論　文

構造的不確かさを有する特異摂動システムのためのロバスト安定性

正　員　向　谷　博　明　（広島市立大学）
正　員　水　上　孝　一　（広　島　大　学）

Robust Stabilization for Singularly Perturbed Systems with Structured State Space Uncertainties

Hiroaki Mukaidani, Member (Hiroshima City University), Koichi Mizukami, Member (Hiroshima University)

This paper considers the robust stability of singularly perturbed systems with structured state space uncertainties. By making use of Lyapunov stability criterion and combining with the Lyapunov equations, a new approach for deciding a robust stability for uncertain linear singularly perturbed systems is presented. Based on the assumption that the reduced nominal system is stable, we also derive some sufficient conditions for robust stability. Some analytical methods and the Bellman–Gronwall inequality are used to investigate such sufficient conditions.

It is worth pointing out that in this paper, we do not need to investigate both the slow system and the fast system by using the singularly perturbation method because of the proposed method is very direct. Furthermore, we only assume that the uncertainties are a norm bounded. Therefore, the robust stability condition derived here is less conservative than those reported in the control literatures. An numerical example is given to demonstrate the validity of our new results.

キーワード：特異摂動システム，構造的不確かさ, Bellman–Gronwall Lemma, ロバスト安定性

1. はじめに

特異摂動システムの分野において確立された解析及び設計手法の１つに特異摂動法[(1)]がある。この方法は，まず，full–order system において，摂動パラメータである ε を恒等的に０にする。次に，標準的な仮定である係数行列 A_{22} が非特異であることを利用して得られる slow system，および，$\tau = t/\varepsilon$ に変換して得られる fast system の２つの subsystem について，それぞれ独立に解析及び設計を行う。最後に，低次元化された２つの subsystem から得られた結果を利用して，full–order system の解析及び設計を行うものである。特異摂動システムにおける安定性の解析も，その例外でなく，大部分が特異摂動法によって解析が行われている[(1)(3)〜(7)]。

特異摂動システムの安定解析の問題は大きく分けて２つに分類することができる。１つは，システムの係数行列が時変である特異摂動システムを対象にした安定解析である[(1)(3)〜(5)]。この場合，システムの係数行列の要素は非線形であっても，その具体的な関数が既知であることを前提にしている。Kokotović[(1)] らや Javid[(3)] は，特異摂動システムが漸近安定であるための ε の範囲を導出している。また，O'Reilly[(4)] は，システムが安定化するための合成制御則を提案している。もう１つは，係数行列に不確定要素を含んだ特異摂動システムのロバスト安定化(安定性) についての解析である[(6)(7)]。この場合，システムの係数行列は，ノミナル部分と不確定要素の部分の和として表現することができる。ここで，ノミナル部分の係数行列は時不変であり，不確定要素の部分の係数行列は時変又は時不変である。不確定要素の部分の係数行列については，その大きさの上限値，下限値は知らされているが具体的な関数は未知である。このロバスト安定性問題について，Shao ら[(6)] は，時不変な不確かさを有する特異摂動システムに対して，行列の H_∞ ノルムによる指標を用いてシステムが安定するための ε の範囲を導出している。また，鈴木ら[(7)] は，時変な構造的不確かさを有する特異摂動システムに対してリアプノフ関数を用いてシステムが２次安定化するための制御器を構築している。

著者らは，文献 (15), (16) の定理の証明に，以下の特異摂動システム (1) が十分小さな ε に対して漸近安定である補題を利用している。しかし，この ε に依存する不確定

要素 $O(\varepsilon)$ を含む特異摂動システムの漸近安定性の補題に関して, 現在のところ厳密な証明は行われていない。すなわち, 過去の研究 [1] と比較して, 係数行列 M_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ に時不変な不確定要素 $O(\varepsilon)$ を含んだ以下のシステム (1)

$$\dot{y}_1 = [M_{11} + O_{11}(\varepsilon)]y_1 + [M_{12} + O_{12}(\varepsilon)]y_2 \cdots (1a)$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = [M_{21} + O_{21}(\varepsilon)]y_1 + [M_{22} + O_{22}(\varepsilon)]y_2 \cdot (1b)$$

$$y_1(t_0) = y_1^0,\quad y_2(t_0) = y_2^0$$

が $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ を満たすすべての ε で漸近安定となるような $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在する (ここで, M_{22}^{-1} が存在して, $M_0 = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ および M_{22} が安定行列である。) 証明は行われていない。

文献 (1), (6) の中ではシステム内に制御入力がない自律系に対して安定性の研究を行っているが, 先に述べたように, 文献 (1) には, 係数行列 M_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ に不確定要素 $O(\varepsilon)$ を含んだ上記のシステム (1) の安定性に対しては何も言及されていない。また, 文献 (6) の Example 1 では不確定要素は時不変である。以上のことを考慮して, 時変な構造的不確かさを含む特異摂動システムの安定性の研究は大いに興味がある。

本論文では, ε に依存する時不変な不確定要素 $O(\varepsilon)$ を文献 (8) (12) で扱われている時変な構造的不確かさに拡張して, 特異摂動システムの安定性を研究する。本論文では, 特異摂動システムの安定性に対して, Kokotović ら [1] によって提案された座標変換法を用いて, ノミナル部分の係数行列を対角ブロックに変換する。後に, この対角ブロックに変換されたシステムを大規模システムと考えることによって, Zhang ら [13] によって提案された安定性の手法を利用して, full–order system の指数漸近安定を保証する十分条件を導出する。導出された十分条件を満足すれば, 十分小さな ε に対してノルム有界である時変な構造的不確かさを含む特異摂動システムは指数漸近安定であることが示される。さらに, 本論文の中で得られた結果を応用すれば, 十分小さな ε に対して時不変な不確定要素 $O(\varepsilon)$ を含んだシステム (1) は漸近安定であることが示される。すなわち, 文献 (15), (16) の定理の証明にある補題が成立することが示される。

本論文の中では特に断わらない限り, 以下の記号を用いる。 $||X||_S$ は, 任意の実正方行列 $X \in \mathbf{R}^{k_1 \times k_1}$ の最大特異値 $||X||_S \equiv [\lambda_{\max}(X^T X)]^{1/2}$ を表す。 $||G(s)||_\infty$ は, 伝達関数行列 $G(s) \in \mathbf{R}^{k_2 \times k_3}$ の H_∞ ノルム $||G(s)||_\infty \equiv \sup_s[\lambda_{\max}(G^*(s)G(s))]^{1/2}$ $(s = j\omega,\ \omega \in \mathbf{R})$ を表す。 $||x||_E$ はベクトル $x \in \mathbf{R}^{k_4}$ のユークリッドノルム $||x||_E \equiv [x^T x]^{1/2}$ を表す。 $\lambda_i(X)$ は, 任意の実正方行列 $X \in \mathbf{R}^{k_1 \times k_1}$ の i 番目の固有値を表す。一方, $\mathrm{Re}\lambda_i(X)$ は任意の実正方行列 X の i 番目の固有値の実数部分を表す。 Z^+ はモジュラス行列 (modulus matrix), すなわち任意の実数行列 $Z = [z_{ij}] \in \mathbf{R}^{k_5 \times k_6}$ に対して, 全ての要素に絶対値をとった行列 $Z^+ = [|z_{ij}|] \in \mathbf{R}^{k_5 \times k_6}$ を表す。また, 任意の実数行列 $Z,\ Y \in \mathbf{R}^{k_5 \times k_6}$ に対して, $Z[\le]Y$ はすべての $(i,\ j)$ 要素に対し $z_{ij} \le y_{ij}$ を意味する。

2. 問題設定

以下の不確定要素を含む特異摂動システムを考える。

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} + \Delta A_{11}(t)]x_1(t) + [A_{12} + \Delta A_{12}(t)]x_2(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (2a)$$

$$\varepsilon\dot{x}_2(t) = [A_{21} + \Delta A_{21}(t)]x_1(t) + [A_{22} + \Delta A_{22}(t)]x_2(t) \cdots\cdots\cdots\cdots (2b)$$

ここで, システム (2b) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ。 $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1, 2)$ は状態ベクトルである。また, 初期状態は $x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0$ で与えられる。 $\Delta A_{ij}(t) (\equiv \Delta A_{ij})$ $(i = 1, 2\ j = 1, 2)$ はシステムの不確かさを表す未知の有界な関数行列である。次に, システム (2) に関して, 安定性の条件を求めるために基本的仮定を行う。

[仮定 1]　システム (2) は, 以下で与えられる構造的不確かさをもつ [8] [12]。

$$|\Delta a_{kl}^{ij}(t)| \le \bar{a}_{kl}^{ij},\ i = 1, 2\ j = 1, 2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで, $\Delta a_{kl}^{ij}(t)$ は不確定行列関数 $\Delta A_{ij}(t)$ の (k, l) 要素, $\bar{a}_{kl}^{ij}$ は $|\Delta a_{kl}^{ij}(t)|$ の上限を表す。したがって, 構造的不確かさ $\Delta A_{ij}(t)$ は (3) で定義される上限値をもつ有界な関数である。ここで, $\bar{A}_{ij}$ を各 (k, l) 要素が $\bar{a}_{kl}^{ij}$ である行列と定義すれば (3) は

$$\Delta A_{ij}(t)^+[\le]\Delta\bar{A}_{ij},\ i = 1, 2\ j = 1, 2 \cdots\cdots\cdots (4)$$

と表現できる。

3. 特異摂動システムのロバスト安定性

まず, 一般性を失うことなく特異摂動システム (2) に対して, 以下の仮定をおく [1]。

[仮定 2]　係数行列 A_{22} は非特異である。すなわち, A_{22}^{-1} は存在する。さらに $A_{22}, A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ は安定行列である。

次に, 本論文の主なる結果として, 指数漸近安定性を保証する以下の定理を示す。

〔定理 1〕　ε は十分小さいと仮定する。また, 以下の不等式が成立するように正の実数 $\alpha_1,\ \alpha_2$ を任意に設定する。

$$\alpha_1 < \min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_s)|, i = 1, 2, \cdots\} \cdots\cdots (5a)$$

$$\alpha_2 < \min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_f)|, i=1,2,\cdots\} \quad \cdots\cdots (5b)$$

このとき，仮定 1 及び仮定 2 が成立する条件のもとで，以下の 3 つの不等式，

$$\alpha_1 > \beta_{11}K_1^2 \quad \cdots\cdots (6a)$$

$$\alpha_2 > \beta_{22}K_2^2 \quad \cdots\cdots (6b)$$

$$(\alpha_1 - \beta_{11}K_1^2)(\alpha_2 - \beta_{22}K_2^2) > \beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2 \quad \cdots\cdots (6c)$$

を同時に満足するとき，システム (2) は指数漸近安定である。ここで，

$$T^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_f \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \varepsilon H \\ -L & I_{n_2} - \varepsilon LH \end{bmatrix}$$

$$A_s = A_{11} - A_{12}L = A_0 + O(\varepsilon)$$

$$A_f = A_{22} + \varepsilon LA_{12} = A_{22} + O(\varepsilon)$$

$$||\Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{12}L^+ + H^+\{\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}L^+\} + \varepsilon(HL)^+\{\Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{12}L^+\}||_S = \beta_{11}$$

$$||\Delta\bar{A}_{12} + H^+\Delta\bar{A}_{22} + \varepsilon\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ + \Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\} + \varepsilon\{(HL)^+\Delta\bar{A}_{12} + H^+\Delta\bar{A}_{21}H^+ + H^+\Delta\bar{A}_{22}(LH)^+\} + \varepsilon^2(HL)^+\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ + \Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\}||_S = \beta_{12}$$

$$||\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}L^+ + \varepsilon L^+\{\Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{12}L^+\}||_S = \beta_{21}$$

$$||\Delta\bar{A}_{22} + \varepsilon\{L^+\Delta\bar{A}_{12} + \Delta\bar{A}_{21}H^+ + \Delta\bar{A}_{22}(LH)^+\} + \varepsilon^2L^+\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ + \Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\}||_S = \beta_{22}$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}},\ K_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\lambda_{\min}(P_2)}}$$

$$A_{22}L - A_{21} - \varepsilon L(A_{11} - A_{12}L) = 0 \quad \cdots\cdots (7a)$$

$$H(A_{22} + \varepsilon LA_{12}) - A_{12} - \varepsilon(A_{11} - A_{12}L)H = 0 \quad \cdots\cdots (7b)$$

$$(A_s + \alpha_1 I)^T P_1 + P_1(A_s + \alpha_1 I) + Q_1 = 0 \quad (7c)$$

$$(A_f + \alpha_2 I)^T P_2 + P_2(A_f + \alpha_2 I) + Q_2 = 0 \quad (7d)$$

である。

ただし，L，H はそれぞれ非線形方程式 (7a), (7b) の解であり，P_1，P_2 はそれぞれリアプノフ方程式 (7c), (7d) の正定対称解である。さらに，Q_1，Q_2 は任意の正定対称行列である。

(注意 1)　文献 (1) から，仮定 2 の条件のもとでは十分小さい ε に対して非線形方程式 (7a), (7b) の解が必ず存在することが示されている。

(注意 2)　本論文では，文献 (6), (7) と異なり，定理の証明に特異摂動法を利用しない。この理由は以下の通りである。特異摂動システム (2) に対して，特異摂動法を利用して 2 つの subsystem に分割することを考える。fast system

$$\varepsilon\dot{\hat{x}}_2(t) = [A_{22} + \Delta A_{22}(t)]\hat{x}_2(t) \quad \cdots\cdots (8)$$

に対しては，従来の手法[(8)〜(11)(17)(18)] を利用して 2 次安定性を判定できる。一方，slow system

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = [(A_{11} + \Delta A_{11}(t)) - (A_{12} + \Delta A_{12}(t))(A_{22} + \Delta A_{22}(t))^{-1} \cdot(A_{21} + \Delta A_{21}(t))]\bar{x}_1(t) \quad \cdots\cdots (9)$$

に対しては，$\Delta A_{22}(t)$ によって生じる $(A_{22}+\Delta A_{22}(t))^{-1}$ の構造的不確かさが陽に表現できないので，従来の手法[(8)〜(11)(17)(18)] を利用しようとすれば何らかの工夫を行って 2 次安定性を判定しなければならない。例えば，鈴木ら[(7)] は $||(A_{22} + \Delta A_{22}(t))^{-1}|| \le \bar{\delta}_{22}$ の存在を仮定して 2 次安定性を研究している。しかし，この方法では不確かさ $\Delta A_{22}(t)$ の大きさまで陽に考慮しているとはいえない。又，Shao ら[(6)] は，H_∞ ノルムを利用して不確かさ ΔA_{22} を $||\Delta A_{22}||_\infty \le h||(sI - A_{22})^{-1}||_\infty^{-1}$，$h < 1$ として上限を設定している。しかし，この方法も h を導入しているので不確かさ $\Delta A_{22}(t)$ の大きさを完全に考慮しているとはいえない。

(注意 3)　設計パラメータ $\alpha_1 > 0$，$\alpha_2 > 0$ は不等式 (5) が成立するように，なるべく大きく選ぶ必要がある。これは，設計パラメータ α_1，α_2 が小さいと不等式 (6) が成立しなくなるためである。

定理の証明の前に，以下の 3 つの補題を準備する。

[補題 1][(2)(12)]　(Bellman–Gronwall Lemma)

$p(t)$，$q(t)$ は不等式 (10) を満たす正の値をとる関数とする。又，N は正の定数とする。

$$p(t) \le q(t) + N\int_0^t p(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots (10)$$

このとき，以下の不等式 (11) または (12) が成立する。

$$p(t) \le q(0)\exp(Nt) + \int_0^t \dot{q}(\tau)\exp\{N(t-\tau)\}d\tau \quad \cdots\cdots (11)$$

$$p(t) \leq q(t) + N\int_0^t q(\sigma)\exp\{N(t-\sigma)\}d\sigma \cdots (12)$$

[補題 2] [12]　任意のベクトル w と任意の実数行列 X に対して, $w^TXw \leq ||w||_E^2||X||_S$ が成立する。

[補題 3] [8]　任意の実数行列 X に対して, $||X||_S \leq ||X^+||_S$ が成立する。

定理 1 の証明の概略は以下である まず, 線形変換 [1] によってシステムを 2 つに分割する。次に, 分割された 2 つのシステムを大規模システムと想定して full–order system のリアプノフ関数を考えることによって十分条件を導出する。

(証明)　仮定 2 から線形変換行列 $y(t) = T^{-1}x(t)$ が存在する†。この線形変換行列を用いることによって, システム (2) をシステム (13) に変換する [1]。

$$\dot{y}_1 = A_s y_1 + \Delta\tilde{A}_{11}y_1 + \Delta\tilde{A}_{12}y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (13a)$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = A_f y_2 + \Delta\tilde{A}_{21}y_1 + \Delta\tilde{A}_{22}y_2 \cdots\cdots\cdots (13b)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Ty(t) \cdots (13c)$$

ただし,

$$T^{-1}\begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} \\ \varepsilon^{-1}\Delta A_{21} & \varepsilon^{-1}\Delta A_{22} \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1}\Delta\tilde{A}_{21} & \varepsilon^{-1}\Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

関係式 (13c) の $x(t)$ についてノルムをとれば

$$||x(t)||_E \leq ||T||_S \cdot ||y(t)||_E \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

を得る。$||T||_S$ は有界であるから, $||y(t)||_E \to 0$ は $||x(t)||_E \to 0$ と等価である。したがって, $||y(t)||_E$ の収束性について研究する。まず, 以下の (15) で与えられるリアプノフ関数 $V(y,t)$ を考える。

$$\begin{aligned} V(y,t) &= V_1(y_1,t) + \varepsilon V_2(y_2,t) \\ &= y_1^T(t)P_1y_1(t) + \varepsilon y_2^T(t)P_2y_2(t) \cdots (15) \end{aligned}$$

ここで, 仮定 2 から, ε が十分小さいとき A_s, A_f はともに安定行列となる。したがって, 2 つのリアプノフ方程式 (7c), (7d) はリアプノフの定理からそれぞれ正定対称解 P_1, P_2 をもつ。以上から, Rayleigh's principle [12] を用いて不等式 (16) を得る。

†ここで, 考えている ε は, 線形変換 T が存在する ε の最大値 ε^* に対して, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ を満たす。したがって, 以後取り扱う ε は, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ を満たす十分小さな ε に対して解析を行う。

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P_i)||y_i||_E^2 &\leq V_i(y_i,t) \\ &\leq \lambda_{\max}(P_i)||y_i||_E^2, \quad (i=1,\ 2) \quad (16) \end{aligned}$$

次に, リアプノフ関数 (15) を軌道 $y(t)$ に沿って時間微分を行い, システム (13a), (13b) を代入する。さらに, 補題 2 を用いれば下記式 (17) になる。

$$\begin{aligned} &\frac{dV(y,t)}{dt} \\ &\leq -2\sum_{i=1}^{2}\alpha_i V_i(y_i,t) \\ &\quad +2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}||y_i^T P_i||_E||\Delta\tilde{A}_{ij}||_S \cdot ||y_j||_E \cdots (17) \end{aligned}$$

ここで, 不確定要素である係数行列 $\Delta\tilde{A}_{ij}$ $(i = 1,2\ j = 1,2)$ の各要素は (18) を満たす。

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{A}_{11} &= \Delta A_{11} - \Delta A_{12}L - H\Delta A_{21} + H\Delta A_{22}L \\ &\quad +\varepsilon HL(\Delta A_{11} + \Delta A_{12}L) \cdots\cdots\cdots\cdots (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{A}_{12} &= \Delta A_{12} - H\Delta A_{22} + \varepsilon(\Delta A_{11} - \Delta A_{12}L)H \\ &\quad -\varepsilon H(L\Delta A_{12} + \Delta A_{21}H - \Delta A_{22}LH) \\ &\quad -\varepsilon^2 HL(\Delta A_{11} - \Delta A_{12}L)H \cdots\cdots (18b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{A}_{21} &= \Delta A_{21} \\ &\quad -\Delta A_{22}L + \varepsilon L(\Delta A_{11} - \Delta A_{12}L) \cdots (18c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{A}_{22} &= \Delta A_{22} + \varepsilon(L\Delta A_{12} + \Delta A_{21}H - \Delta A_{22}LH) \\ &\quad +\varepsilon^2(L\Delta A_{11} - L\Delta A_{12}L)H \cdots\cdots\cdots (18d) \end{aligned}$$

ε が十分小さいとき, 仮定 1 及び補題 3 を用いれば

$$\begin{aligned} ||\Delta\tilde{A}_{11}||_S &\leq ||\Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{12}L^+ \\ &\quad +H^+\{\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}L^+\} \\ &\quad +\varepsilon(HL)^+\{\Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{12}L^+\}||_S \\ &= \beta_{11} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\Delta\tilde{A}_{12}||_S &\leq ||\Delta\bar{A}_{12} + H^+\Delta\bar{A}_{22} + \varepsilon\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ \\ &\quad +\Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\} + \varepsilon\{(HL)^+\Delta\bar{A}_{12} \\ &\quad +H^+\Delta\bar{A}_{21}H^+ + H^+\Delta\bar{A}_{22}(LH)^+\} \\ &\quad +\varepsilon^2(HL)^+\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ \\ &\quad +\Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\}||_S = \beta_{12} \cdots\cdots (19b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\Delta\tilde{A}_{21}||_S &\leq ||\Delta\bar{A}_{21} + \Delta\bar{A}_{22}L^+ + \varepsilon L^+\{\Delta\bar{A}_{11} \\ &\quad +\Delta\bar{A}_{12}L^+\}||_S = \beta_{21} \cdots\cdots\cdots (19c) \end{aligned}$$

$$||\Delta\tilde{A}_{22}||_S \le ||\Delta\bar{A}_{22} + \varepsilon\{L^+\Delta\bar{A}_{12} + \Delta\bar{A}_{21}H^+ + \Delta\bar{A}_{22}(LH)^+\} + \varepsilon^2 L^+\{\Delta\bar{A}_{11}H^+ + \Delta\bar{A}_{12}(LH)^+\}||_S = \beta_{22} \quad \cdots\cdots \text{(19d)}$$

となる β_{ij} $(i=1,2\ j=1,2)$ が存在する。したがって，関係式 (19) 及び不等式 (16) を用いて不等式 (20) が得られる。

$$\frac{dV(y,t)}{dt} \le -2\sum_{i=1}^{2}\alpha_i V_i(y_i,t) + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_i)}}\sqrt{V_i(y_i,t)}\beta_{ij}||y_j||_E \quad (20)$$

不等式 (20) を考察する代わりに，以下の 2 つの不等式 (21a), (21b)

$$\frac{dV_1(y_1,t)}{dt} \le -2\alpha_1 V_1(y_1,t) + 2\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \cdot\sqrt{V_1(y_1,t)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j||_E \quad \cdots\cdots \text{(21a)}$$

$$\varepsilon\frac{dV_2(y_2,t)}{dt} \le -2\alpha_2 V_2(y_2,t) + 2\frac{\lambda_{\max}(P_2)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_2)}} \cdot\sqrt{V_2(y_2,t)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{2j}||y_j||_E \quad \cdots \text{(21b)}$$

が成立するとき，不等式 (20) を満足するので，不等式 (21a), (21b) について考察する。まず, (21a) を直接積分すれば

$$V_1(t) \le \lambda_{\max}(P_1)||y_1^0||_E^2\exp(-2\alpha_1 t) + 2\int_0^t \exp\{-2\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \cdot\sqrt{V_1(\tau)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \quad \cdots\cdots \text{(22)}$$

となる。ここで, 補助関数

$$S_1(t) = \left[\lambda_{\max}(P_1)||y_1^0||_E^2\exp(-2\alpha_1 t) + 2\int_0^t \exp\{-2\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \cdot\sqrt{V_1(\tau)}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots \text{(23)}$$

を定義する。$S_1(t)$ を t について微分する。

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = -\alpha_1 S_1(t) + \frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}}\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j||_E \quad \cdots\cdots \text{(24)}$$

さらにもう一度 (24) を直接積分すれば,

$$S_1(t) \le \sqrt{\lambda_{\max}(P_1)}||y_1^0||_E\exp(-\alpha_1 t) + \int_0^t \exp\{-\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \cdot\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \quad \cdots\cdots \text{(25)}$$

となる。したがって,

$$||y_1(t)||_E \le \sqrt{\frac{V_1(t)}{\lambda_{\min}(P_1)}} \le \frac{S_1(t)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_1)}} \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}}||y_1^0||_E\exp(-\alpha_1 t) + \int_0^t \exp\{-\alpha_1(t-\tau)\}\frac{\lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)} \cdot\sum_{j=1}^{2}\beta_{1j}||y_j(\tau)||_E d\tau \quad \cdots\cdots \text{(26)}$$

を得ることができる。(26) の両辺に $\exp(-\alpha_1 t)$ を掛けて, Bellman–Gronwall 不等式 (11) を利用すれば (27) 式が得られる。

$$||y_1(t)||_E \le K_1||y_1^0||_E\exp\{(\beta_{11}K_1^2-\alpha_1)t\} + \beta_{12}K_1^2\int_0^t ||y_2(\tau)||_E \cdot\exp\{(\beta_{11}K_1^2-\alpha_1)(t-\tau)\}d\tau \quad \cdot \text{(27)}$$

(21b) に対して, (21a) から (27) に変形したのと同様な変形によって (28) を得ることができる。

$$||y_2(t)||_E \le K_2||y_2^0||_E\exp\{\varepsilon^{-1}(\beta_{22}K_2^2-\alpha_2)t\} + \frac{\beta_{21}K_2^2}{\varepsilon}\int_0^t ||y_1(\tau)||_E \cdot\exp\{\varepsilon^{-1}(\beta_{22}K_2^2-\alpha_2)(t-\tau)\}d\tau \quad (28)$$

続いて, (28) を (27) に代入し, 積分を実行する。ここで, $\sigma_1 = \alpha_1 - \beta_{11}K_1^2$, $\sigma_2 = \varepsilon^{-1}(\alpha_2 - \beta_{22}K_2^2)$ とする。

$$||y_1(t)||_E \le K_1||y_1^0||_E\exp(-\sigma_1 t) + \frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\sigma_1-\sigma_2}[\exp(-\sigma_2 t) - \exp(-\sigma_1 t)] + \frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1}\int_0^t ||y_1(s)||_E \cdot\exp\{-\sigma_2(t-s)\}ds \quad \cdots\cdots \text{(29)}$$

(29) の両辺に $\exp(\sigma_2 t)$ を掛けて, Bellman–Gronwall 不等式 (12) を利用する。さらに多少の変形の後, 積分を実行すれば (30) 式が得られる。

$$||y_1(t)||_E \leq \left[K_1||y_1^0||_E + \frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\bar{\sigma}-\sigma_1} - \frac{\bar{\sigma}-\sigma_2}{\bar{\sigma}-\sigma_1}K_1||y_1^0||_E\right]\exp(-\sigma_1 t) + \left[-\frac{\beta_{12}K_1^2K_2||y_2^0||_E}{\bar{\sigma}-\sigma_1} + \frac{\bar{\sigma}-\sigma_2}{\bar{\sigma}-\sigma_1}K_1||y_1^0||_E\right]\exp(-\bar{\sigma}t) \quad \cdots \ (30)$$

ただし,

$$\bar{\sigma} = \sigma_2 - \frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_1} \quad \cdots\cdots (31)$$

(30) と同様に, (27) を (28) に代入して積分計算すれば下記式 (32) が得られる。

$$||y_2(t)||_E \leq \left[K_2||y_2^0||_E + \frac{\beta_{21}K_1K_2^2||y_1^0||_E}{\hat{\sigma}-\sigma_2} - \frac{\hat{\sigma}-\sigma_1}{\hat{\sigma}-\sigma_2}K_2||y_2^0||_E\right]\exp(-\sigma_2 t) + \left[-\frac{\beta_{21}K_1K_2^2||y_1^0||_E}{\hat{\sigma}-\sigma_2} + \frac{\hat{\sigma}-\sigma_2}{\hat{\sigma}-\sigma_1}K_2||y_2^0||_E\right]\exp(-\hat{\sigma}t) \quad \cdots \ (32)$$

ただし,

$$\hat{\sigma} = \sigma_1 - \frac{\beta_{12}\beta_{21}K_1^2K_2^2}{\varepsilon\sigma_2} \quad \cdots\cdots (33)$$

(30) 及び (32) から, $y_1(t)$, $y_2(t)$ が指数漸近安定するためには, 4 つの不等式 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\bar{\sigma} > 0$, $\hat{\sigma} > 0$ が同時に成立すれば良い。したがって, これら 4 つの不等式を解いて定理の不等式 (6) が得られる。 □

定理 1 から, 特異摂動システム (1) に対して, 容易に以下の系 (15) (16) を得ることができる。

〔系 1〕 特異摂動システム (1) の係数行列 M_{22} は非特異である。さらに $M_{22}, M_0 = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ は安定行列であると仮定する。このとき, 特異摂動システム (1) が $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ を満たすすべての ε で指数漸近安定となるような $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在する。

(証明) まず, 特異摂動システム (1) におけるノルム有界である ε に依存する時不変不確定要素 $O_{ij}(\varepsilon)$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ に対して不等式 $||O_{ij}(\varepsilon)||_S \leq m_{ij}\varepsilon$ を満足する正の定数 m_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ が存在する。したがって, 式 (19) の β_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ が $\beta_{ij} = k_{ij}\varepsilon$ を満足するような k_{ij}, $(i, j = 1,\ 2)$ が存在する。以上から定理の条件式 (6) の β_{ij} に $k_{ij}\varepsilon$ を代入すれば条件式 (34) を得る。

$$\alpha_1 > k_{11}\varepsilon K_1^2 \quad \cdots\cdots (34a)$$

$$\alpha_2 > k_{22}\varepsilon K_2^2 \quad \cdots\cdots (34b)$$

$$(\alpha_1 - k_{11}\varepsilon K_1^2)(\alpha_2 - k_{22}\varepsilon K_2^2) > k_{12}k_{21}\varepsilon^2K_1^2K_2^2 \quad \cdots\cdots (34c)$$

ここで, 不等式 (34) が成立するような十分小さな $\bar{\varepsilon}$ が存在する。したがって, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ を満たすすべての ε に対して, 定理 1 を満足するのでシステム (1) は指数漸近安定となる。 □

(注意 4) 本論文では, 系 1 の中で, ノルム有界を満足する ε に依存する時不変不確定要素 $||O_{ij}(\varepsilon)||_S \leq m_{ij}\varepsilon$, $(i,\ j = 1,\ 2)$ に対してのロバスト安定性を保証している。しかし, 本論文で得られた定理 1 を利用すれば, 不確定要素 $\Delta A_{ij}(t)$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ が不等式 (6) を満足すれば指数漸近安定を保証するので, 特に, ε に依存する不確定要素でなくても, 不確定要素のノルム上限値が十分小さければ, そのような不確定要素に対してもロバスト安定性が保証される。

ここで, 本論文で得られた結果と従来の結果 (6) (7) について考察する。Shao ら (6) はシステム (2) の係数行列 A_{12}, A_{21} が共に 0 でないことを仮定している。一般的にシステムの係数行列のある部分に上記のような拘束条件が存在することは, 実際のシステムの適用範囲が狭くなることから好ましくない。本論文では, Shao ら (6) が仮定している係数行列の拘束条件は存在しない。さらに, 時変な不確定要素に対して有界性のみを仮定している構造的不確かさなので, 不確定要素に関する仮定が Shao ら (6) と比較して緩和である。しかし, 文献 (6) の本来の目的は, 安定性を保証する ε の上限値を求めることであり, そのような特徴は本論文ではない。すなわち, 本論文では不確定要素に関する仮定が緩和である代わりに ε が十分小さいと仮定する必要があり, 具体的な安定性を保証する ε の上限値は与えていない。一方, Shao ら (6) は係数行列のある部分に拘束条件が存在する代わりに安定性を保証する ε の上限値を与えているところが大きく異なる。次に, 鈴木ら (7) は特異摂動法システムの 2 次安定性に対して, 特異摂動法を利用することによって安定判別を行っている。詳しく説明すれば, slow system, fast system がともに 2 次安定なら特異摂動システム (2) に対して 2 次安定という結論を得ている。しかし, 注意しなければならないことは文献 (7) の中には fast system 及び slow system が 2 次安定であることを示す手法までは言及されていないことである。そこで, 例えば, fast system 及び slow system が 2 次安定であることを示す手法として, 従来の研究結果である H_∞ 制御理論にもとづくリカッチ方程式を道具とする方法 (9) 又は LFT(Linear Fractional Transformation) と構造化特異値を利用する方法 (18) などの適用を考える。いずれの手法も fast system の安定判別に関しては容易に行えるが, slow system の安定判別に関しては, H_∞ 制御理論にもとづくリカッチ方程式を道具とする方法では $A_{22\Delta}^{-1} = [A_{22} + \Delta A_{22}(t)]^{-1}$ の処理が困難

なため (後述の数値例 1 を参照) 容易でない。また, LFT と構造化特異値を利用する方法では, 一般的に直接求めることが困難な構造化特異値を計算する必要があり, 文献 (18) で示されている構造化特異値の上限値, 下限値を用いたとしても安定判別が保守的になる可能性がある。一方, 本論文では特異摂動法を使用していないために特異摂動システム (2) を slow system, fast system の 2 つに分割しなくても安定性の判定が直接可能である。さらに安定性の判定条件に不確定要素 $\Delta A_{22}(t)$ の上限値がノルムの上限値として陽に表現されているため, H_∞ 制御理論にもとづくリカッチ方程式を道具とする方法や LFT と構造化特異値を利用する方法などと比較して直接安定判別が可能である。これは不確定要素の上限値がモジュラス行列として定義された結果生ずるもので, 本論文では, 文献 (7) と異なり不確定要素に対して微分可能性や連続性を仮定していないことから, 文献 (7) より実際の特異摂動システムに適用しやすい特徴をもつ。以上より, 不確定要素に関する仮定が Shao ら [(6)] 及び鈴木ら [(7)] と比較して緩和である点, 特異摂動法を使用しないで full–order system の 2 次安定性を直接判定できる手法を示した点に新規性が主張できる。ただし, 定理 1 の中で定義されている変換行列 T を利用しているため不確定要素のノルムの上限値が変換行列 T を利用しないときと比較して大きくなる。また, モジュラス行列によって関係式 (19) の β_{ij} は決定されるため, 不確定要素のノルム上限値がモジュラス行列を使用しないときと比較して大きくなる。したがって, 不確定要素が各ブロック行列 A_{ij}, $(i,\ j=1,\ 2)$ に存在するとき, それらの影響により本論文で得られた十分条件は保守的な結果を生みやすいことに注意を要する。最後に, slow system, fast system がともに 2 次安定であることが何らかの手法 [(9)(18)] で確認できれば文献 (7) の手法が大変有効であることには変わりない。

4. 数 値 例

本論文で提案された安定判別の有効性を検証するため, 簡単な 2 つの数値例を対象にシュミレーション実験を行う。

〈4•1〉 数値例 1 文献 (6) に基づいて, 以下の構造的不確かさを含む特異摂動システムを考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon\dot{z}_1 \\ \varepsilon\dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & a(t) \\ 0 & 1 & b(t) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots (35)$$

ここで, $a(t)$, $b(t)$ は $|a(t)| \le \bar{a}$, $|b(t)| \le \bar{b}$, $(\bar{a} > 0,\ \bar{b} > 0)$ を満たす不確定要素である。この数値例 1 では, 特異摂動システム (35) が指数漸近安定であるための十分条件を $\bar{a}$, $\bar{b}$ を利用して求める。以下では, $\varepsilon = 0.1$ として十分条件を導出する。

まず, 注意しなければならない点として, 本論文で扱っている数値例 1 の場合, 不確定要素のノルムの上界値が既知と仮定すれば, fast system に対しては従来の手法 [(9)] によって 2 次安定性を判定することが容易である。ただし, $\varepsilon = 0$ とした slow system

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & a(t) \\ b(t) & -2 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots (36)$$

に対して, システム (36) の右辺第 2 項である $[A_{22} + \Delta A_{22}(t)]^{-1}$ から不確定要素 $\Delta A_{22}(t)$ を直接分離できないので, 従来の手法 [(9)] によって 2 次安定性を判定することが困難である。具体的に説明すれば,

$$[A_{22} + \Delta A_{22}(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & a(t) \\ b(t) & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

であるために, 1 ブロックタイプの構造的不確かさ [(19)] でない。よって, $[A_{22} + \Delta A_{22}(t)]^{-1} = D\Delta(t)E$ を満たす適当な次元をもつ定数行列 D, E を選択することが困難であるということである。したがって, 文献 (7) の定理 1 を利用しての安定判別は難しい (slow system が 2 次安定であることが簡単にいえないため, full–order system の 2 次安定性がいえない)。安定判別の別の手法として, LFT(Linear Fractional Transformation) と構造化特異値を利用する方法がある [(18)]。しかし, 本論文の数値例 1 では, 不確定要素のノルムの上限値を求めることが目的であるため, 不確定要素のノルムの上界値が既知でない本問題には適用は難しい。すなわち, ノルム上限値 $\bar{a}$, $\bar{b}$ が未知である場合には LFT と構造化特異値を利用する方法で得られた十分条件はかなり使用しにくい不等式として得られるため適用は難しい。

本論文で提案された手法を適用するため, 線形変換 (13c) の T を計算すれば (37) になる。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0542 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.0542 \\ 0.5271 & 0 & 1.0286 & 0 \\ 0 & 0.5271 & 0 & 1.0286 \end{bmatrix} \cdots (37)$$

したがって,

$$A_s = \begin{bmatrix} -1.0271 & 0 \\ 0 & -1.0271 \end{bmatrix} \cdots\cdots (38a)$$

$$A_f = \begin{bmatrix} -1.9472 & 0 \\ 0 & -1.9472 \end{bmatrix} \cdots\cdots (38b)$$

となる。ここで, (5) より定まる α_1, α_2 を

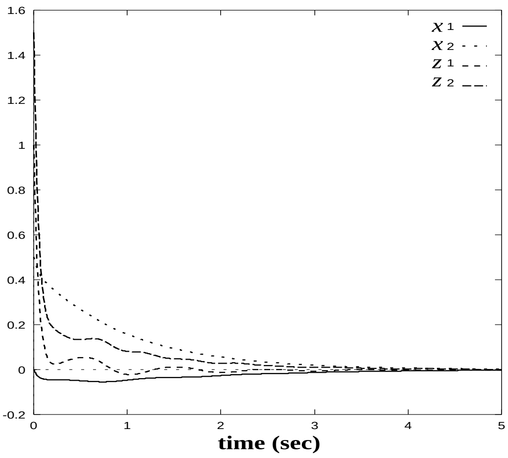

Fig.1 Response of the state variables.

$$\min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_s)|, i=1,2\} > \alpha_1 = 1.0 \ \cdots\cdots \ (39a)$$

$$\min_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i(A_f)|, i=1,2\} > \alpha_2 = 1.9 \ \cdots\cdots \ (39b)$$

に設定する。また, (19) から

$$\begin{aligned}
&||\Delta\tilde{A}_{11}||_S \le ||H^+\Delta\bar{A}_{22}L^+||_S \\
&||\Delta\tilde{A}_{12}||_S \le ||H^+\Delta\bar{A}_{22}\{I+\varepsilon(LH)^+\}||_S \\
&||\Delta\tilde{A}_{21}||_S \le ||\Delta\bar{A}_{22}L^+||_S \\
&||\Delta\tilde{A}_{22}||_S \le ||\Delta\bar{A}_{22}\{I+\varepsilon(LH)^+\}||_S
\end{aligned}$$

である。さらにノルムの性質を利用すれば β_{ij}, $(i,\ j = 1,\ 2)$ は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
&||H^+\Delta\bar{A}_{22}L^+||_S \ \le\ ||H^+||_S||L^+||_S||\Delta\bar{A}_{22}||_S \\
&= 0.2856\sqrt{\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\}} = \beta_{11} \\
&||H^+\Delta\bar{A}_{22}\{I+\varepsilon(LH)^+\}||_S \\
&\le ||H^+||_S||\Delta\bar{A}_{22}||_S||I+\varepsilon(LH)^+||_S \\
&= 0.5575\sqrt{\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\}} = \beta_{12} \\
&||\Delta\bar{A}_{22}L^+||_S \ \le\ ||\Delta\bar{A}_{22}||_S||L^+||_S \\
&= 0.5271\sqrt{\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\}} = \beta_{21} \\
&||\Delta\bar{A}_{22}\{I+\varepsilon(LH)^+\}||_S \\
&\le ||\Delta\bar{A}_{22}||_S||I+\varepsilon(LH)^+||_S \\
&= 1.0286\sqrt{\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\}} = \beta_{22}
\end{aligned}$$

さらに A_s, A_f の形から, $K_1 = K_2 = 1.0$ である。以上を条件式 (6) に代入して連立不等式を解けば

$$\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\} < 1.4620 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (40)$$

となる。したがって $\max\{\bar{a}^2,\ \bar{b}^2\} < 1.4620$ を満たすならば, システム (35) は指数漸近安定となる。

$a(t) = 1.2\sin^2(\pi t)$, $b(t) = -2.4\sin(\pi t)\cos(\pi t)$ としたときのシュミレーション結果を Fig.1 に示す。ただし,

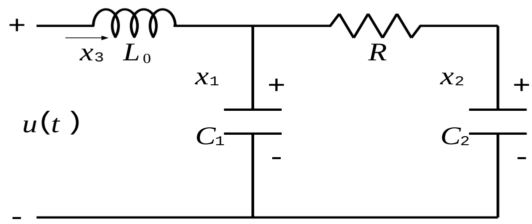

Fig.2 Electric network of Example 2.

初期値は

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (41)$$

である。 $\bar{a} = 1.2$, $\bar{b} = 1.2$ であるから指数漸近安定条件 (40) をみたしている。したがって, システム (35) は指数漸近安定となる。

〈4･2〉 数値例 2 Fig.2 で与えられる電気回路を考える。ここで, L_0 は十分小さなシステムの内部インダクタンスである。 したがって $L_0 = \varepsilon$ として, 以下のようにシステム (42) が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon\dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 1/RC_1 & 1/C_1 \\ 1/RC_2 & -1/RC_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (42)$$

ここで, x_1 はコンデンサ C_1 の両端の電圧, x_2 はコンデンサ C_2 の両端の電圧, x_3 は内部インダクタンスを流れる電流, u は電源電圧 (制御入力) を表す。システム内のそれぞれの物理定数を $L_0 = 1$[mH] $(\varepsilon = 0.001)$, $C_1 = 0.1$[F], $C_2 = 1000[\mu$F], $R = 1$[KΩ] と定める。通常, 良く知られているように抵抗 R は熱によってその抵抗値が上昇する。そこで, 抵抗 R の熱による抵抗値の変化が, ノミナル値と比較して, 飽和を考慮し最大 10% あると仮定する。この抵抗値の変化を構造的不確かさとして安定化制御を考える。すなわち抵抗 R のみが構造的不確かさを持つと仮定する。

抵抗 R の飽和が最大 10% であることから, 抵抗 R は以下のノルム有界の範囲にあるとする。

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{RC_1} = \frac{1}{100 + 10\times\delta(t)} \\
&= 0.0101 + 0.001\times\Delta(t) \\
b(t) &= \frac{1}{RC_2} = \frac{1}{1 + 0.1\times\delta(t)} \\
&= 1.01 + 0.1\times\Delta(t) \\
&\quad 0 \le \delta(t) \le 1.0,\ |\Delta(t)| \le 1.0
\end{aligned}$$

したがって, システム (42) はシステム (43) になる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon\dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(t) & a(t) & 10.0 \\ b(t) & -b(t) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

ここで, 不確定要素 $\Delta(t)$ を無視したノミナルシステムの開ループ極は -1.01, $-0.005 \pm 100.00i$ であり, 安定であるが非常に振動的である。さらに, 実際のシステム (43) には不確定要素 $\Delta(t)$ を含むので安定である保証がない。したがって, 何らかの安定化制御則の構築が必要であるが, システム (43) は非標準特異摂動システムであるので文献 (7) の結果が適用できない。そこで, 近年, ロバスト性が指摘されている最適レギュレータ[17] によって制御則を構築することを考える。システム (43) が非標準特異摂動システムであるために制御則の構築には文献 (14) で提案されている手法と制御系 CAD である MATLAB を併用する。ノミナルシステムに対して設計した最適レギュレータの制御ゲイン F は以下で与えられる。

$$u = -Fx = -F \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \cdots\cdots (44)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.4419 & 0.2902 & 1.4173 \end{bmatrix}$$

ただし, 最小化するための評価関数は以下で与えられる。

$$\min \left\{ \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + u^2) dt \right\}$$

ここで, 制御則 (44) をシステム (43) に入力したとき, 不確定要素 $\Delta(t)$ を無視したノミナルシステムの閉ループ極は -1.2, -10.0, -1407.1 となる。また, 閉ループシステムは以下になる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon\dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(t) & a(t) & 10.0 \\ b(t) & -b(t) & 0 \\ -1.4419 & -0.2902 & -1.4173 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

最後に, 閉ループシステム (45) の指数漸近安定性を本論文で得られた定理によって確認する。まず, (7) で与えられる変換行列 T の L, H は以下のように得られる。

$$L = \begin{bmatrix} 1.0246 & 0.2064 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} -7.1592 \\ 0.0051 \end{bmatrix}$$

このとき行列 A_s, A_f は変換行列 T によって以下のように得られる。

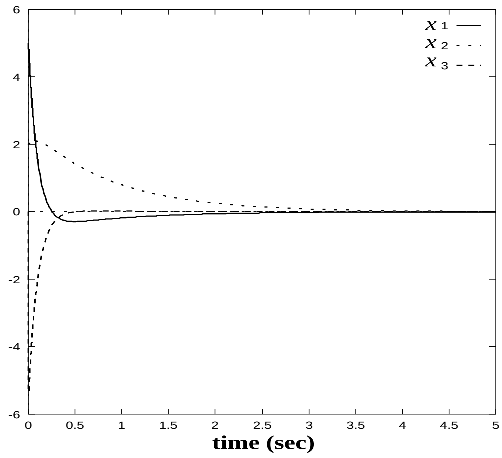

Fig.3 Response of the state variables.

$$A_s = \begin{bmatrix} -10.2563 & -2.0538 \\ 1.01 & -1.01 \end{bmatrix}, \ A_f = -1.4071$$

A_s の固有値が $\lambda_1(A_s) = -10.0263$, $\lambda_2(A_s) = -1.2401$ であることを考慮して $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1.4$ に設定する。このとき, A_f の形から, $K_2 = 1.0$ である。一方, K_1 は $Q_1 = \mathrm{diag}\{5.0,\ 0.1\}$ としたとき (7c) の解 P_1 が

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2532 & -0.0294 \\ -0.0294 & 0.2163 \end{bmatrix}$$

と計算されので $\lambda_1(P_1) = 0.2001$, $\lambda_2(P_1) = 0.2694$ から $K_1 = 1.1603$ となる。さらに β_{ij}, $(i,\ j = 1,\ 2)$ は $\beta_{11} = 0.1414$, $\beta_{12} = 7.1465 \times 10^{-4}$, $\beta_{21} = 3.0637 \times 10^{-4}$, $\beta_{22} = 1.552 \times 10^{-7}$ である。以上を条件式 (6) に当てはめたとき, 全て成立するので不確定要素を無視して構築した制御則 (44) はシステム (42) を指数漸近安定化する。

実際に, システム (42) の抵抗 R が $R = 1000.0 + 100.0 \times [1.0 - \exp(-t)]$ であるとして, 初期値を以下のように設定したときのシュミレーション結果を Fig.3 に示す。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 & 2.0 & 0.0 \end{bmatrix} \cdots\cdots (46)$$

Fig.3 から時間の経過とともに全ての状態変数が 0 に収束していることが分かる。

5. まとめ

本論文では, 時変な構造的不確かさに対して, 特異摂動システムの安定性を研究した。その結果, 定理の 3 つの不等式 (6) を満足すれば特異摂動システム (2) が指数漸近安定であることが示された。本論文の中で得られた結果を応用することによって, 文献 (15), (16) の定理の証明にある補題 “十分小さな ε に対して時不変な不確定要素 $O(\varepsilon)$ を含んだシステム (1) が漸近安定である” が示された。さらに, 従来の結果と大きく異なる点として, まず, 第 1 に Shao ら[6] はシステム (1) の係数行列 A_{12}, A_{21}

が 0 でないことを仮定している。しかし, 本論文ではそのような仮定は必要ない。さらに, 時変な不確定要素が有界であることだけを仮定している構造的不確かさなので, 不確定要素に関する仮定が Shao ら [6] と比較して緩和である。第 2 に, 鈴木ら [7] は特異摂動法システムの 2 次安定性に対して, 特異摂動法を利用しているために構造的不確かさを含む係数行列 $A_{22\Delta} = A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ の上限値が 2 次安定性の判定条件に陽に表現されていない。しかし, 本論文では特異摂動法を使用していないために安定性の判定条件に係数行列 $A_{22\Delta} = A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ の上限値が陽に表現されている。したがって, 特異摂動システム (2) を slow system, fast system の 2 つに分割しなくても安定性の判定が直接可能となった。本論文の最後に, 数値例によって定理の有用性を確認した。すなわち, 鈴木ら [7] の安定性の定理 1 では, 本論文の 数値例の場合, 簡単に slow system の 2 次安定性が判定できない。しかし, 本論文の定理を利用すれば比較的簡単に指数漸近安定性が示される。

今後の課題として, 係数行列 A_{22} が特異である非標準特異摂動システムに対して, 制御入力を付加した安定化についての研究が期待できる。

最後に貴重なご意見及びご指摘を頂いた査読者に感謝いたします。

(平成 10 年 7 月 22 日受付, 同 10 年 12 月 18 日再受付)

文　献

(1) P.V.Kokotović, H.K.Khalil and J.O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design, Academic Press (1986)
(2) P.V.Kokotović, A.Bensoussan and G.L.Blankenship : Singular Perturbations and Asymptotic Analysis in Control Systems, Springer–Verlag (1987)
(3) S.H.Javid : Uniform Asymptotic Stability of Linear Time-Varying Singularly Perturbed Systems, Journal of The Franklin Institute, Vol.305, No.1 27/37 (1978)
(4) J.O'Reilly : Two Time–Scale Feedback Stability of Linear Time-Varying Singularly Perturbed Systems, Journal of The Franklin Institute, Vol.5, No.5 465/474 (1979)
(5) H.D.Tuan and S.Hosoe : A New Design Method for Regulator Problems for Singularly Perturbed Systems with Constrained Control, IEEE Tran. Automatic Control, 42-2, 260 / 264 (1997)
(6) PZ.H.Shao and M.E.Sawan : Robust Stability of Singularly Perturbed Systems, INT.J.CONTROL, Vol.58, No.6 1469/1476 (1993)
(7) 鈴木, 小林, 安藤 : 特異摂動システムの二次安定化, 計測自動制御学会論文集, Vol.32, No11, 1493/1500 (1996)
(8) K.M.Sobel, S.S.Banda and H.H.Yeh : Robust Control for Linear Systems with Structured State Space Uncertainty, INT.J.CONTROL, Vol.50, No.5 1991/2004 (1989)
(9) P.P.Khargonekar, I.R.Petersen and K.Zhou : Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control Theory, IEEE Trans. Automatic Control, Vol.35, No.3, 356/361 (1990)
(10) I.R.Petersen : A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems ; Systems & Control Letters, Vol.8, No.3, 351/357 (1987)
(11) K.Zhou and P.P.Khagonekar : Robust Stabilization of Linear Systems with Norm Bounded Time–varing Uncertainty, Systems & Control Letters, Vol.10, No.1, 17/20 (1988)
(12) H.Wu and K.Mizukami : Robust Stability of a Class of Uncertain Nonlinear Dynamical Systems with Time–Varying Delay, INT.J.SYSTEMS SCI., Vol.25, No.12 2285/2296 (1994)
(13) S.Y.Zhang, K.Mizukami and H.S.Wu : Decentralized Robust Control for a Class of Uncertain Large–Scale Interconected Nonlinear Dynamical Systems, J.OPT.THEORY and APPLICATION., Vol.91, No.1 235/256 (1996)
(14) 向谷, 水上, 徐 : 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集　32–5, 672/678 (1996)
(15) 向谷, 水上 : 摂動項を含む H_∞ タイプリカッチ方程式のための再帰的アルゴリズム, 電気学会論文誌 C Vol.117–C, No10, 1464/1471 (1997)
(16) 向谷, 水上, 徐 : 標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集　34–5, 555/562 (1998)
(17) 木村, 藤井, 森 : "ロバスト制御", コロナ社, (1994)
(18) 細江, 荒木 : "制御系設計 –H_∞ 制御とその応用", 朝倉書店, (1994)
(19) 計測と制御 : "ロバスト制御 –H^∞ 制御を中心にして", 計測自動制御学会, Vol.29, No.2, (1990)

向　谷　博　明（正員） 1969 年 11 月 14 日生。1992 年広島大学総合科学部数理情報学専攻卒業。94 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士 (工学)。98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手。現在に至る。主として, ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事。計測自動制御学会, 機械学会などの会員。

水　上　孝　一（正員） 1936 年 3 月 30 日生。1958 年広島大学工学部電気工学科卒業。60 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。63 年同博士課程修了。63 年京都大学工学部助手, トロント大学客員研究員などを経て, 68 年広島大学工学部助教授, 77 年同総合科学部教授, 同大学院工学研究科担当, 現在に至る。関数解析, 最適制御, 微分ゲーム, 情報検索などの研究に従事 (工学博士)。 J. of Math. Analysis & Application 並びに Dynamics and Control: An Int. Journal の編集員。 IFAC の T.C. 委員。計測自動制御学会フェロー。情報処理学会, 計測自動制御学会, システム制御情報学会などの会員。