

γ を含む連立型リカッチ代数方程式を解くための 数値計算アルゴリズム

正 員 向 谷 博 明 (広島市立大学)

正 員 小 林 康 秀 (広島市立大学)

正 員 沖 田 豪 (広島市立大学)

Numerical Algorithm for Solving Coupled Algebraic Riccati Equations with γ

Hiroaki Mukaidani, Member, Yasuhide Kobayashi, Member, Tsuyoshi Okita, Member (Hiroshima City University)

In this paper, we study the numerical algorithm for solving coupled algebraic Riccati equations with γ . The main result in this paper is to propose a new algorithm for solving coupled algebraic Riccati equations by making use of a Lyapunov iteration. The proposed algorithm is of the reduced-order and can be implemented as a synchronous parallel algorithm. As a matter of fact, the proposed algorithm is based on the successive approximations technique of dynamic programming. Under some assumption and the condition that guarantees a disturbance attenuation level γ which is larger than the maximum of the optimal disturbance attenuation level γ^* , the Lyapunov iterations are constructed such that the proposed algorithm converges to the positive semidefinite solution of the coupled algebraic Riccati equations. Furthermore, in order to show the effectiveness of the proposed algorithms, numerical examples are included.

キーワード: Coupled algebraic Riccati equations, Lyapunov iterations, Successive approximations

1. はじめに

線形 2 次ナッシュゲームに関するさまざまな研究報告がある^{(1) ~ (6)}。従来、ナッシュ均衡解を得るために必要な連立型リカッチ代数方程式を解くためのアルゴリズムは、リカッチ型再帰の数値解法 (Riccati Iterations)⁽²⁾ 及びリアプノフ型再帰の数値解法 (Lyapunov Iterations)^{(4) ~ (6)} の 2 種類が提案されている。前者は、アルゴリズムの提示に止まっており、収束性の証明は行われていない。後者は、Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら^{(5) (6)} が、まず、アルゴリズムの提示をしている。後に、Li らはダイナミックプログラミング (Dynamic Programing) の逐次近似 (Successive Approximations) の手法^{(4) (7) (8)} を利用して可安定、可検出の仮定のもとでリアプノフ型再帰の数値解法の収束性を証明している⁽⁴⁾。

近年、Limebeer らによって、ナッシュゲーム理論に基づいた混合 H_2/H_∞ 制御が提案された⁽¹⁾。Limebeer ら⁽¹⁾ の論文では、戦略対を構成するために H_∞ 制御に特有の設計パラメータである γ を含む連立型リカッチ代数方程式を解く必要がある。Freiling ら⁽²⁾ は、文献(1)にあ

るナッシュ均衡解を得るために必要な γ を含む連立型リカッチ代数方程式をリカッチ型再帰の数値解法を利用して解いている。しかし、使用しているリカッチ型再帰の数値解法の収束性については何も言及していない。さらに、設計パラメータである γ の下限値についても何も言及していない。したがって、設計パラメータである γ を含む連立型リカッチ代数方程式に対して適切に γ を設定して解いている。

本論文では、Limebeer ら⁽¹⁾ によって提案された混合 H_2/H_∞ 制御問題に関して、戦略対を構築するために解く必要のある設計パラメータ γ を含む連立型リカッチ代数方程式をリアプノフ型再帰の数値解法^{(4) ~ (6)} を利用して解くことを提案する。収束性の証明には Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら^{(5) (6)} と同様に、ダイナミックプログラミングの逐次近似の手法^{(4) (7) (8)} を利用して行う。本論文の大きな特徴として以下が挙げられる。Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら^{(5) (6)} が導出しているリアプノフ型再帰の数値解法は、扱っている問題対象が評価関数に凸性が保証されているナッシュゲーム問題であるので、可安定、可検出の仮定のもとで必ず収束する。しかし、本論文では、評価関数に

H_∞ 制御理論特有な設計パラメータである γ を含むためにその凸性が保証されない。したがって、システムの可安定、可検出の仮定だけでは提案されたアルゴリズムの収束性が保証されない。そこで、従来の文献(4),(5),(6)と異なり、設計パラメータ γ を含む連立型リカッチ代数方程式が準正定対称解を持つための下極限 γ^* に対して、十分条件であるが、連立型リカッチ代数方程式が準正定対称解を持つための下限値 $\bar{\gamma}$ を与える。ここで、下限値 $\bar{\gamma}$ 及び下極限 γ^* に対しては、 $(0 <)\gamma^* < \bar{\gamma}$ である関係が成り立つ。下限値 $\bar{\gamma}$ は初期値を求めるための2つの独立なリカッチ方程式(レギュラータタイプ及び H_∞ タイプリカッチ方程式)の可解条件から計算される。この下限値 $\bar{\gamma}$ の算出方法は文献(2),(4)にはない新たなアイデアである。本論文で提案されたアルゴリズムは、システムの可安定、可検出の仮定、及び $\bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して必ず収束する。さらに、本論文では $\gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma}$ を満たすある γ に対して提案されたアルゴリズムが初期値によって準正定対称解に収束する場合があることも示す。その他の大きな特徴として、文献(4)と異なり、アルゴリズムの収束性の証明を詳細かつ平易化している。 γ を含む連立型リカッチ代数方程式を解くために、Freilingら⁽²⁾が使用した非線形であるリカッチ型再帰の数値解法と異なる新たなリカッチ型再帰の数値解法、及びリカッチ型再帰の数値解法より簡単な線形であるリアプノフ型再帰の数値解法を提案していることがあげられる。

最後に、導出されたアルゴリズムの有用性を検証するために簡単な数値例を示す。この数値例によって、 γ を含む連立型リカッチ代数方程式に対して高精度の収束解が得られることを検証する。

本論文では、以下の記号を用いる。 $\|X\|_E$ は、実正方形行列 $X \in \mathbf{R}^{k_1 \times k_1}$ のユークリッドノルム $\|X\|_E \equiv [\text{tr} X^T X]^{1/2}$ 、 $\|G(s)\|_\infty$ は、伝達関数行列 $G(s) \in \mathbf{R}^{k_2 \times k_3}$ の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_s [\lambda_{\max}(G^*(s)G(s))]^{1/2}$ ($s = j\omega$, $\omega \in \mathbf{R}$)、 $O_{k_4 \times k_5} \in \mathbf{R}^{k_4 \times k_5}$ は零行列をそれぞれあらわす。

2. 混合 H_2/H_∞ 制御問題

この章では、既存の結果⁽¹⁾であるナッシュゲーム理論に基づく混合 H_2/H_∞ 制御問題と戦略対を得るための γ を含む連立型リカッチ方程式を紹介する。

以下の線形時不変システムを考える⁽¹⁾。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \quad x(0) = 0 \quad \cdots (1a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} Cx(t) \\ Du(t) \end{bmatrix} \quad \cdots (1b)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル。 $u(t) \in \mathbf{R}^{l_1}$ は制御入力。 $w(t) \in \mathbf{R}^{l_2}$ は外乱。 $z(t) \in \mathbf{R}^m$ は評価出力とする。また、各係数行列は適当な次元をもつと仮定する。また、正規化条件として、以下の条件を仮定する。

〔仮定1〕 $D^T D = I$

ただし、 I は単位行列である。

さらに、戦略対の存在を保障するために一般性を失うことなく以下の条件を仮定する。

〔仮定2〕 行列対 (A, B_1) , (A, B_2) は共に可安定であり、行列対 (A, C) は可検出である。

続いて、混合 H_2/H_∞ 最適制御則が存在するための必要十分条件を与える⁽¹⁾。

〔補題1〕 仮定1, 2 が成立するシステム(1)を考える。

又、行列 $S = B_2 B_2^T$, $U = B_1 B_1^T$, $Q = C^T C$ を定義する。このとき、連立型リカッチ代数方程式(2)の準正定対称解 $X \geq 0$, $Y \geq 0$ が存在するならば以下の条件(A-1), (A-2)が成立する。

$$(A - SY)^T X + X(A - SY) + Q + \gamma^{-2} X U X + Y S Y = 0 \quad \cdots (2a)$$

$$(A + \gamma^{-2} U X)^T Y + Y(A + \gamma^{-2} U X) + Q - Y S Y = 0 \quad \cdots (2b)$$

(A-1) 行列 $A - SY$ は安定行列。

(A-2) もし行列対 $(A + \gamma^{-2} U X, C)$ が可検出ならば

(i) 行列 $A + \gamma^{-2} U X - SY$ は安定行列。

(ii) 以下に定義される戦略(3)は、さらに2つの条件(a), (b)を満足する。

$$w^*(t, x) = \gamma^{-2} B_1^T X x(t) \quad \cdots (3a)$$

$$u^*(t, x) = -B_2^T Y x(t) \quad \cdots (3b)$$

(a) $u(t) = u^*(t, x)$ をシステム(1)に入力したとき、プロパーかつ実有理安定な伝達関数 $G(s)$ は $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ を満足する。ただし、

$$G(s) = \begin{bmatrix} C \\ -DB_2^T Y \end{bmatrix} \cdot (sI - A + SY)^{-1} B_1 \quad (4)$$

(b) $J_2(u^*, w^*) \leq J_2(u, w^*) \quad \cdots (5)$

$$J_2(u, w) = \int_0^\infty z^T(t) z(t) dt \quad \cdots (6)$$

逆に、以下の4つの条件(a-1) ~ (a-4)

(a-1) $u(t) = u^*(t, x)$ を入力したとき、 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ 。

(a-2) $J_2(u^*, w^*) \leq J_2(u, w^*)$

(a-3) 行列 $A + B_2 K_2$ は安定行列。

(a-4) 行列対 $(A + B_1 K_1, C)$ は可検出。

を全て満足するような時不変状態フィードバック戦略

$$w^*(t, x) = K_1 x(t)$$

$$u^*(t, x) = K_2 x(t)$$

が存在すると仮定する。このとき、(2)を満足する準正定対称解 $X \geq 0$, $Y \geq 0$ が存在する。



Fig.1

戦略対 $w^*(t, x) = K_1 x(t)$, $u^*(t, x) = K_2 x(t)$ を求めるためには、連立型リカッチ代数方程式 (2) を解かなければならない。Freiling ら⁽²⁾ は、Example 2 で、 H_2/H_∞ 制御に関する連立型リカッチ代数方程式を解くために、非線形方程式に基づくリカッチ型再帰的数値解法⁽²⁾ を使用している。しかし、Freiling ら⁽²⁾ はアルゴリズムの提示だけに止まっており、収束性の証明は行っていない。さらに、設計パラメータ γ の下限値について何も言及していない。一方、ナッシュゲームに関する連立型リカッチ代数方程式については、Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾ が線形方程式に基づくリアプノフ型再帰的数値解法を提案している。さらに Li ら⁽⁴⁾ はダイナミックプログラミングの逐次近似の手法⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾ を利用して適当な仮定のもとでリアプノフ型再帰的数値解法の収束性を証明している。

次の章では、本論文の主要な結果である戦略対を得るための γ に依存する連立型リカッチ代数方程式 (2) に対して、線形方程式に基づくリアプノフ型再帰的数値解法を提案する。さらに準正定対称解が存在するための γ の下限値 $\bar{\gamma}$ の導出を行う。

3. リアプノフ型再帰的数値解法

3.1 アルゴリズム まず、連立型リカッチ代数方程式 (2) を解くためのリアプノフ型再帰的数値解法を与える。

[Lyapunov iterations algorithm]

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2} U X^{(n)} - S Y^{(n)})^T X^{(n+1)} \\ & + X^{(n+1)} (A + \gamma^{-2} U X^{(n)} - S Y^{(n)}) \\ & + Q - \gamma^{-2} X^{(n)} U X^{(n)} + Y^{(n)} S Y^{(n)} = 0 \quad (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2} U X^{(n)} - S Y^{(n)})^T Y^{(n+1)} \\ & + Y^{(n+1)} (A + \gamma^{-2} U X^{(n)} - S Y^{(n)}) \\ & + Q + Y^{(n)} S Y^{(n)} = 0 \quad \dots\dots\dots (7b) \\ & (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ただし、初期条件 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ はそれぞれ (8b), (8a) で与えられる準正定対称安定化解である。

$$A^T Y^{(0)} + Y^{(0)} A + Q - Y^{(0)} S Y^{(0)} = 0 \quad \dots\dots (8a)$$

$$\begin{aligned} & (A - S Y^{(0)})^T X^{(0)} + X^{(0)} (A - S Y^{(0)}) \\ & + Q + \gamma^{-2} X^{(0)} U X^{(0)} + Y^{(0)} S Y^{(0)} = 0 \quad \dots (8b) \end{aligned}$$

初期条件である $Y^{(0)}$ を得るためのリカッチ方程式 (8a) は、通常のレギュレータタイプのリカッチ方程式である。ここで、仮定 2 から唯一の準正定対称安定

化解 $Y^{(0)}$ が必ず存在する⁽¹²⁾。一方、 $X^{(0)}$ を得るためのリカッチ方程式 (8b) は、有界実補題⁽⁹⁾ を利用して、仮定 2 から行列 $A - S Y^{(0)}$ が安定であるので $(0 <) \bar{\gamma} < \gamma$ の範囲では必ず準正定対称安定化解 $X^{(0)}$ が存在する。ただし、

$$\begin{aligned} & \|E(sI - A + S Y^{(0)})^{-1} B_1\|_\infty = \bar{\gamma} \\ & E^T E = Q + Y^{(0)} S Y^{(0)} \end{aligned}$$

である。

リアプノフ型再帰的数値解法 (7) に対して、以下の定理が得られる。

[定理 1] 仮定 1 および仮定 2 の条件のもと、 $(0 <) \bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対してアルゴリズム (7) は収束する。また、その収束解は連立型リカッチ代数方程式 (2) の準正定対称解である。ここで、 $\bar{\gamma}$ はリカッチ代数方程式 (8b) が準正定対称かつ安定化解をもつための下限値である。

状態が利用可能である H_∞ 制御問題に関して、制御則が存在する γ の下限値 $\underline{\gamma}$ は、ゲーム型リカッチ方程式を利用すれば求めることが可能である⁽⁹⁾。一方、混合 H_2/H_∞ 制御問題に関して、戦略対が存在する下極限 γ^* を求めることは、通常の H_∞ 制御問題と異なり、戦略対を得るために解かなければならないリカッチ方程式が連立型であるので解析的・数値的にみて特殊な場合を除いて不可能である。そこで、下極限 γ^* を与える代わりに、十分条件として、 $\underline{\gamma} \leq \gamma^* < \bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して混合 H_2/H_∞ 制御問題の均衡解が存在する $\bar{\gamma}$ を与えた。 $\bar{\gamma}$ は、注意にあるように有界実補題⁽⁹⁾ を利用すれば比較的簡単に求めることが可能である。ここで、 $\underline{\gamma}$, γ^* , $\bar{\gamma}$ の大きさの関係を Fig. 1 に示す。理論的にも H_∞ 最適フィードバックでない $u(t, x) = -B_2^T Y^{(0)} x(t)$ をシステム (1) に入力したときの γ の値 $\bar{\gamma}$ が最も大きい。本論文では、有界実補題により、性質の良く知られた H_∞ タイプリカッチ方程式 (8b) を利用することにより混合 H_2/H_∞ 制御可能な γ の範囲を導出した。以上が新しいアイデアである。この特徴は、Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾ が提案しているナッシュゲームに対するリアプノフ型再帰的数値解法にはない。さらに、Freiling ら⁽²⁾ と異なり、十分条件であるが設計パラメータである γ の下限値を与えたところが大きく異なる。

3.2 定理 1 の証明 本論文で扱っているリアプノフ型再帰的アルゴリズム (7) は、設計パラメータ γ を含んでいるために Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾ が導出したリアプノフ型再帰的数値解法と基本的に異なっている。したがって、Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾ のようにシステムの係数行列に対して可安定性、可検出性だけではアルゴリズム (7) は収束しないことに注意を要する。以上の性質より、 γ を適切に与えることが提案されたアルゴリズム (7) の収束性を証明する上での鍵となる。そこで、

本論文では初期値を得るためのリカッチ方程式 (8b) を利用することで、アルゴリズムが収束するための γ の下限値 $\bar{\gamma}$ を与える。証明は2つのパートに分かれる。1つ目は、すぐに定義されるハミルトン関数列 (11) の収束の証明。2つ目は得られた解 $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ の準正定対称性の証明である。証明の基本的手順を説明する。前半は、各イテレーションごとに2つの最適化問題 (以下に定義される式 (9), (10) のことを指す) を用意して、それぞれの評価関数を最適にする制御則をハミルトン関数列に置き換えて求める。通常、最適制御問題では、最適制御則を得るために、ハミルトン関数を導入して、最適性の必要条件を経由して、最終的にリカッチ方程式を解く必要がある。このリカッチ方程式の解を利用することによって最適制御則を求める⁽¹²⁾。しかし、本論文では、ダイナミックプログラミングの逐次近似の手法⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾を利用して最適制御則を求めるために、リカッチ方程式ではなくリアプノフ方程式の解を利用することによって近似制御則を求める。すなわち、各イテレーションごとにリアプノフ方程式を融合することによって、帰納的に逐次近似制御則を導出する。このとき出現するリアプノフ方程式が提案するリアプノフ型再帰の数値解法 (7) に相当する。また、ハミルトン関数列の収束の証明には、評価関数の単調減少性と有界性を利用することによってハミルトン関数列の収束が完了する。ハミルトン関数列が収束することによって、逐次近似制御則が補題1の均衡解 (3) に収束する。後半は、リアプノフ方程式の性質を利用して解 $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ の準正定対称性の証明を行う。ここで注意しなければならないことは、本論文では収束の証明に評価関数の単調減少性と有界性を利用していることである。この特徴は文献 (4) には記述されていない。以上、アルゴリズムの収束の証明に単調性と有界性を利用することによって、証明が平易化している点が新規である。次節で詳しく定理1の証明を行う。

(証明) はじめに、ハミルトン関数列の収束の証明を行う。ある $n = k$ に対して、近似安定化フィードバック $u^{(k)}(t, x) = -B_2^T Y^{(k)} x(t)$ および外乱 $w^{(k)}(t, x) = \gamma^{-2} B_1^T X^{(k)} x(t)$ を用意して、以下の2つの最小化問題を考える。ただし、 $n = 0$ の段階ではリカッチ方程式 (8a) 及び (8b) のそれぞれの準正定対称安定化解 $X^{(0)} \geq 0$, $Y^{(0)} \geq 0$ を用いて近似安定化フィードバック $u^{(0)}(t, x) = -B_2^T Y^{(0)} x(t)$ および外乱 $w^{(0)}(t, x) = \gamma^{-2} B_1^T X^{(0)} x(t)$ を用意する。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u^{(k)}(t) \dots\dots\dots (9a)$$

$$\begin{aligned} & V_1(w, u^{(k)}, x, t) \\ &= \min_w \int_t^\infty [\gamma^2 w(\tau)^T w(\tau) - \{x(\tau)^T Q x(\tau) \\ &\quad + u^{(k)T}(\tau) u^{(k)}(\tau)\}] d\tau \dots\dots\dots (9b) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w^{(k)}(t) + B_2 u(t) \dots\dots\dots (10a)$$

$$\begin{aligned} & V_2(w^{(k)}, u, x, t) \\ &= \min_u \int_t^\infty [x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T u(\tau)] d\tau \dots\dots (10b) \end{aligned}$$

最小原理より2つの最小化問題 (9), (10) は2つハミルトン関数 (11a), (11b) をそれぞれ w , u に関して最小化することに等価である。したがって、ハミルトン関数 (11) を最小化することによって新たな近似戦略対 $w^{(k+1)}$, $u^{(k+1)}$ を求める。ここで、偏微分 $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ は既知の近似式として代入されていることに注意を要する。

$$\begin{aligned} & H_1(t, x, w, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ &= \gamma^2 w^T w - x^T Q x - u^{(k)T} u^{(k)} \\ &\quad + p_1^{(k)T} (Ax + B_1 w + B_2 u^{(k)}) \dots\dots\dots (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_2(t, x, w^{(k)}, u, p_2^{(k)}) \\ &= x^T Q x + u^T u + p_2^{(k)T} (Ax + B_1 w^{(k)} + B_2 u) \dots\dots (11b) \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{\partial}{\partial x} V_i^{(k)}(x, t) = p_i^{(k)}(t), \quad (i = 1, 2)$$

$$\dot{x}(t) = [A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}] x(t)$$

$$\begin{aligned} V_1^{(k)}(x, t) &= \int_t^\infty x^T(\tau) [\gamma^{-2} X^{(k)} U X^{(k)} \\ &\quad - Q - Y^{(k)} S Y^{(k)}] x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$V_2^{(k)}(x, t) = \int_t^\infty x^T(\tau) [Q + Y^{(k)} S Y^{(k)}] x(\tau) d\tau$$

(注意) 行列 $A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}$ は安定行列である⁽⁴⁾⁽⁷⁾。したがって、 $V_i^{(k)}(x, t)$, $p_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$) を求めることが可能である。すなわち、関係式 $V_i^{(k)}(x, t)$ の右辺の積分を実行し、さらに x について偏微分を実行すればハミルトン関数 (11) の偏微分 $p_i^{(k)}$ を求めることが可能となるので既知となる。

ハミルトン関数 (11a) を最小にする外乱 $w^{(k+1)}(t)$ とハミルトン関数 (11b) を最小にする近似安定化制御則 $u^{(k+1)}(t)$ は Nash 均衡制御問題と同様な手順によって、既知の偏微分 $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ を利用して (12) のように与えられる。

$$w^{(k+1)}(t, x) = -\frac{1}{2} \gamma^{-2} B_1^T p_1^{(k)}(t) \dots\dots\dots (12a)$$

$$u^{(k+1)}(t, x) = -\frac{1}{2} B_2^T p_2^{(k)}(t) \dots\dots\dots (12b)$$

一方、 $V_1^{(k)}(x, t)$, $V_2^{(k)}(x, t)$ は

$$\frac{\partial}{\partial x} V_i^{(k)}(x, t) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} V_i^{(k)}(x, t), \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

の関係式を利用して偏微分方程式 (14) を満たす。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} V_1^{(k)}(x, t) \cdot [A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}] x(t) \\ &= -x(t)^T [\gamma^{-2} X^{(k)} U X^{(k)} - Q \\ & \quad - Y^{(k)} S Y^{(k)}] x(t) \dots\dots\dots (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} V_2^{(k)}(x, t) \cdot [A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}] x(t) \\ &= -x(t)^T [Q + Y^{(k)} S Y^{(k)}] x(t) \dots\dots\dots (14b) \end{aligned}$$

偏微分方程式 (14) から $V_1^{(k)}(x, t)$, $V_2^{(k)}(x, t)$ は (15) の形をもつ.

$$V_1^{(k)}(x, t) = -x(t)^T X^{(k+1)} x(t) \dots\dots\dots (15a)$$

$$V_2^{(k)}(x, t) = x(t)^T Y^{(k+1)} x(t) \dots\dots\dots (15b)$$

(15) を偏微分することによって (16) を得る.

$$\frac{\partial}{\partial x} V_1^{(k)}(x, t) = -2 X^{(k+1)} x(t) = p_1^{(k)}(t) \cdot (16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_2^{(k)}(x, t) = 2 Y^{(k+1)} x(t) = p_2^{(k)}(t) \dots (16b)$$

関係式 (16) を偏微分方程式 (14) に代入すれば 2 つのリアプノフ方程式 (17) が得られる. ここで,

$$\begin{aligned} & 2x^T(t)(A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)})^T X^{(k+1)} x(t) \\ &= x^T(t)[(A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)})^T X^{(k+1)} \\ & \quad + X^{(k+1)}(A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)})] x(t) \end{aligned}$$

の関係を使用している.

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)})^T X^{(k+1)} \\ & \quad + X^{(k+1)}(A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}) \\ & \quad + Q - \gamma^{-2} X^{(k)} U X^{(k)} + Y^{(k)} S Y^{(k)} = 0 \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)})^T Y^{(k+1)} \\ & \quad + Y^{(k+1)}(A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}) \\ & \quad + Q + Y^{(k)} S Y^{(k)} = 0 \dots\dots\dots (17b) \end{aligned}$$

2 つのリアプノフ方程式 (17) に対して, 有界実補題より行列 $A + \gamma^{-2} U X^{(k)} - S Y^{(k)}$ は $\bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して安定行列である. したがって, 方程式 (17b) に対して, 第 3 項目以降である行列 $Q + Y^{(k)} S Y^{(k)}$ は準正定対称であるからリアプノフ方程式の性質を利用して準正定対称解 $Y^{(k+1)} \geq 0$ 解をもつ. 以上より, 関係式 (12) 及び (16) から均衡解 (18) を得る.

$$w^{(k+1)}(t, x) = \gamma^{-2} B_1^T X^{(k+1)} x(t) \dots\dots\dots (18a)$$

$$u^{(k+1)}(t, x) = -B_2^T Y^{(k+1)} x(t) \dots\dots\dots (18b)$$

一方, 関係式 (16) 及び $w^{(k)}(t, x)$, $u^{(k)}(t, x)$ をハミルトン関数 (11) に代入して, 連立型リカッチ代数方程式 (17) を利用すれば等式 (19) を得る.

$$\begin{aligned} & H_1(t, x, w^{(k)}, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ &= \gamma^2 w^{(k)T} w^{(k)} - x^T Q x - u^{(k)T} u^{(k)} \\ & \quad + p_1^{(k)T} (A x + B_1 w^{(k)} + B_2 u^{(k)}) \equiv 0 \dots (19a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_2(t, x, w^{(k)}, u^{(k)}, p_2^{(k)}) \\ &= x^T Q x + u^{(k)T} u^{(k)} \\ & \quad + p_2^{(k)T} (A x + B_1 w^{(k)} + B_2 u^{(k)}) \equiv 0 \dots (19b) \end{aligned}$$

したがって, 不等式 (20) を得る.

$$\begin{aligned} & 0 \equiv H_1(t, x, w^{(k)}, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ & \geq \min_w H_1(t, x, w, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ & = H_1(t, x, w^{(k+1)}, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \dots\dots\dots (20a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0 \equiv H_2(t, x, w^{(k)}, u^{(k)}, p_2^{(k)}) \\ & \geq \min_u H_2(t, x, w^{(k)}, u, p_2^{(k)}) \\ & = H_2(t, x, w^{(k)}, u^{(k+1)}, p_2^{(k)}) \dots\dots\dots (20b) \end{aligned}$$

各 $n = k$ で更新されたハミルトン関数を最適化した結果, k が十分大きくなれば逐次回数 k の増加にともない, 2 つのハミルトン関数列 $H_1(t, x, w^{(k+1)}, u^{(k)}, p_1^{(k)})$, $H_2(t, x, w^{(k)}, u^{(k+1)}, p_2^{(k)})$ は減少傾向を示す⁽⁵⁾. したがって, 逐次近似法⁽⁷⁾の単調性と最適化の特性を利用することによって, 2 つの単調減少数列 (21) を得る.

$$V_1^{(k)}(x, t) \geq V_1^{(k+1)}(x, t), \dots\dots\dots (21a)$$

$$V_2^{(k)}(x, t) \geq V_2^{(k+1)}(x, t), \dots\dots\dots (21b)$$

ここで, $0 \geq V_1^{(k)}(x, t) \geq \bar{V}_1$, $V_2^{(k)}(x, t) \geq 0$ が成立する. ただし, $\bar{V}_1$ の下限値の存在は文献 (1) の Lemma 2.2 に示されている. $V_i^{(k)}(x, t)$, ($i = 1, 2$) の単調減少性, 及び下限値の存在から, 2 つの数列 (21) は収束することが分かる. 2 つの数列 (21) が収束すれば, $\frac{\partial}{\partial x} V_i^{(k)}(x, t) = p_i^{(k)}(t)$, ($i = 1, 2$), $w^{(k)}(t, x) = -\frac{1}{2} \gamma^{-2} D_\varepsilon^T p_1^{(k-1)}(t)$, $u^{(k)}(t, x) = -\frac{1}{2} B_\varepsilon^T p_2^{(k-1)}(t)$ の関係から $p_i^{(k)}(t)$, ($i = 1, 2$), $w^{(k)}(t, x)$, $u^{(k)}(t, x)$ も収束することが示される.

以上より, 十分大きな n に対して, 逐次近似法を利用して (22) が成立する.

$$\begin{aligned} & \min_w H_1(t, x, w, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ &= H_1(t, x, w^{(k+1)}, u^{(k)}, p_1^{(k)}) \\ & \rightarrow H_1(t, x, w^{(k+1)}, u^{(k+1)}, p_1^{(k+1)}) \equiv 0 \dots (22a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min_u H_2(t, x, w^{(k)}, u, p_2^{(k)}) \\ &= H_2(t, x, w^{(k)}, u^{(k+1)}, p_2^{(k)}) \\ & \rightarrow H_2(t, x, w^{(k+1)}, u^{(k+1)}, p_2^{(k+1)}) \equiv 0 \dots (22b) \end{aligned}$$

したがって, 2 つのハミルトン関数の最小値はともに 0 に近づく. このとき, ハミルトン関数 H_1, H_2 は共に付録

にある必要条件 (A.4) を満足する。以上より準正定対称解で生成される数列 $\{X^{(k)}\}, \{Y^{(k)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) は $n \rightarrow \infty$ で準正定対称解 $\{X^{(\infty)}\}, \{Y^{(\infty)}\}$ に収束する。このとき、収束解 $\{X^{(\infty)}\}, \{Y^{(\infty)}\}$ は連立型リカッチ代数方程式 (23) を満たす。

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2}UX^{(\infty)} - SY^{(\infty)})^T X^{(\infty)} \\ & + X^{(\infty)}(A + \gamma^{-2}UX^{(\infty)} - SY^{(\infty)}) \\ & + Q - \gamma^{-2}X^{(\infty)}UX^{(\infty)} + Y^{(\infty)}SY^{(\infty)} = 0 \quad (23a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2}UX^{(\infty)} - SY^{(\infty)})^T Y^{(\infty)} \\ & + Y^{(\infty)}(A + \gamma^{-2}UX^{(\infty)} - SY^{(\infty)}) \\ & + Q + Y^{(\infty)}SY^{(\infty)} = 0 \quad \dots\dots\dots (23b) \end{aligned}$$

次に一般の n に対して、2 つの解 $X^{(n)}, Y^{(n)}$ の準正定対称性を示す。全ての n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して閉ループシステム (1a) の係数行列 $A + \gamma^{-2}UX^{(n)} - SY^{(n)}$ は安定行列である⁽⁵⁾。したがって、リアプノフ方程式の性質から、リアプノフ方程式 (7a) は必ず対称解をもつ。続いて、リアプノフ方程式 (7a) を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & (A - SY^{(n)})^T X^{(n+1)} + X^{(n+1)}(A - SY^{(n)}) \\ & + Q - \gamma^{-2}(X^{(n+1)} - X^{(n)})U(X^{(n+1)} - X^{(n)}) \\ & + \gamma^{-2}X^{(n+1)}UX^{(n+1)} + Y^{(n)}SY^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

ある小さな自然数 n_0 に対して $n_0 \leq n$ を満たす全ての n に対して上式の第 3 項目以降である $Q - \gamma^{-2}(X^{(n+1)} - X^{(n)})U(X^{(n+1)} - X^{(n)}) + \gamma^{-2}X^{(n+1)}UX^{(n+1)} + Y^{(n)}SY^{(n)}$ は常に準正定対称行列となる。また、文献 (4) から全ての n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して $A - SY^{(n)}$ は安定行列になるので上式のリアプノフ方程式は、 $n_0 \leq n$ を満たす全ての n に対してリアプノフ方程式の性質から準正定対称解 $X^{(n+1)} \geq 0$ をもつ。続いて、リアプノフ方程式 (7b) について考察する。全ての n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して、閉ループシステム (1a) の係数行列 $A + \gamma^{-2}UX^{(n)} - SY^{(n)}$ は安定行列⁽⁵⁾ かつリアプノフ方程式 (7b) の第 3 項目以降である行列 $Q + Y^{(n)}SY^{(n)}$ は常に準正定対称であるから、リアプノフ方程式の性質を利用してリアプノフ方程式 (7b) も準正定対称解 $Y^{(n+1)} \geq 0$ をもつ。したがって、 $n_0 \leq n$ を満たす全ての n に対して 2 つの解 $X^{(n)} \geq 0, Y^{(n)} \geq 0$ は準正定対称行列となる。以上より、上記の操作を帰納的に継続することによって近似均衡解 $w^{(n)}(t, x) = \gamma^{-2}B_1^T X^{(n)}x(t), u^{(n)}(t, x) = -B_2^T Y^{(n)}x(t)$ が得られる。以上から定理 1 の証明が完了する。□

3.3 定理 1 の拡張 定理 1 で得られた結果は、仮定 2 の条件のもとで $(0 <) < \bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して、連立型リカッチ代数方程式 (2) の準正定対称解の存在を保障する。しかし、 $(0 <) \gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma}$ を満たす γ に対して準正定対称解の存在については不明である。これは、先にも述べたように、定理 1 で得られた結果が保守的

な十分条件であるためである。しかし、初期値 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ 及び γ を行列 $A + \gamma^{-2}UX^{(n)} - SY^{(n)}$ が安定行列になるように選択すれば定理 1 の証明を基に $\gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma}$ を満たす γ に対してアルゴリズム (7) は収束する場合があることが分かる。したがって、定理 1 の拡張として以下の定理を得る。

〔定理 2〕 仮定 1 および仮定 2 の条件のもと、連立型リカッチ代数方程式 (2) の準正定対称解が存在すると仮定する。このとき、行列 $A + \gamma^{-2}UX^{(n)} - SY^{(n)}$ が安定行列になるような初期条件 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ 及び γ に対してアルゴリズム (7) は収束する。また、その収束解は連立型リカッチ代数方程式 (2) の準正定対称解である。
(証明) まず、行列 $A + \gamma^{-2}UX^{(n)} - SY^{(n)}$ が安定行列になるように初期値 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ 及び γ を選択する。後は定理 1 と同様に、Li ら⁽⁴⁾ が使用しているダイナミックプログラミングの逐次近似の手法⁽⁴⁾⁽⁵⁾ を利用して証明される。□

4. リカッチ型再帰的数値解法

連立型リカッチ代数方程式 (2) を解くために文献 (2) ではリカッチ型再帰的数値解法が提案されている。この章では、文献 (2) で提案されているリカッチ型再帰的数値解法とは全く異なるリカッチ型再帰的数値解法を提案する。ただし、本論文で提案するリカッチ型再帰的数値解法に対して、収束の証明は行わない。しかし、提案されたアルゴリズムが準正定対称解に収束すれば、 $\bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して補題 1 の (A-1), (A-2) の性質を満足する。

連立型リカッチ代数方程式 (2) を解くためのリカッチ型再帰的数値解法 (24) を与える。

[Riccati iterations algorithm]

$$\begin{aligned} & (A - SY^{(n)})^T X^{(n+1)} + X^{(n+1)}(A - SY^{(n)}) \\ & + \gamma^{-2}X^{(n+1)}UX^{(n+1)} \\ & + Q + Y^{(n)}SY^{(n)} = 0 \quad \dots\dots\dots (24a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A + \gamma^{-2}UX^{(n+1)})^T Y^{(n+1)} \\ & + Y^{(n+1)}(A + \gamma^{-2}UX^{(n+1)}) \\ & - Y^{(n+1)}SY^{(n+1)} + Q = 0 \quad \dots\dots\dots (24b) \end{aligned}$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

ただし、初期値はリカッチ方程式 (8a) の準正定対称安定化解 $Y^{(0)}$ である。

文献 (2) で提案されているリカッチ型再帰的数値解法と異なる点は、初期値が $Y^{(0)}$ しか必要ない。さらに、方程式 (2b) と方程式 (24b) は互いに等価である。以上の特徴を有する。特に、方程式 (2b) と方程式 (24b) を等価にすることによって、収束の回数の減少が期待できる。実際に、5 章の数値例でリアプノフ型再帰的数値解法より、提案されたリカッチ型再帰的数値解法の方が収束回数が減

少していることを検証する.

ここで, リカッチ型再帰の数値解法 (24) の導出背景を説明する. まず $n = 0$ で, システム (1) の外乱 w を $w = w^{(0)} \equiv 0$ と設定して, システム (1) 及び (25) で構成される LQ (Linear Quadratic) 問題を考える.

$$\min J_u^{(0)} = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u) dt \quad \dots\dots\dots (25)$$

(25) の積分を最小にする制御入力 u は見かけ上[†]リカッチ方程式 (8a) の準正定対称安定化解 $Y^{(0)}$ を利用して $u = u^{(0)} = -B_2^T Y^{(0)} x$ となる. 次に $u = u^{(0)} \equiv -B_2^T Y^{(0)} x$ と設定して以下の LQ-min 問題^{††}を考える⁽¹¹⁾.

$$\dot{x}(t) = (A - B_2 B_2^T Y^{(0)}) x(t) + B_1 w(t) \quad \dots\dots\dots (26a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C \\ -DB_2^T Y^{(0)} \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (26b)$$

$$\min J_w^{(1)} = \int_0^\infty (\gamma^2 w^T w - z^T z) dt \geq 0 \quad \dots\dots\dots (26c)$$

積分拘束条件 (26c) を満たし, かつ積分 (26c) を最小にする外乱 $w^{(1)}$ はリカッチ方程式 (27)

$$(A - SY^{(0)})^T X^{(1)} + X^{(1)}(A - SY^{(0)}) + \gamma^{-2} X^{(1)} U X^{(1)} + Q + Y^{(0)} S Y^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

の準正定対称安定化解 $X^{(1)}$ を利用して $w = w^{(1)} = \gamma^{-2} B_1^T X^{(1)} x$ となる. 再度, システム (1a) の外乱 w を $w = w^{(1)} \equiv \gamma^{-2} B_1^T X^{(1)} x$ と設定して LQ 問題を考える.

$$\dot{x}(t) = (A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X^{(1)}) x(t) + B_2 u(t) \quad \dots\dots\dots (28a)$$

$$\min J_u^{(1)} = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u) dt \quad \dots\dots\dots (28b)$$

(28b) の積分を最小にする制御入力 $u^{(1)}$ はリカッチ方程式 (29) の準正定対称安定化解 $Y^{(1)}$ を利用して $u = u^{(1)} = -B_2^T Y^{(1)} x$ となる. ただし,

$$(A + \gamma^{-2} U X^{(1)})^T Y^{(1)} + Y^{(1)}(A + \gamma^{-2} U X^{(1)}) - Y^{(1)} S Y^{(1)} + Q = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

以上の操作を帰納的に繰り返していけば, 近似戦略対 $u = u^{(n)} = -B_2^T Y^{(n)} x$, $w = w^{(n)} = \gamma^{-2} B_1^T X^{(n)} x$ は $u = u^{(n)} = -B_2^T Y^{(n)} x \rightarrow u^*$, $w = w^{(n)} = \gamma^{-2} B_1^T X^{(n)} x \rightarrow w^*$, ($n \rightarrow \infty$) に均衡していくと予想される. 2 つのリカッチ方程式 (27), (29) を一般化すればリカッチ型再帰の数値解法 (24) を得る.

[†]システム (1a) の初期値は $x(0) = 0$ であることに注意する必要がある.

^{††}文献 (11) では評価関数 (26c) が $J_w^{(1)} = \int_0^\infty (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \leq 0$ となっているので LQ-max 問題と呼ばれている.

5. 数 値 例

Freiling ら⁽²⁾ がリカッチ型再帰の数値解法を利用して実際に解いている数値例 (Example 2) に対して, 本論文で提案されたアルゴリズムを適用し, 準正定対称解を求める. システム (1) における係数行列は以下で与えられる⁽²⁾.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O_{4 \times 2} \\ O_{1 \times 3} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.016896 & -0.066099 & -28.891 \\ -0.24501 & -0.015623 & -0.14625 \\ 0.53061 & -0.034715 & -0.50025 \\ 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -100.0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.19474 & 0 \\ 0.08988 & 0 \\ 0.21103 & 0 \\ 0 & -0.08 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.24342 \\ 0.11235 \\ 0.26379 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \text{diag} \left(0, 0, 0, 0.36, 100.0 \right)$$

まず, 定理 1 の検証を行う. 初期値を与えるリカッチ方程式 (8a), (8b) のうち, (8a) の解 $Y^{(0)}$ は, 通常のレギュレータ理論のリカッチ方程式と同一なので, 仮定 2 の条件のもと容易に求めることができる. 一方, (8b) の準正定対称である安定化解 $X^{(0)}$ は, MATLAB を利用して, $1.2321 = \bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ に対して存在することが分かる. 本論文では, $1.2321 = \bar{\gamma} < \gamma = 1.25$ として戦略対を構築する. 初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ は Table 1 のように計算される. 続いて, 初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ に対するリアプノフ型再帰の数値解法 (7) は, 30 回で収束した. ここで, 収束判定は $\max\{\|F_1(X^{(n)}, Y^{(n)})\|_E, \|F_2(X^{(n)}, Y^{(n)})\|_E\} < 10^{-8}$ とした. 収束解 $X^{(30)}$, $Y^{(30)}$ は Table 2 のように計算される. 本論文で提案されたリアプノフ型再帰の数値解法の有用性を確認するため, 準正定対称解 $X^{(30)}$, $Y^{(30)}$ を連立型リカッチ代数方程式 (2) に代入したときの残差を計算する.

$$\|F_1(X^{(30)}, Y^{(30)})\|_E = 2.622e - 09$$

$$\|F_2(X^{(30)}, Y^{(30)})\|_E = 8.037e - 09$$

ただし,

$$F_1(X, Y) = (A - SY)^T X + X(A - SY)$$

$$+ Q + \gamma^{-2} X U X + Y S Y$$

$$F_2(X, Y) = (A + \gamma^{-2} U X)^T Y + Y(A + \gamma^{-2} U X)$$

$$+ Q - Y S Y$$

Table 1. Initial values of $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ with $\gamma = 1.25$.

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 5.1220348e-03 & -3.0614909e-01 & -1.3953115e-01 & -7.5500279e-02 & 2.0463518e-04 \\ -3.0614909e-01 & 1.9536406e+01 & 8.9326293e+00 & 3.8528506e+00 & -1.3100513e-02 \\ -1.3953115e-01 & 8.9326293e+00 & 4.0903110e+00 & 1.7268950e+00 & -5.9950958e-03 \\ -7.5500279e-02 & 3.8528506e+00 & 1.7268950e+00 & 1.7642450e+00 & -2.5419398e-03 \\ 2.0463518e-04 & -1.3100513e-02 & -5.9950958e-03 & -2.5419398e-03 & 4.9927297e-01 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.0048884e-03 & -1.6324391e-01 & -7.3996270e-02 & -5.4956740e-02 & 1.8365457e-04 \\ -1.6324391e-01 & 9.6236210e+00 & 4.3806074e+00 & 2.6812831e+00 & -1.0876029e-02 \\ -7.3996270e-02 & 4.3806074e+00 & 1.9998520e+00 & 1.1945605e+00 & -4.9589549e-03 \\ -5.4956740e-02 & 2.6812831e+00 & 1.1945605e+00 & 1.3914231e+00 & -2.9776991e-03 \\ 1.8365457e-04 & -1.0876029e-02 & -4.9589549e-03 & -2.9776991e-03 & 4.9876852e-01 \end{bmatrix}$$

Table 2. Convergence values of $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ with $\gamma = 1.25$.

$$X^{(30)} = \begin{bmatrix} 4.4656875e-03 & -2.5810736e-01 & -1.1741421e-01 & -7.2154140e-02 & 1.7223564e-04 \\ -2.5810736e-01 & 1.5869379e+01 & 7.2412482e+00 & 3.7292626e+00 & -1.0623733e-02 \\ -1.1741421e-01 & 7.2412482e+00 & 3.3101126e+00 & 1.6725734e+00 & -4.8526282e-03 \\ -7.2154140e-02 & 3.7292626e+00 & 1.6725734e+00 & 1.6494192e+00 & -2.4615843e-03 \\ 1.7223564e-04 & -1.0623733e-02 & -4.8526282e-03 & -2.4615843e-03 & 4.9927131e-01 \end{bmatrix}$$

$$Y^{(30)} = \begin{bmatrix} 5.6276701e-03 & -3.3203697e-01 & -1.5121685e-01 & -8.7081504e-02 & 1.0353647e-04 \\ -3.3203697e-01 & 2.0599731e+01 & 9.4047342e+00 & 4.6575894e+00 & -6.5030550e-03 \\ -1.5121685e-01 & 9.4047342e+00 & 4.2996266e+00 & 2.0965135e+00 & -2.9723399e-03 \\ -8.7081504e-02 & 4.6575894e+00 & 2.0965135e+00 & 1.8584421e+00 & -1.3917130e-03 \\ 1.0353647e-04 & -6.5030550e-03 & -2.9723399e-03 & -1.3917130e-03 & 4.9977260e-01 \end{bmatrix}$$

である。以上から得られた収束解 $X^{(30)}$, $Y^{(30)}$ は 10^{-8} オーダまで正確解である。したがって、本論文で提案されたリアプノフ型再帰的数値解法 (7) の有用性が示された。一方、連立型リカッチ代数方程式 (2) をリアプノフ型再帰的数値解法 (7) の場合と同じ収束条件でリカッチ型再帰的数値解法 (24) を利用して解くと 13 回で収束した。したがって、リカッチ型再帰的数値解法 (24) が収束すれば、収束回数の減少を考慮して、十分有用であることが示された。ただし、どのような場合でも収束する保証はないことに注意すべきである。

次に定理 2 の検証を行う。はじめに、注意しなければならないことは Freiling ら⁽²⁾ は $\gamma = 1.0$ として連立型リカッチ代数方程式 (2) の解を求めていることである。すなわち、本論文の定理 1 では、連立型リカッチ代数方程式 (2) が準正定対称解をもつ γ の範囲として $\bar{\gamma} < \gamma$ でなければならないのに対して、実際には $\gamma = 1.0$ でも連立型リカッチ代数方程式 (2) は準正定対称解をもつ場合があることを意味している。この理由は、定理 1 で得られた結果が保守的な十分条件であるためである。したがって、 $\gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma} = 1.2321$ を満たす γ に対して連立型リカッチ代数方程式 (2) が準正定対称解をもつ場合があることに注意する必要がある。一般的に γ^* を解析的に求めることは不可能であるが、通常の H_∞ 制御問題として考えた場合、Fig 1. の H_∞ 制御問題の解が存在するための下限値 $\underline{\gamma}$ を求めることは可能である。そこで、MATLAB を利用して $\underline{\gamma}$ を探索すれば $\underline{\gamma} = 0.8031$ と求まる。したがって $0.8031 = \underline{\gamma} \leq \gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma} = 1.2321$ の範囲で連立型リカッチ代数方程式 (2) の準正定対称解が存在する可

能性がある。実際に、 $\gamma = 1.0$ は $\underline{\gamma} \leq \gamma \leq \bar{\gamma}$ を満たす。以上の考察より、 H_2/H_∞ 制御を行う場合は、 $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ を求めている、設計パラメータ γ を決定する必要がある。

$\gamma = 1.0$ に対して $A + \gamma^{-2}UX^{(0)} - SY^{(0)}$ が安定行列になるような初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ を以下のように選択した。初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ を以下に示す。

$$X^{(0)} = O_{5 \times 5}$$

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

選択した初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ に対するリアプノフ型再帰的数値解法 (7) は、103 回で収束した。ここで、収束判定は定理 1 の検証のときと同様にした。収束解 $X^{(103)}$, $Y^{(103)}$ を Table 3 に示す。リアプノフ型再帰的数値解法 (7) の有用性を確認するため、準正定対称解 $X^{(103)}$, $Y^{(103)}$ を連立型リカッチ代数方程式 (2) に代入したときの残差を計算する。

$$\|F_1(X^{(103)}, Y^{(103)})\|_E = 9.893e-09$$

$$\|F_2(X^{(103)}, Y^{(103)})\|_E = 7.176e-09$$

以上より収束解 $X^{(103)}$, $Y^{(103)}$ は 10^{-8} オーダまで正確解であるから、リアプノフ型再帰的数値解法 (7) の有用性がいえる。さらに、Freiling ら⁽²⁾ が実際に解いている収束解 $P_1 (= -X^{(103)})$, $P_2 (= Y^{(103)})$ (Table 4 参照) と比較して、本論文で得られた収束解 $X^{(103)}$, $Y^{(103)}$ は、数値的にみても十分有効であることが分かる。

Table 3. Convergence values of $X^{(n)}, Y^{(n)}$ with $\gamma = 1.0$

$X^{(103)} =$	8.8234697e - 03	-5.5184747e - 01	-2.5210952e - 01	-1.1479619e - 01	2.2275649e - 04
	-5.5184747e - 01	3.5847656e + 01	1.6406442e + 01	6.4597048e + 00	-1.4495589e - 02
	-2.5210952e - 01	1.6406442e + 01	7.5148126e + 00	2.9213162e + 00	-6.6373265e - 03
	-1.1479619e - 01	6.4597048e + 00	2.9213162e + 00	2.1827348e + 00	-2.5871172e - 03
	2.2275649e - 04	-1.4495589e - 02	-6.6373265e - 03	-2.5871172e - 03	4.9955689e - 01
$Y^{(103)} =$	1.2487134e - 02	-7.9200537e - 01	-3.6209333e - 01	-1.5615524e - 01	-7.1163089e - 05
	-7.9200537e - 01	5.1624895e + 01	2.3632668e + 01	9.1432373e - 00	4.5672033e - 03
	-3.6209333e - 01	2.3632668e + 01	1.0824559e + 01	4.1496302e - 00	2.0903758e - 03
	-1.5615524e - 01	9.1432373e + 00	4.1496302e + 00	2.6717847e - 00	8.7162555e - 04
	-7.1163089e - 05	4.5672033e - 03	2.0903758e - 03	8.7162555e - 04	5.0033541e - 01

Table 4. Reference values of P_1, P_2 with $\gamma = 1.0$

$P_1 =$	-8.8238e - 03	5.5187e - 01	2.5212e - 01	1.1480e - 01	-2.2276e - 04
	5.5187e - 01	-3.5849e + 01	-1.6407e + 01	-6.4599e - 00	1.4496e - 02
	2.5212e - 01	-1.6407e + 01	-7.5152e - 00	-2.9214e - 00	6.6376e - 03
	1.1480e - 01	-6.4599e - 00	2.9214e - 00	-2.1828e - 00	2.5872e - 03
	-2.2276e - 04	1.4496e - 02	6.6376e - 03	2.5872e - 03	-4.9956e - 01
$P_2 =$	1.2488e - 02	-7.9204e - 01	-3.6211e - 01	-1.5616e - 01	-7.1170e - 05
	-7.9204e - 01	5.1627e + 01	2.3634e + 01	9.1436e - 00	4.5677e - 03
	-3.6211e - 01	2.3634e + 01	1.0825e + 01	4.1498e - 00	2.0906e - 03
	-1.5616e - 01	9.1436e - 00	4.1498e - 00	2.6718e - 00	8.7170e - 04
	-7.1170e - 05	4.5677e - 03	2.0906e - 03	8.7170e - 04	5.0034e - 01

6. ま と め

本論文では、混合 H_2/H_∞ 制御問題に対して、設計パラメータ γ を含む連立型リカッチ代数方程式 (2) をリアプノフ型再帰的数値解法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を利用して解くことを提案した。したがって、本論文の定理 1 の初期条件 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ を求めるためのリカッチ方程式 (8) 以外にリカッチ方程式を解く必要はない。つまり、非線形方程式であるリカッチ方程式を解く代わりに線形方程式であるリアプノフ方程式を繰り返して解くだけで混合 H_2/H_∞ 制御問題の均衡解 (連立型リカッチ方程式の解) を得ることができる。収束性の証明には Li ら⁽⁴⁾ または Gajic ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾ と同様に、ダイナミックプログラミングの逐次近似の手法を利用した。さらに、本論文では、 γ を含む連立型リカッチ方程式が正定対称な安定化解を持つための下極限 γ^* に対して、 $(0 <) \gamma^* < \bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ で連立型リカッチ方程式 (2) が準正定対称解を持つための下限値 $\bar{\gamma}$ を与えた。その結果、十分条件であるが、Freiling ら⁽²⁾ と異なって、 $\bar{\gamma} < \gamma$ を満たす全ての γ で連立型リカッチ代数方程式 (2) は準正定対称解を持つことが示された。一方、初期値 $X^{(0)}, Y^{(0)}$ の選択の仕方によって、提案されたリアプノフ型再帰的数値解法 (7) は $\gamma^* < \gamma \leq \bar{\gamma}$ を満たす γ に対しても収束することが定理 2 によって示された。最後に、導出されたアルゴリズムの有用性を検証するために簡単なシミュレーションを行った。この数値例によって、 γ を含む連立型リカッチ方程式 (2) に対して、提案されたリアプノフ型再帰的数値解法が高精度の収束解を生成することを確認した。また、新たに提案されたリカッチ型再帰的数値解法が、リアプノフ型再帰的数値解法より少ない

収束回数で均衡解を得ることを数値的に検証した。

最後に、本論文に対して、有益なコメントを頂きました査読者の皆様に謝意を表します。さらには、MATLAB の使用を快諾していただいた広島大学名誉教授水上孝一先生 (現広島国際学院大学教授)、数値計算を手伝ってくれた広島市立大学高田哲爾君に謝意を表します。

(平成 11 年 5 月 24 日受付, 平成 11 年 11 月 30 日再受付)

文 献

- (1) D.J.N.Limebeer, B.D.O.Anderson and B.Hendel: "A Nash Game Approach to Mixed H_2/H_∞ Control", IEEE Trans. A.C., Vol.39, No.1, 69/82 (1994)
- (2) G.Freiling, G.Jank and H.Abou-Kandil: "On Global Existence of Solutions to Coupled Matrix Riccati Equations in Closed-Loop Nash Games", IEEE Trans. A.C., Vol.41, No.2, 264/269 (1996)
- (3) H.Abou-Kandil, G.Freiling and G.Jank: "Necessary Conditions for constant Solutions of Coupled Riccati Equations in Nash Games", System & Control letters, Vol.21, 295/306 (1993)
- (4) T.Li and Z.Gajic: "Lyapunov Iterations for Solving Coupled Algebraic Lyapunov Equations of Nash Differential Games and Algebraic Riccati Equations of Zero-Sum Games", Proc. 6th Int. Symp. on Dynamic Games and Application, St-Jovite, Canada, 489/494 (1994)
- (5) Z.Gajic and M.T.J.Qureshi: "Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control", Mathematics in Science and Engineering, Vol.195, Academic Press (1995)
- (6) Z.Gajic and X.Shen: "Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems", Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag (1993)
- (7) Z.Aganovic and Z.Gajic: "Successive Approximation Procedure for Steady-State Optimal Control of Bilinear Systems", Journal of Optimization Theory and Application, Vol.84, No.2, 273 / 291 (1995)

- (8) D.P.Bertsekas: "Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models", Prentice-Hall (1987)
- (9) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar and B.A.Francis: "State Space Solution to Standard H_2 , and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. A.C., Vol.34, No.8, 831 / 847 (1989)
- (10) A.W.Starr and Y.C.Ho: "Nonzero-sum differential games", Journal of Optimization Theory and Application, Vol.3, No.3, 184 / 206 (1969)
- (11) 清水, 田村, 英: " H^∞ 制御のためのリカッチ不等式の時間領域における導出", 計測自動制御学会, Vol.28, No.9, 1094/1102 (1992)
- (12) 西村, 狩野: 制御のためのマトリクス・リカッチ方程式, システム制御情報学会編, 朝倉書店 (1996)

付 録

連立型リカッチ方程式 (2) の導出

この付録では, ダイナミックプログラミングの逐次近似^{(4) (7) (8)} を利用しないで均衡解を求める手法を説明する.

システム (A.1a), (A.2a) 及び関数 (A.1b), (A.2b) を定義する. ここで, w^*, u^* は $w^*(t) = \gamma^{-2} B_1^T X x(t)$, $u^*(t) = -B_2^T Y x(t)$ である.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u^*(t) \quad \cdots \cdots \cdots (A.1a)$$

$$\begin{aligned} & V_1(w, u^*, x, t) \\ &= \int_t^\infty [\gamma^2 w(\tau)^T w(\tau) - \{x(\tau)^T Q x(\tau) \\ &\quad + u^{*T}(\tau) u^*(\tau)\}] d\tau \quad \cdots \cdots \cdots (A.1b) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w^*(t) + B_2 u(t) \quad \cdots \cdots \cdots (A.2a)$$

$$\begin{aligned} & V_2(w^*, u, x, t) \\ &= \int_t^\infty [x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T u(\tau)] d\tau \quad \cdots \cdots \cdots (A.2b) \end{aligned}$$

続いてハミルトン関数 (A.3) を定義する.

$$\begin{aligned} & H_1(t, x, w, u^*, p_1^*) \\ &= \gamma^2 w^T w - x^T Q x - u^{*T} u^* \\ &\quad + p_1^{*T} (Ax + B_1 w + B_2 u^*) \quad \cdots \cdots \cdots (A.3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_2(t, x, w^*, u, p_2^*) \\ &= x^T Q x + u^T u + p_2^{*T} (Ax + B_1 w^* + B_2 u) \quad (A.3b) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} V_i^*(x, t) = p_i^*(t) \\ & \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w^*(t) + B_2 u^*(t) \\ & V_i(w^*, u^*, x, t) = V_i^*(x, t), (i = 1, 2) \end{aligned}$$

以上の条件のもと, 関数 (A.1b), (A.2b) を最小にする $\bar{w}(t)$, $\bar{u}(t)$ を求める. 最小原理より, 関数 (A.1b), (A.2b) を最小にすることは, ハミルトン関数 (A.3) を最小にすることに等価である. したがって, ハミルトン関数 (A.3) を最小にする問題を考える. ハミルトン関数 (A.3a) を最小にする外乱 $\bar{w}(t)$ とハミルトン関数 (A.3b) を最小にする制御則 $\bar{u}(t)$ は, 関数 (A.1b), (A.2b) が無限時間であるこ

とに注意して, 必要条件の一つであるハミルトン・ヤコビ方程式

$$0 = -\min_w H_1(t, x, w, u^*, p_1^*) \quad \cdots \cdots \cdots (A.4a)$$

$$0 = -\min_u H_2(t, x, w^*, u, p_2^*) \quad \cdots \cdots \cdots (A.4b)$$

を利用して求めることが可能である. ハミルトン関数 H_1, H_2 に対して, それぞれ w, u について偏微分の計算を実行すれば, 均衡解が (A.5) のように得られる.

$$\bar{w} = -\frac{1}{2} \gamma^{-2} B_1^T p_1^*(t) \quad \cdots \cdots \cdots (A.5a)$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{2} B_2^T p_2^*(t) \quad \cdots \cdots \cdots (A.5b)$$

通常は, $w = \bar{w} = w^*, u = \bar{u} = u^*$ として (A.5) を (A.4) に代入して p_i^* に関する偏微分方程式を解くことによって均衡解 (A.5) を求める. 実際に, $V_1^*(x, t) = -x(t)^T X x(t)$, $V_2^*(x, t) = x(t)^T Y x(t)$ を仮定して計算を行えば簡単ではあるが連立型リカッチ代数方程式 (2) を得る. したがって, 連立型リカッチ方程式 (2) を解けば均衡解 (A.5) を求めることが可能である.

向 谷 博 明 (正員) 1994 年 4 月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了. 97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了. 博士 (工学). 98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手. 現在に至る. 主として, ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事. 電気学会および機械学会会員.

小 林 康 秀 (正員) 1979 年 3 月九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程前期修了. 同年 4 月山口大学工学部助手. 1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部助教授となり現在に至る. 工学博士. 主として, システム同定の研究に従事. 電子情報通信学会および電気学会会員.

沖 田 豪 (正員) 1964 年 3 月東北大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年 4 月広島大学工学部助手. 同講師, 助教授を経て, 1978 年 4 月山口大学工学部教授. 1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部教授となり現在に至る. 工学博士. 主として, システム同定の研究に従事. 電気学会およびシステム制御情報学会会員.