

リカッチ方程式の手法を利用した非標準特異摂動システムの2次安定化

正員 向谷博明 (広島市立大学)

学生員 新田智昭 (広島市立大学)

正員 小林康秀 (広島市立大学)

正員 沖田 豪 (広島市立大学)

Quadratic Stabilization of Nonstandard Singularly Perturbed Systems Via Riccati Equation Approach

Hiroaki Mukaidani, Member, Nitta Tomoaki, Student Member, Yasuhide Kobayashi, Member,
Tsuyoshi Okita, Member (Hiroshima City University)

This paper considers the quadratic stabilization of nonstandard singularly perturbed systems with uncertainties such that the so-called “matching conditions” are not satisfied. The construction of the stabilizing controller involves solving a certain algebraic Riccati equation with small parameter $\varepsilon > 0$. The main result in this paper is to propose a new recursive algorithm to solve the above equation and to find an ε independent sufficient conditions for the existence of the full-order stabilizing controller. One noteworthy advantage of the Riccati equation approach to obtaining a stabilizing controller is that the uncertain matrix $A_{22} + \Delta A_{22}(r_{22}(t))$ has unstable mode. Thus, our new results are applicable to both standard and nonstandard uncertain singularly perturbed systems. To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical examples are included.

キーワード：非標準特異摂動システム, 2次安定化, リカッチ方程式, Quadratic Bound Method

1. はじめに

不確定要素を含む線形システムのロバスト安定化について、さまざまな研究が報告されている^{(1) ~ (5)}。文献(3) ~ (5)では、システムの係数行列に“マッチング条件”と呼ばれる特別な構造を仮定した時変不確定要素 $[\Delta A \ \Delta B] = F\Delta(t)[E_1 \ E_2]$, $\|\Delta(t)\| \leq 1$ を含む線形システムに対して安定化の研究を行っている。これらの文献では、リアプノフの安定論によるリカッチ方程式の解を利用した手法、又は H_∞ 制御理論を応用した手法等を駆使して2次安定化のための必要十分条件の導出及び2次安定化制御則の構築を行っている。一方、文献(1), (2)では、システムの係数行列にマッチング条件を仮定しないノルム有界型時変不確定システムに対して、リカッチ方程式の手法に基づく手法を適用し、2次安定化制御則を導出している。

近年、不確定要素を含む標準、非標準特異摂動システムに対して、多くの2次安定化制御問題に関する研究が

行われている^{(6) ~ (10)}。Corlessら⁽⁶⁾は、fast systemが不安定であるような線形不確定特異摂動システムに対して出力フィードバックを利用して、大域的一様終局有界(global uniform ultimate boundedness)を保証する非線形合成制御則を構築している。Shaoら⁽⁷⁾は、システムに含まれる不確定要素に対して、 H_∞ ノルムによる上限を設定し、スモールゲイン定理を応用した2次安定化可能であるための摂動項 ε の範囲を導出している。鈴木ら⁽⁸⁾は、リアプノフ関数を利用して、2次安定化可能である制御則を構築している。ここで、文献(6) ~ (8)のいずれも、特異摂動システムの性格上、slow systemとfast systemに分割して解析を行っている。このような解析手法を一般に特異摂動法⁽²⁰⁾と呼んでいるが、この解析法の欠点は、仮定として、システムの係数行列の一部である A_{22} 及び不確定要素を含む $A_{22}(q)$ 又は $A_{22} + F_2\Delta(t)E_{22} = A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が共に非特異であるとしなければならない点である。この仮定は文献(6) ~ (8)のいずれも設定されている。 $A_{22}(q)$ 或いは $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が特異行列

である不確定要素を含む非標準特異摂動システムを扱う場合、fast system に prefeedback を導入した設計方法⁽¹³⁾ が考えられる。しかし、不確定要素を含む非標準特異摂動システムに prefeedback の手法を適用した研究は未だに発表されていない。この理由は、2 章で考えている非標準特異摂動システム (1) に prefeedback である $u(t) = Fx_2(t) + v(t)$ を入力したとき、閉ループ fast system の係数行列 $A_{22} + B_{22}F$ 及び $A_{22} + B_{22}F + \Delta A_{22}(t) + \Delta B_{22}F$ が共に非特異であるためのゲインパラメータ F の具体的な決定方法が現在まで示されていないためである。さらに、行列 $A_{22} + B_{22}F$ 及び $A_{22} + B_{22}F + \Delta A_{22}(t) + \Delta B_{22}F$ が共に非特異である F を求めることができて、特異摂動法によって得られた slow system には prefeedback のゲイン F が含まれているので制御則の構築が困難となるためである。したがって、prefeedback の手法の適用は難しい。一方、特異摂動システムのロバスト安定化を扱っている大部分の文献には、不確定要素に対して $[\Delta A \ \Delta B] = F\Delta(t)[E_1 \ E_2]$, $\|\Delta(t)\| \leq 1$ であるマッチング条件を仮定している (例えば、近年では文献 (7), (8) など)。マッチング条件を仮定することで、さまざまな有用な結果が得られているが、その反対に実システムに応用する場合、これらのマッチング条件が理論の適用範囲を限定している。したがって保守的な結果しか得られていない。文献 (9), (10) では係数行列である $A_{22} + \Delta A_{22}$ が非特異であると仮定しない非標準特異摂動システムに対して摂動項 ε を含まない 2 次安定化制御則を構築している。しかし、システムの状態部分を表す行列 A の内部にしか不確定要素が考慮されていない。したがって、制御則を構築するシステムが限られている。

本論文では、従来の特異摂動システムのロバスト安定化に関する研究^{(7) ~ (10)} と異なりマッチング条件を仮定しないノルム有界型時変不確定要素を含む非標準特異摂動システムに対して、リカッチ方程式の手法を利用した 2 次安定化問題を考える。ここでのリカッチ方程式の手法とは、 $A_{22}(r_{22}(t))$ が非特異であると仮定しない非標準特異摂動システムに対して、特異摂動法を利用せずに低次元化した 2 つのリカッチ方程式によって、制御則の存在を判定し、さらに、制御則を構築する手法を指す。本論文の大きな特徴は以下の 3 点である。まず、第 1 に、不確定要素を含む係数行列の一部である $A_{22}(r_{22}(t))$ が非特異である仮定を行わないで、システムの 2 次安定化可能性を摂動項 ε を含まないリカッチ方程式の可解条件として判定することである。低次元化された 2 つのリカッチ方程式が正定対称解をもてば、システムは 2 次安定化可能である。第 2 に、LQG (Linear Quadratic Gaussian) 型⁽¹⁷⁾ またはゲーム型 (H_∞ 制御型)^{(15) (16)} と異なる特殊な型 (以後 QB 型と呼ぶ) であるリカッチ方程式に対して、解の構造を決定する。第 3 に、摂動項 ε を含む凸性が保証されない QB 型のリカッチ方程式の正定対称解

を求めるために、再帰的アルゴリズム (recursive algorithm)^{(10) (11) (17)} に代わる新たな反復アルゴリズム (iterative algorithm) を提案することである。本論文で示される反復アルゴリズムはクライマン型アルゴリズム⁽¹⁷⁾ と一般化リカッチ方程式の手法⁽¹⁴⁾ を融合しているため、従来と異なり行列をブロックごとに分割して計算する必要がない。特に、文献 (18), (19) と本論文を比較した場合、前者の文献では、1) 凸性が保証されないゲーム型リカッチ方程式に対してクライマン型アルゴリズムの使用について何も言及されていない。2) 初期値の設定についての明確なコメントがない。3) 特異摂動システムのロバスト安定化に対しての適用報告はない。一方、本論文では、i) 従来特異摂動システムに使用されていた再帰的アルゴリズム⁽¹⁷⁾ を全く使用せず、クライマン型アルゴリズムを用いて ε を含む QB 型リカッチ方程式を解いている。ii) クライマン型アルゴリズムの初期値の設定を特定している。iii) 2 次収束^{(22) (23)} の証明が従来の文献 (18) と全く異なるので、QB 型リカッチ方程式に対して、文献 (18) の方法では示すことができなかった証明が可能となっている。本論文は以上の有用な特徴をもつ。

ε を含む凸性が保証されない QB 型リカッチ方程式に対して、提案された初期値の設定のもと、新たな反復アルゴリズムの 2 次収束の証明は、従来行われてきた逐次近似の手法に基づく証明方法⁽¹⁸⁾ と異なり、局所収束の概念^{(22) (23)} を利用して行われている。局所収束の概念を利用して、提案された反復アルゴリズムが 2 次収束することを示したのは本論文が最初である。

2. 問題設定

以下の不確定要素を含む特異摂動システムを考える^{(1) (2)}。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A_{0\varepsilon} + \Delta A_\varepsilon(r(t))]x(t) \\ & + [B_{0\varepsilon} + \Delta B_\varepsilon(s(t))]u(t), \quad x(t_0) = x^0 \cdot (1) \end{aligned}$$

$$A_{0\varepsilon} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{0\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{12} \\ \varepsilon^{-1}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_\varepsilon(r(t)) = \sum_{i=1}^k r_i(t)A_{i\varepsilon}, \quad |r_i(t)| \leq \bar{r}, \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$\Delta B_\varepsilon(s(t)) = \sum_{i=1}^l s_i(t)B_{i\varepsilon}, \quad |s_i(t)| \leq \bar{s}, \quad (1 \leq i \leq l)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T$$

ここで、 ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力、 $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($i = 1, 2$)、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ($n = n_1 + n_2$) は状態ベクトルである。また、初期状態は $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$ で与えられる。

不確定要素 $r(t) \in \mathbb{R}^k$, $s(t) \in \mathbb{R}^l$ は、ルベグ可測であり、それぞれ有界なベクトルである。さらに、各要素 $r_i(t) \in \mathbb{R}$, $s_i(t) \in \mathbb{R}$ は、ルベグ可測かつ有界なスカラー関数である。ここで、不確定要素の係数行列 $A_{i\varepsilon}$, $B_{i\varepsilon}$ に対しては、階数 1 をもち、それぞれ (2) のような既知ベクトルの積に分解できると仮定する。

$$A_{i\varepsilon} = \Pi_\varepsilon^{-1} d_i e_i^T, \quad B_{i\varepsilon} = \Pi_\varepsilon^{-1} f_i g_i^T \\ A_i = d_i e_i^T, \quad B_i = f_i g_i^T \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、(2) の d_i , e_i , f_i , g_i はそれぞれ $d_i \in \mathbb{R}^n$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $f_i \in \mathbb{R}^n$, $g_i \in \mathbb{R}^m$ であるベクトルである。又、 Π_ε を以下のように定義する。

$$\Pi_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix}$$

ただし、単位行列を $I_n \in \mathbb{R}^n$ と定義する。このような不確かさに対応して 4 つの行列 T_ε , U , V , W_ε を定義する。

$$T_\varepsilon = \bar{r} \sum_{i=1}^k \Pi_\varepsilon^{-1} d_i d_i^T \Pi_\varepsilon^{-T}, \quad U = \bar{r} \sum_{i=1}^k e_i e_i^T \\ V = \bar{s} \sum_{i=1}^l g_i g_i^T, \quad W_\varepsilon = \bar{s} \sum_{i=1}^l \Pi_\varepsilon^{-1} f_i f_i^T \Pi_\varepsilon^{-T}$$

次に、システム (1) に関して、基本的仮定を行う。

〔仮定 1〕 A1. 行列対 $(A_{0\varepsilon}, B_{0\varepsilon})$ は可安定である。

A2. 行列対 $(C_0, A_{0\varepsilon})$ は可検出である。ただし、 C_0 は行列 U の固有値のうち正である個数を q として $C_0^T C_0 = U$, $C_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ のように定義する。

(注意) 特異摂動システム (1) の状態部分を表す行列 $A_{0\varepsilon} + \Delta A_\varepsilon(r(t))$ に不確かさがない場合、 $T_\varepsilon \equiv 0$, $U \equiv I_n$ と設定すれば良い。一方、入力部分を表す $B_{0\varepsilon} + \Delta B_\varepsilon(s(t))$ に不確かさがない場合、 $W_\varepsilon \equiv 0$, $V \equiv I_m$ と設定すれば良い。或いは、Petersen ら⁽¹⁾ の手法を利用することも可能である。

3. 2 次安定化制御則

まず、特異摂動システム (1) に対する線形フィードバック $u(t) = Kx(t)$ による 2 次安定化可能を保証する以下の補題を導入する⁽¹⁾⁽²⁾。

〔補題 1〕 適当な実数 $\mu > 0$ と適当な行列 $R > 0$, $Q > 0$ に対してリカッチ方程式 (3)

$$A_{0\varepsilon}^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_{0\varepsilon} - P_\varepsilon \{ \mu^{-1} (2B_{0\varepsilon} R^{-1} B_{0\varepsilon}^T - B_{0\varepsilon} R^{-1} V R^{-1} B_{0\varepsilon}^T - W_\varepsilon) - T_\varepsilon \} P_\varepsilon + U + \mu Q = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が正定対称解 $P_\varepsilon > 0$ をもてば、システムは

$$u(t) = Kx(t) = -\mu^{-1} R^{-1} B_{0\varepsilon}^T P_\varepsilon x(t) \quad \dots\dots (4)$$

なる線形制御則 (4) によって二次安定化できる。

(注意) 通常、行列 R , Q はそれぞれ単位行列 I_m , I_n に設定する場合が多い⁽¹⁾⁽²⁾。

次に、一般化リカッチ方程式を導入する^{(9) ~ (11)}。

〔補題 2〕 リカッチ方程式 (3) は、以下の一般化リカッチ方程式 (5) を解くことに等価である。

$$A_0^T P + P^T A_0 - P^T \{ \mu^{-1} (2B_0 R^{-1} B_0^T - B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0^T - W) - T \} P + U + \mu Q = 0 \quad \dots\dots\dots (5a)$$

$$P_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^T P = P^T \Pi_\varepsilon \quad \dots\dots\dots (5b)$$

ただし

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P_{11} = P_{11}^T, \quad P_{22} = P_{22}^T$$

$$A_0 = \Pi_\varepsilon A_{0\varepsilon}, \quad B_0 = \Pi_\varepsilon B_{0\varepsilon}$$

$$W = \Pi_\varepsilon W_\varepsilon \Pi_\varepsilon^T, \quad T = \Pi_\varepsilon T_\varepsilon \Pi_\varepsilon^T$$

このとき、(4) で与えられる制御則 $u(t)$ は以下の (6) のように変形できる。

$$u(t) = -\mu^{-1} R^{-1} B_0^T P x(t) \quad \dots\dots\dots (6)$$

4. 制御則が存在するための十分条件

この章では、制御則が存在するための十分条件を摂動項 ε に依存しない形で与える。まず、以下の行列を定義する。

$$S_\mu = \mu^{-1} (2B_0 R^{-1} B_0^T - B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0^T - W) - T \\ = \begin{bmatrix} S_{\mu 11} & S_{\mu 12} \\ S_{\mu 12}^T & S_{\mu 22} \end{bmatrix}, \quad S_{\mu\varepsilon} = \Pi_\varepsilon^{-1} S_\mu \Pi_\varepsilon^{-T} \quad \dots (7a)$$

$$Q_\mu = U + \mu Q \\ = \begin{bmatrix} Q_{\mu 11} & Q_{\mu 12} \\ Q_{\mu 12}^T & Q_{\mu 22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7b)$$

以上の準備のもと、リカッチ方程式 (3) の正定対称解の存在条件を導出する。リカッチ方程式 (3) の正定対称解の存在を保証するために以下の仮定を導入する⁽¹¹⁾⁽¹⁴⁾。

〔仮定 2〕 A3. 行列対 (A_{22}, B_{22}) は可安定である。

A4. $\text{rank} \begin{bmatrix} \mathcal{A}(s) & B_{0\varepsilon} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 = n$

$$\text{ただし、} \mathcal{A}(s) = \begin{bmatrix} A_{11} - sI_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

一般化リカッチ方程式 (5a) の解の構造を決定するために、まず、関係式 (7) を一般化リカッチ方程式 (5a) に代入してブロックごとに分割計算する。次に、分割された方程式に対して、摂動項である ε を $\varepsilon = 0$ として簡単な代数計算を行えば 0- オーダ方程式 (8) を得る。ここで、0- オーダ方程式 (8) の解を $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{21}$, $\bar{P}_{22}$ とおく。又、リカッチ方程式 (8b) は $A_{22} - S_{\mu 22} \bar{P}_{22}$ が安定か

つ行列 $\bar{P}_{22}$ が正定対称解である解が存在すると仮定する⁽¹²⁾。

$$A_{\mu 0}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11} A_{\mu 0} - \bar{P}_{11} S_{\mu 0} \bar{P}_{11} + Q_{\mu 0} = 0 \quad (8a)$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22} A_{22} - \bar{P}_{22} S_{\mu 22} \bar{P}_{22} + Q_{\mu 22} = 0 \quad (8b)$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \quad \dots\dots\dots (8c)$$

ただし

$$A_{\mu 0} = A_{11} + N_1 A_{21} + S_{\mu 12} N_2^T + N_1 S_{\mu 22} N_2^T$$

$$S_{\mu 0} = S_{\mu 11} + N_1 S_{\mu 12}^T + S_{\mu 12} N_1^T + N_1 S_{\mu 22} N_1^T$$

$$Q_{\mu 0} = Q_{\mu 11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{\mu 22} N_2^T$$

$$N_2^T = T_4^{-T} L_{12}^T, N_1^T = -T_4^{-T} T_2^T$$

$$T_1 = A_{11} - S_{\mu 11} \bar{P}_{11} - S_{\mu 12} \bar{P}_{21}$$

$$T_3 = A_{21} - S_{\mu 12}^T \bar{P}_{11} - S_{\mu 22} \bar{P}_{21}$$

$$T_2 = A_{12} - S_{\mu 12} \bar{P}_{22}, T_4 = A_{22} - S_{\mu 22} \bar{P}_{22}$$

$$L_{12} = Q_{\mu 12} + A_{21}^T \bar{P}_{22}, T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$$

以上より、リカッチ方程式 (3) の解の存在条件及び構造に対して以下の定理が得られる。

〔定理 1〕 ε は十分小さいと仮定する。また、仮定 1、仮定 2 の条件が全て成り立つとする。適切な $\mu > 0$ に対して、 ε に依存しないリカッチ方程式 (8b) が正定対称安定化解 $\bar{P}_{22} > 0$ をもち、さらに ε に依存しないリカッチ方程式 (8a) が正定対称安定化解 $\bar{P}_{11} > 0$ をもてば、十分小さな ε に対してリカッチ方程式 (3) は正定対称安定化解 $P_\varepsilon > 0$ をもつ。このとき、正定対称安定化解 P_ε は以下の構造をもつ。

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \varepsilon \bar{P}_{21}^T \\ \varepsilon \bar{P}_{21} & \varepsilon \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon E_{11}(\varepsilon) & \varepsilon^2 E_{21}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon^2 E_{21}(\varepsilon) & \varepsilon^2 E_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(証明) 正定対称安定化解 P_ε の存在性及び行列の構造に対する証明は、文献 (9) ~ (12), (15), (16) と同様な手順、即ち陰関数定理及び Schur Complement 補題によって行われる。したがって、本論文では省略する。 □

ε を含むリカッチ方程式 (3) は、LQG 型⁽¹⁷⁾ またはゲーム型⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ と異なる QB 型であるリカッチ方程式であるので、文献 (9), (10) で定義される μ_f, μ_s は求めることができない。この理由は、 P_ε に関する 2 次の項の係数行列 $S_{\mu\varepsilon} = \mu^{-1}(2B_{0\varepsilon}R^{-1}B_{0\varepsilon}^T - B_{0\varepsilon}R^{-1}VR^{-1}B_{0\varepsilon}^T - W_\varepsilon) - T_\varepsilon$ に対して括弧の中が正定行列とは限らないためである。単純に説明すれば、 μ に対して解 P_ε の単調性が保証されないためである。

行列 $A_{\mu 0}, S_{\mu 0}, Q_{\mu 0}$ を記述する公式中には、リカッチ方程式 (8b) の解 $\bar{P}_{22}$ が含まれているが、実際には、2 つのリカッチ方程式 (8a), (8b) は独立である⁽¹⁰⁾⁽¹⁴⁾。また、 $\bar{P}_{11} = \bar{P}_{11}^T, \bar{P}_{22} = \bar{P}_{22}^T$ が成立するので 2 つのリカッチ方

程式 (8a), (8b) はともに一般化リカッチ方程式でない通常のリカッチ方程式であり、 ε に無関係なので、要求される解の存在性に対する判定は容易である。さらに、文献 (15) と異なり、本論文では A_{22} が特異行列であっても 2 つのリカッチ方程式 (8a), (8b) を利用することによってリカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解 P_ε の存在を判定できる。

5. クラインマン型アルゴリズム

2 つのリカッチ方程式 (8a), (8b) が正定対称安定化解をもつとき、制御則を得るためにリカッチ方程式 (3) あるいは一般化リカッチ方程式 (5a) を解く必要がある。従来の研究では再帰的アルゴリズム⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹⁷⁾ の手法を利用した解法が報告されている。しかし、再帰的アルゴリズムの手法を利用した解法は、行列をブロック分割して解くために計算手順の増加が大きな問題となる。さらに、0-オーダ解 $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ を精度良く求める必要がある。そこで、本論文では再帰的アルゴリズム⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹⁷⁾ に代わる新たな反復アルゴリズムを提案する。本論文で提案される反復アルゴリズムは、クラインマン型アルゴリズム⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ と一般化リカッチ方程式の手法⁽¹⁴⁾ を融合しているため、再帰的アルゴリズムの手法と異なり、行列をブロックごとに分割して計算する必要がない。

仮定 1 及び仮定 2 の条件のもと、リカッチ方程式 (3) の解を得るための新たな反復アルゴリズムを (10) で定義する。

$$(A_0 - S_\mu P^{(i)})^T P^{(i+1)} + P^{(i+1)T} (A_0 - S_\mu P^{(i)}) + P^{(i)T} S_\mu P^{(i)} + Q_\mu = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、初期値 $P^{(0)}$ は、2 つのリカッチ方程式 (8a), (8b) が正定対称安定化解をもつような $\mu = \hat{\mu}$ に対して、実際に (8) を解いたときの 0-オーダ解 $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ を利用して

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \varepsilon \bar{P}_{21}^T \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と設定する。ここで、 $P^{(i)}$ は以下の構造で定義される。

$$P^{(i)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(i)} & \varepsilon P_{21}^{(i)T} \\ P_{21}^{(i)} & P_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$P_{11}^{(i)} = P_{11}^{(i)T}, P_{22}^{(i)} = P_{22}^{(i)T}$$

クラインマン型アルゴリズムは、Newton 法であることが知られており、適切な初期値を与えれば 2 次収束⁽²²⁾⁽²³⁾ の性質をもつ。したがって、文献 (12) で提案されているリアプノフ型アルゴリズムの手法と比較して、収束がかなり速いなどの特徴を有する⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾。しかし、クラインマン型アルゴリズムは、一般的に収束域が狭く、初期値の選び方によっては発散したり、条件を満足する解と異なる危点に収束する可能性がある。また、係数行列

が特異行列や悪条件になることもあり、その場合は反復計算を実行できなくなる。しかしながら、リカッチ方程式(3)の正定対称安定化解に対して、定理1の式(9)より $P_\varepsilon = \Pi_\varepsilon P^{(0)} + O(\varepsilon) \Leftrightarrow \|P_\varepsilon - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ の関係が成立するので、初期値を(11)のよううまく設定すればリカッチ方程式(3)に対しても反復アルゴリズム(10)を収束させることが可能であると期待される。そこで、本論文では初期値に0-オーダー解を使用して(11)のように設定することを提案する。本論文の基本的アイディアは $P_\varepsilon = \Pi_\varepsilon P^{(0)} + O(\varepsilon)$ の関係を利用していることである。すなわち、 $\Pi_\varepsilon P^{(0)}$ がリカッチ方程式(3)の正定対称安定化解 P_ε の近傍解になっていることに注目して初期値を設定していることである。以上の基本的アイディアはごく自然な発想に思われる。しかし、特異摂動システムにおいて、再帰的アルゴリズムを使用している文献(10)、(11)、(17)にはクライマン型アルゴリズムを使用してリカッチ方程式の解を求める報告がないため、初期値に0-オーダー解を使用して解くことは提案されていない。この理由は、再帰的アルゴリズムと本論文の反復アルゴリズムが基本的に異なるためである。詳しく説明すれば、再帰的アルゴリズムでは偏差 $E_{ij}^{(i)}$ ($ij = 11, 21, 22$)

$$P^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(i)} & \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(i)})^T \\ \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(i)} & \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \cdot (13)$$

を初期値 $E_{ij}^{(0)} = 0$ で解くのにに対して、反復アルゴリズムでは解の構造(12)に従って、ダイレクトに初期値(11)を利用して解くためである。

特異摂動システムに対して、再帰的アルゴリズムを利用した研究は数多く報告されているのにに対して⁽¹⁷⁾、クライマン型アルゴリズムに基づく研究は著者らの知る限り報告されていない。クライマン型アルゴリズムを特異摂動システムにおける制御問題に適用することは容易に考え付くにも関わらず、なぜ、クライマン型アルゴリズムが適用されなかったかという理由が考えられる。通常、LQG型のリカッチ方程式は2次の項の符号が常に準正定である。一方、QB型のリカッチ方程式は、2次の項の符号が準正定とは限らないので、クライマン型アルゴリズムの収束性の証明がLQG型と同様に出来ないためである。事実、LQG型のリカッチ方程式に対して、文献(18)には逐次近似法を利用したクライマン型アルゴリズムの収束の証明が行われているが、QB型のリカッチ方程式に対しては行われていない。アルゴリズム(10)に関して定理2を得る。

〔定理2〕 ε は十分小さいと仮定する。また、仮定1、仮定2の条件のもと、適当な $\mu = \hat{\mu}$ に対して2つのリカッチ方程式(8a)、(8b)が正定対称安定化解をもつと仮定する。そのような $\mu = \hat{\mu}$ に対して、初期値 $P^{(0)}$ を(11)のように設定すれば、提案された新たなアルゴリズム(10)は2次収束する。また、収束解を $P^{(\infty)}$ とお

くとき、リカッチ方程式(3)の解は $P_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^T P^{(\infty)}$ で与えられる。

証明を行う前に以下の補題を準備する⁽²²⁾⁽²³⁾。

〔補題3〕 (局所2次収束性) 1回連続微分可能な関数 $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$ の Jacobian 行列 $\nabla f(x)$ が x^* で正則で、かつ $f(x) = 0$ の1つの解 $x = x^*$ の近傍で Lipschitz 連続[†]であるとき、解 x^* に十分近い初期値 x_0 から出発するとき、Newton法で生成される点列 $\{x_j\}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) は x^* に2次収束する。

(証明) 反復アルゴリズム(10)の収束性の証明に関しては、反復アルゴリズム(10)を通常のリアプノフ方程式(14)に等価変換して考える。したがって、反復アルゴリズム(10)が収束することを示すことはクライマン型アルゴリズム(14)が収束することを示すことに等価である。

$$(A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(i)})^T P_\varepsilon^{(i+1)} + P_\varepsilon^{(i+1)} (A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(i)}) + P_\varepsilon^{(i)} S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(i)} + Q_\mu = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ただし

$$P_\varepsilon^{(i)} = \Pi_\varepsilon^T P^{(i)} = P^{(i)T} \Pi_\varepsilon$$

まず、全ての i ($i = 1, 2, 3, \dots$) に対して $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(i)}$ は安定行列、 $P_\varepsilon^{(i)}$ は正定対称行列、関係式 $\|P_\varepsilon^{(i)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が成立することを帰納法によって示す。 $i = 0$ のとき、リアプノフ方程式(14)に対して $i = 0$ と設定し、 $P_\varepsilon^{(0)}$ の構造を利用すれば以下を得る。

$$A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1} T_3 & \varepsilon^{-1} \{T_4 + O(\varepsilon)\} \end{bmatrix}$$

ここで、 T_4 , T_0 の安定性及び文献(20)の Corollary 3.1 を考慮すれば、十分小さな ε に対して $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(0)}$ は安定行列となる。したがって、リアプノフ方程式の性質⁽¹⁷⁾⁽²¹⁾から対称解 $P_\varepsilon^{(1)}$ が存在する。ここで陰関数定理を適用すれば、簡単な計算によって以下のような構造を持つことが示される。

$$P_\varepsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(1)}(\varepsilon) & \varepsilon \{\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(1)}(\varepsilon)\}^T \\ \varepsilon \{\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(1)}(\varepsilon)\} & \varepsilon \{\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(1)}(\varepsilon)\} \end{bmatrix}$$

したがって、十分小さな ε に対して Schur Complement 補題を利用すれば $P_\varepsilon^{(1)}$ は正定行列であることが示される。また $P_\varepsilon^{(1)}$ の構造から $\|P_\varepsilon^{(1)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が示さ

[†] 解 x^* の近傍 $\mathcal{D}$ において、正の実数 L が存在して次の不等式 $\|\nabla f(x) - \nabla f(x^*)\| < L\|x - x^*\|$ が成り立つとき、 $\nabla f(x)$ は x^* において Lipschitz 連続 (Lipschitz continuous) であるという。例えば、 $f(x)$ が x^* で2回連続微分可能であるならば上記の不等式が満たされる。

れる。さらに $\|P_\varepsilon^{(1)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ を利用すれば $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(1)}$ は安定行列であることが示される。

$i = N$ のとき $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(N)}$ が安定行列、 $P_\varepsilon^{(N)}$ は正定対称行列、関係式 $\|P_\varepsilon^{(N)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が成立することを仮定する。 $i = N + 1$ のとき $\|P_\varepsilon^{(N)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ を利用すれば簡単な計算から以下を得る。

$$A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(N)} = \begin{bmatrix} T_1 + O(\varepsilon) & T_2 + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}\{T_3 + O(\varepsilon)\} & \varepsilon^{-1}\{T_4 + O(\varepsilon)\} \end{bmatrix}$$

ここで、 T_4 , T_0 の安定性及び文献 (20) の Corollary 3.1 を考慮すれば、十分小さな ε に対して $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(N+1)}$ は安定行列となる。したがって、リアプノフの方程式の性質⁽¹⁷⁾⁽²¹⁾ から対称解 $P_\varepsilon^{(N+1)}$ が存在する。ここで陰関数定理を適用すれば、簡単な計算によって以下のような構造を持つことが示される。

$$P_\varepsilon^{(N+1)} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(N+1)}(\varepsilon) & \varepsilon\{\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(N+1)}(\varepsilon)\}^T \\ \varepsilon\{\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(N+1)}(\varepsilon)\} & \varepsilon\{\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(N+1)}(\varepsilon)\} \end{bmatrix}$$

したがって、十分小さな ε に対して Schur Complement 補題を利用すれば $P_\varepsilon^{(N+1)}$ は正定対称行列であることが示される。また $P_\varepsilon^{(N+1)}$ の構造から $\|P_\varepsilon^{(N+1)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が示される。さらに $\|P_\varepsilon^{(N+1)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ を利用すれば $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(N+1)}$ は安定行列であることが示される。以上の操作を帰納的に繰り返せば全ての i ($i = 1, 2, 3, \dots$) に対して $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(i)}$ は安定行列、 $P_\varepsilon^{(i)}$ は正定対称行列、関係式 $\|P_\varepsilon^{(i)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が成立することが示される。次に、反復アルゴリズム (10) が 2 次収束することを示す。関数 $F_M(P_\varepsilon)$ を以下のように定義する。

$$F_M(P_\varepsilon) = A_{0\varepsilon}^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_{0\varepsilon} - P_\varepsilon S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon + Q_\mu$$

定理 1 より仮定 1, 仮定 2 の条件のもとでは、 P_ε が正定対称安定化解であるので $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon$ は安定行列である。或いは、先に示したように全ての i ($i = 1, 2, 3, \dots$) に対して $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(i)}$ は安定行列である。ここで、以下の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \nabla F_M(P_\varepsilon) &= \frac{\partial F_M(P_\varepsilon)}{\partial P_\varepsilon} \\ &= (A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon)^T \otimes I_n + I_n \otimes (A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon)^T \end{aligned}$$

したがって、関数 $F_M(P_\varepsilon)$ の Jacobian 行列 $\nabla F_M(P_\varepsilon)$ は $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon$ が安定であるから非特異である。又、 $F_M(P_\varepsilon)$ は P_ε の 2 次式で表される関数であるので、明らかに連続 2 回微分可能な関数である。したがって、Lipschitz 連続である。初期値は先に示したように全ての i ($i = 1, 2, 3, \dots$) に対して関係式 $\|P_\varepsilon^{(i)} - P_\varepsilon^{(0)}\| = O(\varepsilon)$ が成立するので ε が十分小さいならば解 P_ε に十分

近い。以上より、補題 3 を利用して反復アルゴリズム (14) は初期値 $P_\varepsilon^{(0)} = \Pi_\varepsilon^T P^{(0)}$ から出発して要求される正定対称安定化解に 2 次収束する。また、 $P_\varepsilon^{(i)} = \Pi_\varepsilon P^{(i)}$ が成立するので新たに提案された反復アルゴリズム (10) も 2 次収束する。反復アルゴリズム (14) 或いは (10) が 2 次収束することが示されたので、その極限値は $\lim_{i \rightarrow \infty} P_\varepsilon^{(i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} P_\varepsilon^{(i+1)} = P_\varepsilon^{(\infty)}$ を満たす。以上から、 $P_\varepsilon^{(\infty)}$ はリカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解となる。□

リカッチ方程式 (3) には ε^{-1} が含まれている。したがって、リカッチ方程式 (3) を Schur 解法⁽²⁴⁾ を用いて解くとき、ハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A_{0\varepsilon} & -S_{\mu\varepsilon} \\ -Q_\mu & -A_{0\varepsilon}^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

には $S_{\mu\varepsilon} = O(\varepsilon^{-2})$, $A_{0\varepsilon} = O(\varepsilon^{-1})$, $Q_\mu = O(1)$ の異なるオーダーをもつ項が含まれることになる。そのため ε が十分小さいとき実 Schur 形に変換する直交行列の計算途中で桁落ちが生じる。しかし、本論文で提案されているアルゴリズムには、 ε を含んでいるが ε^{-1} , ε^{-2} は含んでいない。したがって、繰り返し計算途中で最大 $O(\varepsilon)$ 程度の桁落ちが生じてても、Schur 解法で述べた $O(\varepsilon^{-2})$ の桁落ちは生じない。これは、例えば $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ (数値例参照) であるとき、Schur 解法のハミルトン行列 H に対する直交行列の計算には 1.0×10^{12} オーダの計算を強いられるのに対して、本論文で提案されているアルゴリズムでは 1.0×10^{-6} オーダの計算で済むため、プログラム変数の倍精度で実装可能なところに有用性が存在する。さらに P は非対称行列なので ε が十分小さくても P の P_{11} , P_{21} , P_{22} ブロックは摂動項 ε に吸収されることなく求めることが可能である。詳しく説明すれば、通常のリカッチ方程式 (3) の解 P_ε と一般化リカッチ方程式 (5a) の解 P の構造には

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

の違いがある。 ε が十分小さいとき、解 P_ε は摂動項 ε の影響のために $\varepsilon P_{21} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon P_{22} = O(\varepsilon)$ となるので P_{11} の情報しか得られない。しかし、解 P の場合、摂動項 ε が十分小さくても P_{11} , P_{21} , P_{22} すべての情報を得ることができる特徴をもつ。

リアプノフ方程式 (14) を列展開した連立 1 次方程式 (16) は一般化リアプノフ方程式 (10) を列展開した連立 1 次方程式と同一となる。

$$\begin{aligned} &[I_n \otimes (A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(i)})^T] \cdot_{\text{CS}} [P^{(i+1)}] \\ &+ [(A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_\varepsilon^{(i)})^T \otimes I_n] \cdot_{\text{CS}} [P^{(i+1)T}] \\ &+_{\text{CS}} [P_\varepsilon^{(i)} S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon^{(i)} + Q_\mu] = 0 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ただし、方程式 (16) の $_{\text{CS}}[\cdot]$ は列展開を表す。

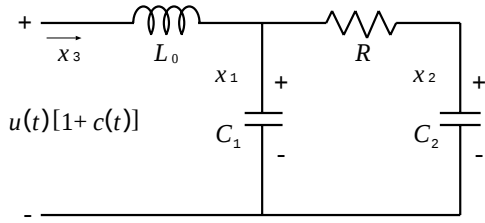


Fig.1 Electric network.

したがって、全ての $\forall i$ に対して ε が十分小さければ $A_{0\varepsilon} - S_{\mu\varepsilon}P_{\varepsilon}^{(i)}$ が常に安定であるから連立1次方程式 (16) を利用して直接的に解くことが可能である⁽²⁴⁾。

本論文で示される反復アルゴリズムは、文献(12)の中で紹介されている。そこでは反復アルゴリズムの収束の完全な証明は行われていない。また、文献(12)の主な結果は、凸性が保証されないゲーム型リカッチ方程式に対して、文献(19)で提案されているリアプノフ型アルゴリズムに基づく一般化リカッチ方程式の手法を利用して解を得ていることである。したがって、使用しているアルゴリズムがリアプノフ型に基づいているので収束速度が遅い。一方、本論文ではQB型リカッチ方程式に対して、従来収束に不安のあったクラインマン型アルゴリズムを定理1及び補題3によって使用可能を保証している。収束速度も2次収束⁽²²⁾⁽²³⁾を保証するので、リアプノフ型アルゴリズム⁽¹²⁾と比較して、収束速度が速い特徴を有する。特に、 ε を含むQB型リカッチ方程式に対して、クラインマン型アルゴリズムの適用、及び初期値の特定は従来の文献にない新たなアイデアである。さらに、2次収束の証明は文献(18)で示されている証明と全く異なるので、QB型リカッチ方程式に対して、文献(18)の方法では示すことができなかった証明が本論文によって初めて可能となったところに新規性が存在する。

6. 数 値 例

Fig.1 で与えられる電気回路を考える。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 1/RC_1 & 1/C_1 \\ 1/RC_2 & -1/RC_2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+c(t) \end{bmatrix} u \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 $L_0 = \varepsilon$ は十分小さなシステムの浮遊インダクタンスである。また、電源電圧(制御入力) $u(t)$ には、電圧を定格から最大10%程度低下させる時変不確かさ $c(t)$ 、 $(-0.1 \leq c(t) \leq 0)$ が加わっていると仮定する。さらに x_1 はコンデンサ C_1 の両端の電圧、 x_2 はコンデンサ C_2 の両端の電圧、 x_3 は浮遊インダクタンスを流れる電流をそれぞれ表す。システム内のそれぞれの物理定数を $L_0 = 1[\mu\text{H}]$ ($\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$)、 $C_1 = 0.1[\text{F}]$ 、 $C_2 =$

$1000[\mu\text{F}]$ 、 $R = 1[\text{K}\Omega]$ とそれぞれ定める。通常、良く知られているように抵抗 R はジュール熱によってその抵抗値が上昇する。そこで、抵抗 R の熱による抵抗値の変化が、ノミナル値と比較して、飽和を考慮し最大10%程度であると仮定する。この抵抗値の変化を構造的な不確かさとして安定化制御を考える。すなわち抵抗 R は構造的な不確かさを持つと仮定して2次安定化を行う。

抵抗 R の飽和が最大10%程度であることを考慮して、不確定要素及び公称値を以下のように設定する。

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{RC_1} = \frac{1}{100 + 10 \times \delta(t)} \\ \Rightarrow \bar{a}(t) &= 0.0095454 + 0.0004546 \times \Delta_1(t) \\ b(t) &= \frac{1}{RC_2} = \frac{1}{1 + 0.1 \times \delta(t)} \\ \Rightarrow \bar{b}(t) &= 0.95454 + 0.04546 \times \Delta_1(t) \\ 1 + c(t) &\Rightarrow \bar{c}(t) = 0.95 + 0.5 \times \Delta_2(t) \\ 0 \leq \delta(t) \leq 1.0, |\Delta_1(t)| \leq 1.0, |\Delta_2(t)| \leq 1.0 \end{aligned}$$

したがって、システム(17)はシステム(18)になる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{a}(t) & \bar{a}(t) & 10.0 \\ \bar{b}(t) & -\bar{b}(t) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{c}(t) \end{bmatrix} u \dots\dots\dots (18)$$

ここで、状態変数である $x(t)$ は、特異摂動システムの性質上、slow systemの状態変数 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 及び fast systemの状態変数 $x_3(t)$ に分けられる。特異摂動システム(18)に対して、不確定要素 $\Delta_1(t)$ 、 $\Delta_2(t)$ を無視したノミナルシステムの開ループ極は -0.954540001 、 $-0.004772700 \pm 3162.277658724i$ であり、安定であるが非常に振動的である。さらに、実際のシステム(17)には不確定要素 $\Delta_1(t)$ 、 $\Delta_2(t)$ が含まれるので安定である保証がない。したがって、何らかの安定化制御則の構築が必要である。本論文の数値例では、不確定要素を除いたノミナルシステムの係数行列 A_{22} が $A_{22} = 0$ である非標準特異摂動システムなので、文献(7)、(8)の結果は適用できない。したがって、文献(7)、(8)に示されている従来の方法では2次安定化できないことに注意を要する。式(2)で定義された分解を以下のように定める。

$$\begin{aligned} A_1 &= d_1 e_1^T = \begin{bmatrix} -0.0004546 \\ 0.04546 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= f_1 g_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

リカッチ方程式(3)の R 、 Q をそれぞれ単位行列 I_1 、 I_3

Table 1. Convergence values of $P_\varepsilon^{(i)}$ with $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$			
$P_\varepsilon^{(2)} =$	$\begin{bmatrix} 1.0026667076 \times 10^{-2} & -8.2611042118 \times 10^{-3} & 9.4569157712 \times 10^{-8} \\ -8.2611042118 \times 10^{-3} & 1.7158799400 \times 10^{-1} & -8.7071361921 \times 10^{-8} \\ 9.4569157712 \times 10^{-8} & -8.7071361921 \times 10^{-8} & 1.0541922333 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$		

に設定する。このとき、0-オーダ方程式 (8a), (8b) の正定対称安定化解 $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{22}$ は $\mu = 0.01$ で存在する。 $\mu = 0.01$ のときの $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{21}$, $\bar{P}_{22}$ は以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\bar{P}_{11} &= \begin{bmatrix} 0.01002 & -0.00826 \\ -0.00826 & 0.17159 \end{bmatrix} \\ \bar{P}_{21} &= \begin{bmatrix} 0.09457 & -0.08707 \end{bmatrix} \\ \bar{P}_{22} &= \begin{bmatrix} 0.01054 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

次に、 $\mu = 0.01$ に設定したとき、アルゴリズム (10) を利用して正定対称安定化解を求める。ここで、本論文で使ったクライマン型アルゴリズムの収束判定は

$$\begin{aligned}A_{0\varepsilon}^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_{0\varepsilon} - P_\varepsilon S_{\mu\varepsilon} P_\varepsilon + Q_\mu \\ = A_0^T P + P^T A_0 - P^T S_\mu P + Q_\mu = F(P) \cdots (19)\end{aligned}$$

が成立することに注意して、不等式 (20) とした。

$$\|F(P^{(i)})\| < 10^{-14}, P_\varepsilon^{(i)} = \Pi_\varepsilon P^{(i)} \cdots (20)$$

新たに提案されたアルゴリズム (10) は2回の繰り返し計算で不等式 (20) を満足した。したがって、得られた解 $P_\varepsilon^{(2)}$ が 1.0×10^{-15} オーダの精度であることが確認される。提案された新たなアルゴリズム (10) を利用して得られたリカッチ方程式の正定解を Table 1. に与える。さらに、収束するまでの誤差 (19) のノルムの値を Table 2. に与える。Table 2. より提案された反復アルゴリズム (10) は2次収束であることが確認される。

Table 2. Error propagation per iteration

i	$\ F(P^{(i)})\ $
0	5.883×10^{-5}
1	1.965×10^{-10}
2	3.143×10^{-16}

続いて、 $P_\varepsilon^{(2)} = \Pi_\varepsilon P^{(2)}$ を利用して制御則 (4) を構築する。制御則を (21) に与える。

$$\begin{aligned}u(t) &= K_C x(t) \cdots (21) \\ K_C &= \begin{bmatrix} -8.984070 & 8.271779 & -1.001483 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

一方、文献 (17) の中で提案されている再帰的アルゴリズムを (20) と同じ収束条件のもとで使用したとき、2回の繰り返し計算で不等式 (20) を満足した。ただし、再帰的アルゴリズムに使用した初期値は、反復アルゴリズムで使用した 1.0×10^{-5} オーダの精度を有する上記の0-オーダ解 $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{21}$, $\bar{P}_{22}$ ではなく、 1.0×10^{-14} オーダの

精度を有する高精度な0-オーダ解である。再帰的アルゴリズムを使用する場合、0-オーダ解 $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{21}$, $\bar{P}_{22}$ は十分な精度で求めなければならない必要がある。例えば本論文で示されている数値例の場合、 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-6}$ である条件のもと、0-オーダ解の精度が 1.0×10^{-5} オーダしか保証されないときには、繰り返し計算を何回行っても解の精度が 1.0×10^{-5} より良くなることがない。実際に0-オーダ解を 1.0×10^{-5} のオーダに設定して再帰的アルゴリズムを使用した場合、アルゴリズム (10) は収束しなかった^{††}。この理由は、偏差 $E_{ij}^{(i)}$ を高精度で求めても、 ε が十分小さいならば解の構造式 (13) から偏差が反映されないためである。すなわち、 ε が十分小さいときは構造式 (13) から次の近似式が成立するためである。

$$P \approx \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$$

しかし、本論文で提案された反復アルゴリズムは、0-オーダ解の精度が 1.0×10^{-5} オーダしか保証されない場合でも、2回の繰り返し計算で不等式 (20) を満足した。

最後に、MATLAB を利用して、直接リカッチ方程式 (3) を解いた解、残差 $F_M(P_{M\varepsilon})$ 、制御則 (4) のゲイン K_M を以下に与える。ここで、MATLAB で使用したりリカッチ方程式を解く関数は are である。

$$P_{M\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.0100 & -0.0083 & 0.0000 \\ -0.0083 & 0.1716 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$F_M(P_{M\varepsilon})$$

$$= 10^{-7} \times \begin{bmatrix} -0.222 & -8.736 & 0.003 \\ 0.185 & 7.160 & -0.002 \\ -0.018 & -0.884 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = K_M x(t) \cdots (22)$$

$$K_M = \begin{bmatrix} -8.9841 & 8.2718 & -1.0015 \end{bmatrix}$$

以上より、MATLAB を利用した場合と比較して、リカッチ方程式の解の精度の面で本論文の手法が十分有用であることが確認される。ただし、制御ゲイン K_M については K_C と 1.0×10^{-4} オーダで一致しており MATLAB の使用も大変有効であることに変わりはない。

最後に、 $R = 1000.0 + 100.0 \times [1.0 - \exp(-t)]$, $c(t) = -0.05[1 - \cos(120\pi t)]$ としたときのシミュレーション結果を Fig.2, Fig.3 に示す。ただし、初期値は

^{††}本論文では、再帰的アルゴリズムを使用する場合は 1.0×10^{-14} オーダの高精度な0-オーダ解を準備した。

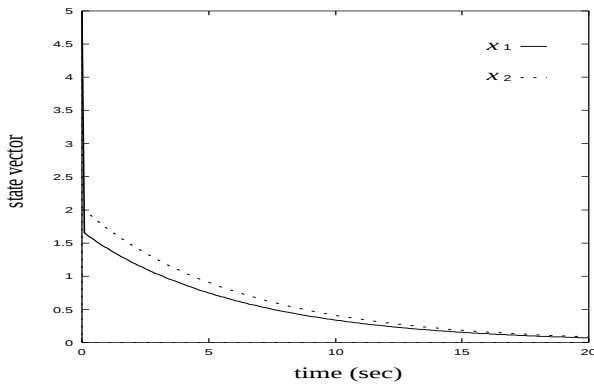


Fig.2 Response of the state variables.

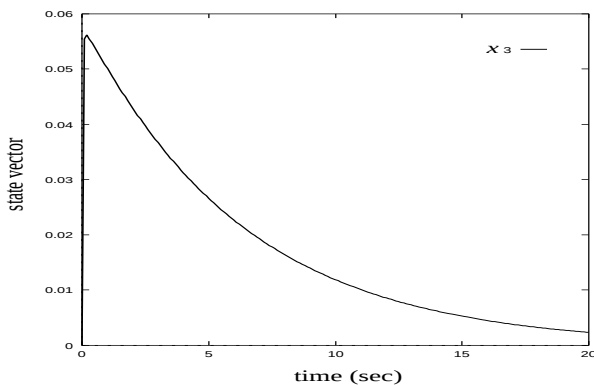


Fig.3 Response of the state variables.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 & 2.0 & 0.0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

である。シミュレーション結果である Fig.2, Fig.3 から全ての状態変数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ は時間の経過とともに0に収束していることが確認できる。即ち、 $t \rightarrow \infty$ で、3つの状態変数はともに $x_i(t) \rightarrow 0$, ($i = 1, 2, 3$) であることが確認される。

7. ま と め

本論文では、マッチング条件を仮定しないノルム有界型時変不確定要素を含む非標準特異摂動システムに対して、リカッチ方程式の手法を利用して2次安定化制御則を構築した。同時に、システムの2次安定化可能性を摂動項 ε を含まない2つのリカッチ方程式の可解条件として判定することを提案した。低次元化された摂動項 ε を含まない2つのリカッチ方程式の正定対称安定化解が存在すれば、その解を初期値として、新たに提案されたアルゴリズムを使用することによって摂動項 ε を含むQB型のリカッチ方程式の正定解を求めることが可能である。即ち、合成制御則⁽⁸⁾⁽²⁰⁾でなくfull-orderである制御則が構築可能である。また、提案されたアルゴリズムは2次収束を保証しており、その証明方法は、局所収束の概念に基づいているため従来の逐次近似法による証明と異なっている。その他の特徴として、本論文で得られた結

果は標準、非標準特異摂動システムの両方に適用可能である。本論文で示されている定理1、及び定理2では、摂動項 ε は十分小さいと仮定している。しかし、定理が適用できる具体的な ε の範囲は示されていない。そこで、今後の研究課題として、定理が適用できる ε の限界を求めることが考えられる。

最後に、本論文に対して、非常に多くの有益なご指摘及びコメントを頂いた査読者の皆様方に謝意を表す。さらには、MATLABの使用を快諾して頂いた広島大学名誉教授 水上孝一先生(現広島国際学院大学教授)に謝意を表す。なお、本研究の一部は広島市立大学平成11年度特定研究費(科研費奨励研究費)課題番号9974の補助を得て行われた。ここに、重ねて謝意を表す。

(平成11年4月21日受付, 同12年1月27日再受付)

文 献

- (1) I.R.Petersen and C.V.Hollot: "A Riccati Equation Approach to the Stabilization of uncertain linear systems"; Automatica, Vol.22, No.4, 397/411 (1986)
- (2) W.E.Schmitendorf: "Design Stabilizing Controller for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.33, No.4, 376/379 (1988)
- (3) I.R.Petersen: "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems"; Systems & Control Letters, Vol.8, No.3, 351/357 (1987)
- (4) K.Zhou and P.P.Khargonekar: "Robust Stabilization of Linear Systems with Norm Bounded Time-varying Uncertainty", Systems & Control Letters, Vol.10, No.1, 17/20 (1988)
- (5) P.P.Khargonekar, I.R.Petersen and K.Zhou: "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control Theory", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.35, No.3, 356/361 (1990)
- (6) M.Corless, F.Garofalo, and L.Glielmo: "New results on composite control of singularly perturbed uncertain linear systems", Automatica, Vol.29, No.2, 387/400 (1993)
- (7) P.Z.H.Shao and M.E.Sawan: "Robust Stability of Singularly Perturbed Systems", Int. Journal of Control, Vol.58, No.6 1469/1476 (1993)
- (8) 鈴木, 小林, 安藤: "特異摂動システムの二次安定化", 計測自動制御学会論文集, Vol.32, No.11, 1493/1500 (1996)
- (9) 向谷, 水上: "不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト安定化", 電気学会論文誌D Vol.119, No.2, 159/167 (1999)
- (10) H.Mukaidani, H.Xu, and T.Okita: "Robust Stabilization of Non-Standard Singularly Perturbed Systems with Uncertainties", IFAC World Congress, Vol.G pp151-156, Beijing, July (1999)
- (11) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami: "Recursive Approach of H_∞ Control Problems for Singularly Perturbed Systems Under Perfect and Imperfect State Measurements", Int. Journal of Systems Science, Vol.30, No.5, pp467-477 (1999)
- (12) 向谷, 小林, 沖田: "出力フィードバックを利用した非標準特異摂動システムのためのロバスト H_∞ 制御問題", 計測自動制御学会論文集, Vol.35, No.10, 1273/1282 (1999)
- (13) H.K.Khalil: "Feedback Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.34, No.10, 1052/1060 (1989)
- (14) W.Tan, T.Leung, and Q.Tu: " H_∞ Control for Singularly Perturbed Systems", Automatica, Vol.34, No.2, 255/260 (1998).

- (15) V.Dragan: "Asympotic Expansions for Game-Theoretic Riccati Equations and Stabilization with Disturbance Attenuation for Singularly Perturbed Systems", Systems & Control Letters, Vol.20, 455/463 (1993)
- (16) Z.Pan and T.Basar: " H_∞ -Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part I. Pperfect state mesurements", Automatica, Vol.29, No.2, 401/423 (1993)
- (17) Z.Gajic, D.Petkovski and X.Shen: "Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System - A Recursive Approach", Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Berlin ; Springer - Verlag (1990)
- (18) Z.Gajic and M.T.J Qureshi: "Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control", Mathematics in Science and Engineering, Vol.195, Academic Press (1995)
- (19) T.Li and Z.Gajic: "Lyapunov Iterations for Solving Coupled Algebraic Lyapunov Equations of Nash Differential Games and Algebraic Riccati Equations of Zero-Sum Games", Proc. 6th Int. Symp. on Dynamic Games and Application, St-Jovite, Canada, 489/494 (1994)
- (20) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly: "Singular Perturbation Methods in Control", Analysis and Design, Academic Press (1986)
- (21) K.Zhou: "Essentials of Robust Control", Prentice-Hall, New Jersey, (1998)
- (22) J.M.Ortega: "Numerical Analysis, A Second Course", Philadelphia, SIAM, (1990)
- (23) 藤田, 今野, 田邊: "岩波講座 応用数学 - 最適化法", 岩波書店 (1994)
- (24) 安藤, 田沼: "数値解析手法による制御系設計", 計測自動制御学会 (1993)

沖 田 豪 (正員) 1964 年 3 月東北大学大学院工学研究科修士課程修了。同年 4 月広島大学工学部助手。同講師, 助教授を経て, 1978 年 4 月山口大学工学部教授。1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部教授となり現在に至る。工学博士。主として, システム同定の研究に従事。計測自動制御学会およびシステム制御情報学会会員。

向 谷 博 明 (正員) 1994 年 4 月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士 (工学)。98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手。現在に至る。主として, ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事。計測自動制御学会および機械学会会員。

新 田 智 昭 (学生員) 1999 年 3 月広島市立大学情報科学部情報機械システム工学科卒業。1999 年 4 月広島市立大学大学院情報科学研究科入学。現在に至る。主として, ロバスト制御, 適応制御に関する研究に従事。

小 林 康 秀 (正員) 1979 年 3 月九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程前期修了。同年 4 月山口大学工学部助手。1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部助教授となり現在に至る。工学博士。主として, システム同定の研究に従事。電子情報通信学会および計測自動制御学会会員。