な計算から X_ε はリカッチ方程式 (付2) の準正定かつ安定化解となっていること

が確認できる。ここで, 有界実補題を適用して, ノルム条件 $||F_\varepsilon(sI-\bar{A}_\varepsilon)^{-1}E||_\infty < 1$ を満たし, かつ行列 $\bar{A}_\varepsilon$ は安定となる。以上から文献 (3) の Theorem 2.7 で述べられている等価性を利用して特異摂動システム (17) が ε–less 制御器 (18) によって 2 次安定化可能である。

本論文では, $0 < \mu = \sqrt{2}-1 < \bar{\mu} = 1$ と設定する。このとき, リカッチ方程式 (8a), (8c) の解はそれぞれ $\bar{P}_{11} = 1.25928$, $\bar{P}_{22} = 1$ となる。以上から ε–less 制御器 (18) は以下の (20) で与えられる。

$$u = -1.92842x_1 - 1.20711x_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

特異摂動システム (17) に制御器 (20) を入力したときのシュミレーション結果を図 1 に示す。ただし, 初期値は

$$\left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{cc} 1.0 & 0 \end{array}\right]^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

であり, $\varepsilon = 0.01$ とする。図 1 から状態変数 x_1, x_2 は時間の経過とともに 0 に収束していることが確認できる。したがって, $t \to \infty$ で, 2 つの状態変数 x_1, x_2 はともに $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$ であることが確認される。すなわち, 特異摂動システム (17) は制御器 (20) によって 2 次安定である。

8. まとめ

本論文は, 1 ブロックタイプの構造的不確かさを含む特異摂動システムについて, 特異摂動法を利用しない, すなわち係数行列である $A_{22} + F_2\Delta(t)E_2$ が非特異である仮定を行わないで, システムが 2 次安定になるための十分条件を導出した。導出には, H_∞ 制御理論に基づくゲーム型リカッチ方程式を利用した。また, 再帰的アルゴリズムの手法 [9][10] を利用しない ε を含まない簡単化された制御器の構築を提案した。したがって, 再帰的アルゴリズムを使用することなく, ε に無関係に独立した 2 つの 0– オーダ方程式 (リカッチ方程式) を解くだけで, 2 次安定性を保証する制御器を簡単に構築することが可能である。さらに, 2 次安定性の判定は, 上記の ε に独立した 2 つの 0– オーダ方程式 (リカッチ方程式) の可解条件によって行うことができる。

今後の課題として, Lin ら [8] によって研究されたディスクリプタ方程式に対する 2 次安定化問題を特異摂動システムに応用することが考えられる。

最後に, 本論文に関して証明の簡略化など有益なご指摘, ご指導を頂きました査読者に感謝いたします。

(平成 10 年 1 月 16 日受付, 同 10 年 7 月 29 日再受付)

文 献

(1) I.R.Petersen : “A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems” ; Systems & Control Letters, Vol.8, No.3, 351/357 (1987)
(2) K.Zhou and P.P.Khagonekar : “Robust Stabilization of Linear Systems with Norm Bounded Time–varing Uncertainty”, Systems & Control Letters, Vol.10, No.1, 17/20 (1988)
(3) P.P.Khargonekar, I.R.Petersen and K.Zhou : “Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control Theory”, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.35, No.3, 356/361 (1990)
(4) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis : “State Space Solution to Standard H_2, and H_∞ Control Ploblems”, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.34, No8, 831/847 (1989)
(5) Z.Gajic, D.Petkovski and X.Shen : “Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System – A Recursive Approach”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Berlin ; Springer – Verlag (1990)
(6) PZ.H.Shao and M.E.Sawan : “Robust Stability of Singularly Perturbed Systems”, INT.J.CONTROL, Vol.58, No.6 1469/1476 (1993)
(7) 鈴木, 小林, 安藤 : “特異摂動システムの二次安定化”, 計測自動制御学会論文集, Vol.32, No.11, 1493/1500 (1996)
(8) C.Lin, J.Wang, D.Wang and C.B.Soh : “Robustness of uncertain descriptor systems” ; Systems & Control letters, Vol.31, No.3, 129/137 (1997)
(9) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami : “Recursive Approach of H_∞ Control Problems for Singularly Perturbed Systems Under Perfect and Imperfect State Measurements”, INT.J.SYTEMS SCIENCE, (to appear).
(10) 向谷, 水上, 徐 : “標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム”, 計測自動制御学会論文集, Vol.34, No.6, 555/562 (1998)
(11) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly : “Singular Perturbation Methods in Control”, Analysis and Design, Academic Press (1986)
(12) 木村, 藤井, 森 : “ロバスト制御”, コロナ社, (1994)
(13) 計測と制御 : “ロバスト制御 –H^∞ 制御を中心にして”, 計測自動制御学会, Vol.29, No.2, (1990)
(14) SICE セミナー : “ロバスト制御入門 – テキスト”, 計測自動制御学会, (1998)

付 録

定理 2 の証明

この付録では定理 2 の証明を行う。証明の概略は定理 1 の証明とほぼ同様である。しかし, 定理 2 では, 近似制御器である ε–less 2 次安定化制御器 (16) を特異摂動システム (1) に入力するので, 証明を新たに行う必要がある。

まず, 制御器 (16) をシステム (1) に入力する。

$$\dot{x}(t) = (\bar{A}_\varepsilon + F_\varepsilon\Delta(t)E)x(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{付}1)$$

ただし,

$$\bar{A}_\varepsilon = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1}\bar{A}_{21} & \varepsilon^{-1}\bar{A}_{22} \end{array}\right]$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - \frac{1}{2\mu}(B_1B_1^T\bar{P}_{11} + B_1B_2^T\bar{P}_{21})$$

$$\bar{A}_{12} = A_{12} - \frac{1}{2\mu}B_1B_2^T\bar{P}_{22}$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21} - \frac{1}{2\mu}(B_2B_1^T\bar{P}_{11} + B_2B_2^T\bar{P}_{21})$$

$$\bar{A}_{22} = A_{22} - \frac{1}{2\mu}B_2B_2^T\bar{P}_{22}$$

有界実補題 [4][12][13] を利用すれば, 特異摂動システム (付1) が 2 次安定であるためには, 以下のリカッチ方程式

(付2)

$$\bar{A}_\varepsilon^T X_\varepsilon + X_\varepsilon \bar{A}_\varepsilon + X_\varepsilon F_\varepsilon F_\varepsilon^T X_\varepsilon$$
$$+E^T E + kI = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付2)}$$

ただし, k は正の任意の実数であり,

$$X_\varepsilon = \begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ \varepsilon X_{21} & \varepsilon X_{22} \end{bmatrix}$$

が正定対称解 X_ε をもてば良い[3]。

まず, 方程式 (付2) を分割計算する。

$$\bar{A}_{11}^T X_{11} + X_{11}^T \bar{A}_{11} + \bar{A}_{21}^T X_{21} + X_{21}^T \bar{A}_{21}$$
$$+X_{11}^T F_1 F_1^T X_{11} + X_{21}^T F_2 F_2^T X_{21}$$
$$+X_{11}^T F_1 F_2^T X_{21} + X_{21}^T F_2 F_1^T X_{11}$$
$$+R_{11} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 3a)}$$

$$\varepsilon X_{21} \bar{A}_{11} + X_{22}^T \bar{A}_{21} + \bar{A}_{12}^T X_{11} + \bar{A}_{22}^T X_{21}$$
$$+\varepsilon X_{21} F_1 F_1^T X_{11} + \varepsilon X_{21} F_1 F_2^T X_{21}$$
$$+X_{22}^T F_2 F_1^T X_{11} + X_{22}^T F_2 F_2^T X_{21}$$
$$+Q_{12}^T = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 3b)}$$

$$\bar{A}_{22}^T X_{22} + X_{22}^T \bar{A}_{22} + \varepsilon \bar{A}_{12}^T X_{21}^T + \varepsilon X_{21} \bar{A}_{12}$$
$$+X_{22}^T F_2 F_2^T X_{22} + \varepsilon X_{22}^T F_2 F_1^T X_{21}^T$$
$$+\varepsilon X_{21} F_1 F_2^T X_{22} + \varepsilon^2 X_{21} F_1 F_1^T X_{21}^T$$
$$+R_{22} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 3c)}$$

ただし,

$$R_{11} = E_1^T E_1 + kI,\ R_{22} = E_2^T E_2 + kI$$

リカッチ方程式 (付 3) において, $\varepsilon = 0$ とすれば, 0– オーダ方程式 (付 4) を得る。ここで, 0– オーダ方程式の解を $\bar{X}_{11}$, $\bar{X}_{21}$, $\bar{X}_{22}$ とおく。

$$\bar{A}_{11}^T \bar{X}_{11} + \bar{X}_{11}^T \bar{A}_{11} + \bar{A}_{21}^T \bar{X}_{21} + \bar{X}_{21}^T \bar{A}_{21}$$
$$+\bar{X}_{11}^T F_1 F_1^T \bar{X}_{11} + \bar{X}_{21}^T F_2 F_2^T \bar{X}_{21}$$
$$+\bar{X}_{11}^T F_1 F_2^T \bar{X}_{21} + \bar{X}_{21}^T F_2 F_1^T \bar{X}_{11}$$
$$+R_{11} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 4a)}$$

$$\bar{X}_{22}^T \bar{A}_{21} + \bar{A}_{12}^T \bar{X}_{11} + \bar{A}_{22}^T \bar{X}_{21} + \bar{X}_{22}^T F_2 F_1^T \bar{X}_{11}$$
$$+\bar{X}_{22}^T F_2 F_2^T \bar{X}_{21} + Q_{12}^T = 0 \quad \cdots\cdots \text{(付 4b)}$$

$$\bar{A}_{22}^T \bar{X}_{22} + \bar{X}_{22}^T \bar{A}_{22}$$
$$+\bar{X}_{22}^T F_2 F_2^T \bar{X}_{22} + R_{22} = 0 \quad \cdots\cdots \text{(付 4c)}$$

次に, 方程式 (7) は以下の方程式 (付 5) に変形できる。ここで, 方程式 (7) と (付 5) は同一である。

$$\bar{A}_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T \bar{A}_{11} + \bar{A}_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T \bar{A}_{21}$$
$$+\bar{P}_{11}^T F_1 F_1^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{21}^T F_2 F_2^T \bar{P}_{21}$$
$$+\bar{P}_{11}^T F_1 F_2^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T F_2 F_1^T \bar{P}_{11}$$
$$+Q_{11} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 5a)}$$

$$\bar{P}_{22}^T \bar{A}_{21} + \bar{A}_{12}^T \bar{P}_{11} + \bar{A}_{22}^T \bar{P}_{21}$$
$$+\bar{P}_{22}^T F_2 F_1^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{22}^T F_2 F_2^T \bar{P}_{21}$$
$$+Q_{12}^T = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 5b)}$$

$$\bar{A}_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{P}_{22}^T F_2 F_2^T \bar{P}_{22}$$
$$+Q_{22} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付 5c)}$$

したがって方程式 (付 4) 及び (付 5) を比較すれば, $k = \mu$ と設定したとして,

$$\bar{X}_{11} = \bar{P}_{11},\ \bar{X}_{21} = \bar{P}_{21},\ \bar{X}_{22} = \bar{P}_{22} \quad \cdots\cdots \text{(付6)}$$

となることが分かる。したがって, 方程式 (付 4) は 0– オーダ解 (付6) をもつ。次に, 偏差を定義する。

$$X_{11} = \bar{X}_{11} + \varepsilon M_{11},\ X_{21} = \bar{X}_{21} + \varepsilon M_{21},$$
$$X_{22} = \bar{X}_{22} + \varepsilon M_{22} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付7)}$$

以上を方程式 (付 3) に代入する。 0– オーダ方程式 (付 4) を用いて, 偏差 M についての以下の方程式 (付 8) が導出される。

$$M_{11}^T \hat{D}_0 + \hat{D}_0^T M_{11} = \hat{V}^T \hat{H}_1^T + \hat{H}_1 \hat{V}$$
$$-\hat{V}^T \hat{H}_3 \hat{V} - \varepsilon \hat{H}_2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(付 8a)}$$

$$M_{11}^T \hat{D}_2 + M_{21}^T \hat{D}_4 + \hat{D}_3^T M_{22} + \hat{H}_1 = 0 \quad \text{(付 8b)}$$

$$M_{22}^T \hat{D}_4 + \hat{D}_4^T M_{22} + \hat{H}_3 = 0 \quad \cdots\cdots \text{(付 8c)}$$

ただし

$$\hat{H}_1 = \bar{A}_{11}^T X_{21}^T + X_{11}^T F_1 F_1^T X_{21}^T + X_{21}^T F_2 F_1^T X_{21}^T$$
$$+\varepsilon(M_{11}^T F_1 F_2^T M_{22} + M_{21}^T F_2 F_2^T M_{22})$$
$$\hat{H}_2 = M_{11}^T F_1 F_1^T M_{11} + M_{21}^T F_2 F_2^T M_{21}$$
$$+M_{11}^T F_1 F_2^T M_{21} + M_{21}^T F_2 F_1^T M_{11}$$
$$\hat{H}_3 = \bar{A}_{12}^T X_{21}^T + X_{21} \bar{A}_{12} + \varepsilon X_{21} F_1 F_1^T X_{21}^T$$
$$+\varepsilon M_{22}^T F_2 F_2^T M_{22} + X_{21} F_1 F_2^T X_{22}$$
$$+X_{22}^T F_2 F_1^T X_{21}^T$$
$$\hat{D}_1 = \bar{A}_{11} + F_1 F_1^T \bar{X}_{11} + F_1 F_2^T \bar{X}_{21}$$
$$\hat{D}_2 = \bar{A}_{12} + F_1 F_2^T \bar{X}_{22}$$
$$\hat{D}_3 = \bar{A}_{21} + F_2 F_1^T \bar{X}_{11} + F_2 F_2^T \bar{X}_{21}$$
$$\hat{D}_4 = \bar{A}_{22} + F_2 F_2^T \bar{X}_{22}$$
$$\hat{D}_0 = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 \hat{D}_4^{-1} \hat{D}_3,\ \hat{V} = \hat{D}_4^{-1} \hat{D}_3$$

偏差の方程式 (付 8) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における唯一解 M_{11}, M_{21}, M_{22} の存在は, 4 章の [補題 5] の証明, あるいは, 本論文で扱っているリカッチ方程式が, H_∞ タイプリカッチ方程式であることから, 文献 (11) の証明と同様に陰関数定理により証明できる。陰関数定理を用いるために, 方程式 (付 8) に対するヤコビ行列を以下のように計算する。

[ヤコビ行列]

$$J^2|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & 0 & 0 \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & J_{23}^2 \\ 0 & 0 & J_{33}^2 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(付9)}$$

ただし

$$J_{11}^2 = I \otimes \hat{D}_0 + \hat{D}_0^T \otimes I$$
$$J_{22}^2 = I \otimes \hat{D}_4$$
$$J_{33}^2 = I \otimes \hat{D}_4 + \hat{D}_4^T \otimes I$$
$$J_{k1}^2 = \frac{\partial L_k^2}{\partial M_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2}^2 = \frac{\partial L_k^2}{\partial M_{21}}|_{\varepsilon=0}$$
$$J_{k3}^2 = \frac{\partial L_k^2}{\partial M_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k = 1, 2, 3)$$
$$L_1^2 = M_{11}^T \hat{D}_0 + \hat{D}_0^T M_{11} - \hat{V}^T \hat{H}_1^T - \hat{H}_1 \hat{V} + \hat{V}^T \hat{H}_3 \hat{V} + \varepsilon \hat{H}_2$$
$$L_2^2 = M_{11}^T \hat{D}_2 + M_{21}^T \hat{D}_4 + \hat{D}_3^T M_{22} + \hat{H}_1$$
$$L_3^2 = M_{22}^T \hat{D}_4 + \hat{D}_4^T M_{22} + \hat{H}_3$$

ここで, $\hat{D}_4$ の安定性に関しては, $\bar{X}_{22} = \bar{P}_{22}$ に注意して, $\hat{D}_4 = \bar{A}_{22} + F_2 F_2^T \bar{X}_{22} = \bar{A}_{22} + F_2 F_2^T \bar{P}_{22}$ が成立し, リカッチ方程式 (8c) が, 正定対称かつ安定化解 $\bar{P}_{22}$ をもつので $\hat{D}_4 = \bar{A}_{22} + F_2 F_2^T \bar{X}_{22} = \bar{A}_{22} + F_2 F_2^T \bar{P}_{22}$ は安定となる。続いて, $\hat{D}_0 = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 \hat{D}_4^{-1} \hat{D}_3$ の安定性を示す。まず, 方程式 (付 4) は $\hat{D}_4$ の安定性を利用してリカッチ方程式 (付10) に変形できる[(9)]。

$$\bar{X}_{11}^T \hat{A} + \hat{A}^T \bar{X}_{11} + \bar{X}_{11}^T \hat{S} \bar{X}_{11} + \hat{Q} + kI = 0 \ \cdot \text{(付10)}$$

ただし

$$\hat{A} = \bar{A}_{11} + \hat{N}_1 \bar{A}_{21} + F_1 F_2^T \hat{N}_2^T + \hat{N}_1 F_2 F_2^T \hat{N}_2^T$$
$$\hat{S} = (F_1 + \hat{N}_1 F_2)(F_1 + \hat{N}_1 F_2)^T$$
$$\hat{Q} = E_1^T E_1 + \hat{N}_2 \bar{A}_{21} + \bar{A}_{21}^T \hat{N}_2^T + \hat{N}_2 F_2 F_2^T \hat{N}_2^T$$
$$\hat{N}_2 = -\tilde{Q}_{12} \hat{D}_4^{-1},\ \hat{N}_1 = -\hat{D}_2 \hat{D}_4^{-1}$$
$$\tilde{Q}_{12} = Q_{12} + \bar{A}_{21}^T \bar{X}_{22}$$

(注意 7) 行列 $\hat{A}$, $\hat{S}$, $\hat{Q}$ を記述する公式の中には, リカッチ方程式 (付 4c) の解 $\bar{X}_{22}$ が含まれているが, 実際には方程式 (付 4c) の解 $\bar{X}_{22}$ に依存しない[(9)(10)]。つまり, リカッチ方程式 (付10) は $\bar{X}_{22}$ と独立である。

リカッチ方程式 (8a) の正定対称かつ安定化解 $\bar{P}_{11}$ が存在することに注目し, 2 つの方程式 (付 4), (付 5) の等価性からリカッチ方程式 (付10) の特殊な解として正定対称解 $\bar{X}_{11} = \bar{P}_{11}$ を選ぶことができる。したがって, リカッチ方程式 (付10) は正定対称解 $\bar{X}_{11} = \bar{P}_{11}$ をもつので, 有界実補題から $\hat{A} + \hat{S}\bar{X}_{11}$ は安定である。また, 簡単な計算から

$$\hat{A} + \hat{S}\bar{P}_{11} = \hat{A} + \hat{S}\bar{X}_{11} = \hat{D}_1 - \hat{D}_2 \hat{D}_4^{-1} \hat{D}_3 = \hat{D}_0$$

が成立するので $\hat{D}_0$ の安定性が示された。

以上より, ヤコビ行列 (付9) が非特異行列であるから, 陰関数定理を適用して方程式 (付 8) に対する唯一解 M_{11}, M_{21}, M_{22} の存在が証明される。証明の最後に残っているリカッチ方程式 (付2) の解 X_ε の正定対称性は, 4 章の補題 5 の証明と同様にできる。以上から, リカッチ方程式 (付2) の解 X_ε が正定対称であることが示されたので, 有界実補題を利用して $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_s, \mu_f\}$ の範囲では, 十分小さな ε に対して, 特異摂動システム (1) が ε–less 制御器 (16) によって 2 次安定化可能である。 □

向 谷 博 明 (正員) 1969 年 11 月 14 日生。1992 年広島大学総合科学部数理情報科学専攻卒業。94 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士 (工学)。98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手。現在に至る。主として, ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事。計測自動制御学会, 機械学会などの会員。

水 上 孝 一 (正員) 1936 年 3 月 30 日生。1958 年広島大学工学部電気工学科卒業。60 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。63 年同博士課程修了。63 年京都大学工学部助手, トロント大学客員研究員などを経て, 68 年広島大学工学部助教授, 77 年同総合科学部教授, 同大学院工学研究科担当, 現在に至る。関数解析, 最適制御, 微分ゲーム, 情報検索などの研究に従事 (工学博士)。 J. of Math. Analysis & Application 並びに Dynamics and Control: An Int. Journal の編集員。 IFAC の T.C. 委員。計測自動制御学会フェロー。情報処理学会, 計測自動制御学会, システム制御情報学会などの会員。