非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム

The Recursive Algorithm for Optimal Regulator of Nonstandard Singularly Perturbed Systems .

[英文要旨]

This paper considers the linear-quadratic optimal regulator problem for nonstandard singularly perturbed systems making use of the recursive technique. We first derive a generalized Riccati differential equation by the Hamilton-Jacobi equation. In order to obtain the feedback gain , we must solve the generalized algebraic Riccati equation. Using the recursive technique, we show that the solution of the generalized algebraic Riccati equation converges with the rate of convergence of $O(\varepsilon)$. The existence of a bounded solution of error term can be proved by the implicit function theorem. It is enough to show that the corresponding Jacobian matrix is nonsingular at $\varepsilon = 0$.

As a result, the solution of optimal regulator problem for nonstandard singularly perturbed systems can be obtained with an accuracy of $O(\varepsilon^k)$. The proposed technique represents a significant improvement since the existing method for the standard singularly perturbed systems can not be applied to the nonstandard singularly perturbed systems.

To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical examples are included.

Key Words： nonstandard singularly perturbed systems, linear-quadratic optimal regulator problem, generalized algebraic Riccati equation, recursive algorithm, implicit function theorem

非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム

The Recursive Algorithm for Optimal Regulator of Nonstandard Singularly Perturbed Systems .

[邦文要旨]

摂動項 (ε) が $\varepsilon\dot{x} = f(x,t)$ の形をとるシステムを特異摂動システムという. このようなシステムを扱う場合, 摂動項の影響により, 係数行列の高次元化, 並びに各パラメータ間のオーダの違いがおこる. このため, 最適レギュレータを用いてシステムの制御を行うとき, 計算機の物理的容量からリカッチ方程式の解を得ることは困難である. 特異摂動システムにおけるレギュレータ問題のリカッチ方程式の解を求める方法の 1 つに再帰的アルゴリズムがあげられる. Z.Gajic らは, 係数行列である A_{22} が非特異である標準特異摂動システムを扱っている. そこで, 本論文では A_{22} が特異である非標準特異摂動において, Z.Gajic らと異なった方法で再帰的アルゴリズムを導出する. すなわち, Hamilton-Jacobi equation を利用して最適フィードバックゲインを求める. このとき, あらわれるリカッチ方程式は一般化リカッチ方程式と呼ばれ, この一般化リカッチ方程式において再帰的アルゴリズムを導出し, 収束解の存在を証明する. また, アルゴリズムの有効性を確認するため, 数値例に適用し解を求める.

1. はじめに

システムを記述する微分方程式に含まれる無視できない正の微小パラメータを摂動項と呼ぶ．また, この摂動項 (ε) が $\varepsilon\dot{x} = f(x,t)$ の形をとるシステムを特異摂動システムという [1)]．このようなシステムを扱う場合, 摂動項の影響により, 係数行列の高次元化, ならびに各パラメータ間のオーダの違いがおこる．このため, 最適レギュレータを用いてシステムの制御を行うとき, 計算機の物理的容量からリカッチ方程式の解を得ることは困難である．

特異摂動システムにおけるレギュレータ問題のリカッチ方程式の解を求める方法の 1 つに再帰的アルゴリズムがあげられる [2)]． Z.Gajic らは, まず, 最適解を求めるためのリカッチ方程式において, ε を無視した 0 オーダ解を求めている．つぎに, この解に偏差を付加し, この偏差における差分方程式を導入してリカッチ方程式の真の最適解を再帰的に求めている．しかし, 標準的な特異摂動システムでは, 係数行列である A_{22} が非特異であることを仮定しなければならない．

近年, Yue-Yun Wang[4)] らはディスクリプタシステムにおける手法を用いて, 特異摂動システムのレギュレータ問題の最適フィードバックゲインを求めている．また, Hassan K.Khalil[5)] は, A_{22} が特異である非標準特異摂動システムにおいて, 特異摂動法を用いてシステムを安定化するための補償器を構築している．しかし, ここでは, レギュレータ問題は扱われていない．

従来, A_{22} が特異である非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題について, Z.Gajic らと同様に, 再帰的アルゴリズムを利用してリカッチ方程式の解を得ることはできなかった． これは, A_{22}^{-1} が存在しないため, リカッチ方程式の変換ができないからである．そこで, 本論文では, A_{22}^{-1} が存在しない非標準特異摂動において, 従来とは異なった方法で再帰的アルゴリズムを導出する．

まず, A_{22}^{-1} が存在しない場合, 通常の最適レギュレータ理論でみられたような方法 [1)] で, 最適フィードバックゲインを求めず, ディスクリプタシステムにおける Hamilton-Jacobi equation を利用して最適フィードバックゲインを求める [6)]．このとき, あらわれるリカッチ方程式は一般化リカッチ方程式と呼ばれ, $A^TP + P^TA - P^TBR^{-1}B^TP + Q = 0, D^TP = P^TD$ の形をもつ．この一般化リカッチ方程式において再帰的アルゴリズムを導出し, 収束解の存在を証明することが本論文の目的である．

本論文は以下のように構成されている． 第 2 章では, 非標準特異摂動システムを記述し, 問題の定式化を行う．

また, レギュレータ問題の解を Hamilton-Jacobi equation を用いて導出する. 第 3 章では, 一般化リカッチ方程式における再帰的アルゴリズムを導出する. 第 4 章では与えられた再帰的アルゴリズムに対し, 収束性の証明を与える. このとき, 一般化リカッチ方程式が収束解をもつことを示すとともに, 第 5 章では本論文で提案されたアルゴリズムの有効性を確認するため, 数値例に適用し解を求める. 第 6 章では, 本論文で取り上げられた結果に対する考察を行う.

2. 一般化リカッチ方程式の導出

2.1 非標準特異摂動システム

以下の線形時不変特異摂動システムにおける LQ 問題を考える.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \quad x_1(t_0) = x_1^0 \tag{1a}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \quad x_2(t_0) = x_2^0 \tag{1b}$$

の拘束条件のもとで, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とおくとき, 評価関数

$$\min_u\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(x^TQx + u^TRu)dt\} \tag{2}$$

を最小にする最適制御入力を決定する.

ここで, $u \in \mathbf{R}^m$ は制御入力, $x_i \in \mathbf{R}^{n_i}(i = 1, 2)$ は状態ベクトルをあらわす. ε は十分小さな正のパラメータである. 又, 各係数行列は適当な次元をもつ. ここで, システム (1a)~(1b) において, A_{22} が特異である, つまり, A_{22}^{-1} が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ.

2.2 Hamilton-Jacobi equation

いま, 各係数行列を以下のようにおく.

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

このとき, 与えられたシステムは

$$D\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) = x^0 \tag{3}$$

となる. まず, 全次元最適制御入力を求める. 従来の方法と異なって, ディスクリプタシステムにおけるハミルトン - ヤコビ方程式を用いて全次元レギュレータ問題を解く [6),7)]. $V^*(Dx(t), t) = (1/2)x^T(t)D^T P(t)x(t)$ とおくとき, $P(t)$ は $D^T P(t) = P^T(t)D$ を満たす時変マトリクスである. また,

$$L(x(t), u(t), t) = (1/2)(x^T Qx + u^T Ru) \tag{4a}$$

$$f(x(t), u(t), t) = Ax + Bu \tag{4b}$$

$$W^*(x(t), t) = x^T P^T(t) \tag{4c}$$

を定義する. ここで $D^T P = P^T D$ である. このとき, ハミルトン - ヤコビ方程式 (Hamilton-Jacobi equation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial t} &= -\min_{u(t)}\{L(x(t), u(t), t) \\ &\qquad +W^* f(x(t), u(t), t)\} \end{aligned} \tag{5}$$

に代入すれば,

$$\begin{aligned} x^T D^T \dot{P} x &= -\min_{u(t)}\{x^T Qx + u^T Ru \\ &\qquad +2x^T P^T(Ax + Bu)\} \end{aligned} \tag{6}$$

となる. ここで, $D^T P = P^T D$ が成立するので, 実際に V^* の微分を行えば, $(\partial V^*/\partial t) = (1/2)x^T D^T \dot{P} x$ となる. 右辺の最小値を与える $u^*(t)$ を求めれば,

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \tag{7}$$

となる. この最適制御入力 (7) を (6) に代入する.

$$2x^T P^T Ax = x^T(P^T A + A^T P)x \tag{8}$$

に注意して,

$$\begin{aligned} x^T D^T \dot{P} x &= -x^T[Q + A^T P + P^T A \\ &\qquad -P^T BR^{-1}B^T P]x \end{aligned} \tag{9}$$

が, すべての $x(t)$ について成立する. よってつぎの一般化リカッチ微分方程式 (Generalized Riccati differential equation) が得られる.

$$D^T \dot{P} = -Q - A^T P - P^T A + P^T BR^{-1}B^T P \tag{10a}$$

$$D^T P = P^T D \tag{10b}$$

ここで $t_f \to \infty$ であるから $\dot{P}(t) \equiv 0$ をみたすので，最終的につぎの一般化リカッチ代数方程式 (Generalized Riccati algebraic equation) が得られる．

$$A^T P + P^T A - P^T B R^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{11a}$$

$$D^T P = P^T D \tag{11b}$$

以後，特にことわらない限り，一般化リカッチ代数方程式を簡単に一般化リカッチ方程式と呼ぶことにする．

3. 再帰的アルゴリズム

本章では，一般化リカッチ方程式における再帰的アルゴリズムを導出する． リカッチ方程式 (11a)~(11b) を各ブロックごとに計算する．ただし，

$$\begin{aligned}
&D^T P = P^T D \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} P_{11}^T & P_{21}^T \\ P_{12}^T & P_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad (12) \\
&P_{11} = P_{11}^T, P_{22} = P_{22}^T
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
S_{11} &= B_1 R^{-1} B_1^T \\
S_{12} &= B_1 R^{-1} B_2^T \\
S_{22} &= B_2 R^{-1} B_2^T
\end{aligned}$$

とおく．

$$\begin{aligned}
&A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\
&\quad - P_{11}^T S_{11} P_{11} - P_{21}^T S_{22} P_{21} \\
&\quad - P_{11}^T S_{12} P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0
\end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\
&\quad - \varepsilon P_{21} S_{11} P_{11} - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{21} \\
&\quad - P_{22}^T S_{12}^T P_{11} - P_{22}^T S_{22} P_{21} + Q_{12}^T = 0
\end{aligned} \tag{13b}$$

$$
\begin{aligned}
&A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T \\
&\quad + \varepsilon P_{21} A_{12} - P_{22}^T S_{22} P_{22} \\
&\quad - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T - \varepsilon P_{21} S_{12} P_{22} \\
&\quad - \varepsilon^2 P_{21} S_{11} P_{21}^T + Q_{22} = 0
\end{aligned} \tag{13c}
$$

ここで, $\varepsilon \equiv 0$ とおくとそれぞれ下記式 (14a)~(14c) になる.

$$
\begin{aligned}
&A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\
&\quad - P_{11}^T S_{11} P_{11} - P_{21}^T S_{22} P_{21} \\
&\quad - P_{11}^T S_{12} P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0
\end{aligned} \tag{14a}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\
&\quad - P_{22}^T S_{12}^T P_{11} - P_{22}^T S_{22} P_{21} + Q_{12}^T = 0
\end{aligned} \tag{14b}
$$

$$
A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} - P_{22}^T S_{22} P_{22} + Q_{22} = 0 \tag{14c}
$$

後で述べる仮定 1 のもとで方程式 (14c) が解をもてば $A_{22} - S_{22}P_{22}$ が, 非特異であることから $(A_{22} - S_{22}P_{22})^{-1}$ は存在する. したがってつぎの 0 オーダ方程式が得られる. ここで, 0 オーダ方程式の解を $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ とおく.

[0-order Equation]

$$
\bar{P}_{11}^T A_0 + A_0^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_0 \bar{P}_{11} + Q_0 = 0 \tag{15a}
$$

$$
\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \tag{15b}
$$

$$
A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22} \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{15c}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
S_0 &= S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12} N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T \\
Q_0 &= Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22} N_2^T \\
N_2^T &= D_4^{-T} \hat{Q}_{12}^T, \ N_1^T = -D_4^{-T} D_2^T \\
D_2 &= A_{12} - S_{12} \bar{P}_{22}, \ D_4 = A_{22} - S_{22} \bar{P}_{22} \\
\hat{Q}_{12} &= Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22}
\end{aligned}
$$

ここで, 以下の仮定を導入する.

[仮定 1]　行列対 (A_{22}, B_2) 及び行列対 (A_{22}, C_2) は, それぞれ可安定であり, 及び可検出である. また, 行列対 $(A_0, \sqrt{S_0})$ 及び行列対 $(A_0, \sqrt{Q_0})$ は, それぞれ可安定であり, 及び可検出である.

(注意)　行列 A_0, S_0, Q_0 を記述する公式の中には，リカッチ方程式 (15c) の解 $\bar{P}_{22}$ が含まれているが，以下の補題により，実際には依存しない．

[補題 1]　行列

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11} \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix} \\
T_2 &= \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12} \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix} \\
T_3 &= \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix} \\
T_4 &= \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22} \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

に対し，

$$
T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_0 & -S_0 \\ -Q_0 & -A_0^T \end{bmatrix} \tag{16}
$$

が成立する．

(補題の証明)　まず，T_4 について，

$$
\begin{aligned}
T_4 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{22}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 & -S_{22} \\ 0 & -D_4^T \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{22} & I \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

が成立する．さらに，

$$
\begin{aligned}
T_4^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4^{-1} & -D_4^{-1} S_{22} D_4^{-T} \\ 0 & -D_4^{-T} \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{22}^T & I \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と計算される．したがって，実際に $T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3$ に代入して計算すれば関係式 (16) が導出される．□

つぎに偏差を定義する．

$$
P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} \tag{17a}
$$

$$
P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \tag{17b}
$$

$$
P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \tag{17c}
$$

以上を方程式 (13a)〜(13c) に代入する.

0 オーダ方程式 (15a)〜(15c) を用いて, 偏差 E についての方程式 (18a)〜(18c) が得られる.

$$\begin{aligned} E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V \\ - V^T H_3 V - \varepsilon H_2 = 0 \end{aligned} \tag{18a}$$

$$E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_1 = 0 \tag{18b}$$

$$E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_3 = 0 \tag{18c}$$

ただし

$$\begin{aligned} H_1 &= -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11} P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^T P_{21}^T \\ &\quad +\varepsilon(E_{11}^T S_{12} E_{22} + E_{21}^T S_{22} E_{22}) \\ H_2 &= E_{11}^T S_{11} E_{11} + E_{21}^T S_{22} E_{21} \\ &\quad +E_{11}^T S_{12} E_{21} + E_{21}^T S_{12}^T E_{11} \\ H_3 &= -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11} P_{21}^T \\ &\quad +\varepsilon E_{22}^T S_{22} E_{22} + P_{21} S_{12} P_{22} \\ &\quad +P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T \\ D_0 &= D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3,\ V = D_4^{-1} D_3 \\ D_1 &= A_{11} - S_{11} \bar{P}_{11} - S_{12} \bar{P}_{21} \\ D_3 &= A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11} - S_{22} \bar{P}_{21} \end{aligned}$$

したがって偏差についての以下の再帰的アルゴリズム (19a)〜(19c) が導出される.

$$\begin{aligned} E_{11}^{(j+1)T} D_0 + D_0^T E_{11}^{(j+1)} = \\ - V^T H_1^{(j)T} - H_1^{(j)} V + V^T H_3^{(j)} V + \varepsilon H_2^{(j)} \end{aligned} \tag{19a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} D_2 + E_{21}^{(j+1)T} D_4 + D_3^T E_{22}^{(j+1)} = H_1^{(j)} \tag{19b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} D_4 + D_4^T E_{22}^{(j+1)} = H_3^{(j)} \tag{19c}$$

ただし

$$\begin{aligned} H_1^{(j)} &= -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11} P_{21}^{(j)T} \\ &\quad +P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} \\ &\quad +\varepsilon(E_{11}^{(j)T} S_{12} E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{22}^{(j)}) \\ H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11} E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22} E_{21}^{(j)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \quad +E_{11}^{(j)T}S_{12}E_{21}^{(j)}+E_{21}^{(j)T}S_{12}^{T}E_{11}^{(j)} \\
H_3^{(j)} &= -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)}A_{12} \\
& \quad +\varepsilon P_{21}^{(j)}S_{11}P_{21}^{(j)T}+\varepsilon E_{22}^{(j)T}S_{22}E_{22}^{(j)} \\
& \quad +P_{21}^{(j)}S_{12}P_{22}^{(j)}+P_{22}^{(j)T}S_{12}^{T}P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11}+\varepsilon E_{11}^{(j)},\ P_{21}^{(j)} \ = \ \bar{P}_{21}+\varepsilon E_{21}^{(j)} \\
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22}+\varepsilon E_{22}^{(j)},\ E_{11}^{(0)}=E_{21}^{(0)}=E_{22}^{(0)}=0
\end{aligned}
$$

ここで, ${}^{(j)}$ は j 番目の値, ${}^{(j+1)}$ は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j 番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

つぎに, 簡単にアルゴリズムの説明を与える.

1. 0 オーダ方程式である (15a)~(15c) から, 0 オーダ解 $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ を求める.
2. 偏差 $E_{11}^{(i)}, E_{21}^{(i)}, E_{22}^{(i)}$ から差分方程式 (19a)~(19c) を用いて, 偏差 $E_{11}^{(i+1)}, E_{21}^{(i+1)}, E_{22}^{(i+1)}$ を求める.
3. 誤差

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= ||E_{11}^{(i+1)}-E_{11}^{(i)}||_2 \\
\alpha_2 &= ||E_{21}^{(i+1)}-E_{21}^{(i)}||_2 \\
\alpha_3 &= ||E_{22}^{(i+1)}-E_{22}^{(i)}||_2
\end{aligned}
$$

を計算する. ただし, マトリクスノルム $||\cdot||_2$ は, 任意の行列 X について $||X||_2 \equiv [\lambda_{\max}(X^TX)]^{1/2}$ をあらわす. 以下も同様に定義される.

4. $\alpha_l < \delta, (l=1,2,3)$ を満足するまで 2~4 を繰り返す. ここで, δ は十分小さな正の定数である.
5. 一般化リカッチ方程式 (11a)~(11b) の解

$$
P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}
$$

を求める.

4. 再帰的アルゴリズムの収束

まず, 定理をあげる.

<< 定理 1>>[仮定 1] における条件のもとで, アルゴリズム (19a)~(19c) は, 偏差 E の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$
||E-E^{(k)}||_2 = O(\varepsilon^k), \quad (k=1,2,\cdots) \tag{20}
$$

または

$$||E-E^{(k+1)}||_2 = O(\varepsilon)||E-E^{(k)}||_2$$
$$(k=1,2,\cdots) \qquad (21)$$

ただし

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{bmatrix}, E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

再帰的アルゴリズム (19a)∼(19c) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における収束解 E の存在は陰関数定理により証明できる．理解を助けるために, 陰関数定理について説明を与える．

[陰関数定理][10)]　ある領域 $D \subset R^m$ において連続微分可能な関数

$$f_\mu = f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_m), \mu = 1,2,\cdots,m \qquad (22)$$

が与えられたとして

$$J(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)} \qquad (23)$$

とおく．

点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0) \in D$ において $J(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0) \neq 0$ として $u_\mu^0 = f_\mu^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ とおけば, 十分小さな $\bar{\varepsilon} > 0$ に対して $|f_\mu - f_\mu^0| < \bar{\varepsilon}, \mu = 1,2,\cdots,m$ なる条件の下で連立方程式

$$f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_m) = u_\mu^0, \mu = 1,2,\cdots,m \qquad (24)$$

はただ 1 組の解 $x_\mu, \mu = 1,2,\cdots,m$ をもつ．

(定理の証明)　収束解の存在は, $\varepsilon = 0$ におけるヤコビ行列が非特異であることを示せばよい．陰関数定理を用いるために, アルゴリズム (19a)∼(19c) に対するヤコビ行列を以下のように計算する．

[ヤコビ行列]

$$J|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

ただし

$$\begin{aligned} J_{11} &= I \otimes D_0 + I \otimes D_0^T \\ J_{22} &= I \otimes D_4 \\ J_{33} &= I \otimes D_4 + I \otimes D_4^T \\ J_{k1} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{k2} = \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{k3} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (k=1,2,3) \\
L_1 &= E_{11}^T D_0 + D_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V \\
&\quad -V^T H_3 V - \varepsilon H_2 \\
L_2 &= E_{11}^T D_2 + E_{21}^T D_4 + D_3^T E_{22} - H_1 \\
L_3 &= E_{22}^T D_4 + D_4^T E_{22} - H_3
\end{aligned}
$$

$\otimes$ はクロネッカ積である．ここで, $D_4 = A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}$ はリカッチ方程式 (15c) が, 仮定 1 から安定化解をもつので安定である．

同様に, $A_0 - S_0\bar{P}_{11}$ は, リカッチ方程式 (15a) が, 仮定 1 から安定化解をもつので安定である．したがって,

$$
\begin{aligned}
&A_0 - S_0\bar{P}_{11} \\
&= A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12}N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
&\quad -(S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12}N_1^T + N_1 S_{22} N_1^T)\bar{P}_{11} \\
&= A_{11} + N_1 A_{21} - S_{11}\bar{P}_{11} - N_1 S_{12}^T \bar{P}_{11} \\
&\quad +S_{12}N_2^T + N_1 S_{22} N_2^T \\
&\quad -S_{12}N_1^T \bar{P}_{11} - N_1 S_{22} N_1^T \bar{P}_{11} \\
&= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} + N_1(A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11}) \\
&\quad -S_{12}(-N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11}) \\
&\quad -N_1 S_{22}(-N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11}) \\
&= A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11} - S_{12}\bar{P}_{21} \\
&\quad +N_1(A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11} - S_{22}\bar{P}_{21}) \\
&= D_1 - D_2 D_4^{-1} D_3 = D_0
\end{aligned}
$$

となるので, D_0 は安定となる．以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズムの収束性が証明される。□

5．数値例

簡単な 2 つの数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し, 解を求める．

[数値例　5.1]　システムはつぎのように記述される [3)]．

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{26}
$$

の拘束条件のもとで, 評価関数

$$
J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt \tag{27}
$$

を最小にする最適制御入力を決定する.

方程式 (26) において, (2,2) 成分すなわち小行列 A_{22} は 0 なので非標準特異摂動システムである.

本論文で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば, つぎの一般化リカッチ方程式の解を得ることができる.

$\varepsilon = 0.01$ における計算結果は以下のとおりである.

したがって, P はつぎの値になる.

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} 1.44795 & 2.41421 \times 10^{-2} \\ 2.41421 & 1.02386 \end{bmatrix} \tag{28}$$

このとき, 最適制御入力は,

$$u_{pro}^{*} = -\begin{bmatrix} 2.41421 & 1.02386 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

と求められる. ただし, $\delta = 10^{-8}$ とした.

ここで, Yue-yun Wang[3] らによって求められたこのシステムにおける最適制御入力は, 次式で与えられる.

$$u_{exa}^{*} = -\begin{bmatrix} 2.4142 & 1.0239 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

また, 初期値

$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

に対する評価関数 J の値は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} J_0 &= 1.44834 \\ J_{pro} &= 1.44794 \\ J_{exa} &= 1.44794 \end{aligned}$$

ここで, J_0 は 0 オーダ解の評価関数の値. J_{pro} は提案型の方法を利用して得られた解 P_{pro} の評価関数の値. J_{exa} は Yue-yun Wang[3] らによって求められた評価関数の値を意味する.

以上, 本論文で提案されたアルゴリズムは, 再帰的に求めているために, 収束までの計算が 7 回となったが, この計算の複雑さを除けば, 数値的に比較して, 有効であることがわかる.

[数値例　5.2]　J.H.Chow らが扱っている数値例[9] に対し, 以下の修正したシステムを考える. すなわち, 行列 A_{22} の $(1,1)$ 成分を 0 に修正し, A_{22} が特異になるように選ぶ.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{31a}$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u \tag{31b}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の拘束条件のもとで, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とおくとき, 評価関数

$$\min_u \{\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)dt\} \tag{32}$$
$$Q = \mathrm{diag}\{1, 0, 1, 0\}, \quad R = 1$$

を最小にする最適制御入力を決定する. まず, $\varepsilon = 0$ における 0 オーダ解を求める.

$$\bar{P}_{11} = \begin{bmatrix} 6.28430 & 2.89855 \\ 2.89855 & 7.28616 \end{bmatrix}$$
$$\bar{P}_{21} = \begin{bmatrix} 4.71185 & 2.21075 \\ 1.0 & 4.47252 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$
$$\bar{P}_{22} = \begin{bmatrix} 4.71184 & 1.0 \\ 1.0 & 2.34504 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

つぎに, $\varepsilon = 0.1$ に対する一般化リカッチ方程式の解は, 8 回の繰返し計算によって, つぎのように得られる.

$$P_{pro} = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6.45275 & 3.12766 & 0.47755 & 0.1 \\ 3.12766 & 7.50339 & 0.23816 & 0.00788 \\ 4.77545 & 2.38163 & 5.14253 & 1.07904 \\ 1.0 & 0.07878 & 1.07904 & 0.25116 \end{bmatrix}$$

このとき, 最適制御入力は,

$$u_{pro}^* = -\begin{bmatrix} 1.0 \\ 7.87788 \times 10^{-2} \\ 1.07904 \\ 2.51167 \times 10^{-1} \end{bmatrix}^T x$$

と求められる. ただし, $\delta = 10^{-8}$ とした.

ここで, 本論文で提案されたアルゴリズムの有効性を比較するために, 通常のレギュレータ理論で扱われているリカッチ方程式の手法を用いて, リカッチ方程式を分割計算しないで直接解いた解と, 最適制御入力は次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
&P_{exa} \\
&= \begin{bmatrix} 6.45261 & 3.12756 & 0.47752 & 0.1 \\ 3.12756 & 7.50334 & 0.23814 & 0.00787 \\ 0.47753 & 0.23815 & 0.51425 & 0.10790 \\ 0.1 & 0.00786 & 0.10790 & 0.02511 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
u_{exa}^{*} = -\begin{bmatrix} 9.99971 \times 10^{-1} \\ 7.87612 \times 10^{-2} \\ 1.07904 \\ 2.51165 \times 10^{-1} \end{bmatrix}^{T} x
$$

最後に, 初期値

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_1^T(0) & x_2^T(0) \end{bmatrix}^T \\
&\quad = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

に対する評価関数 J の値は以下のとおりである.

$$
\begin{aligned}
J_0 &= 20.25387 \\
J_{pro} &= 20.21159 \\
J_{exa} &= 20.21107
\end{aligned}
$$

ここで, J_0 は 0 オーダ解の評価関数の値. J_{pro} は提案型の方法を利用して得られた解 P_{pro} の評価関数の値. J_{exa} は直接リカッチ方程式を解いて得られた解 P_{exa} の評価関数の値を意味する.

この 2 つの結果を比較する. まず, 本論文で提案されたアルゴリズムで得られた解 P_{pro} の P_{21}, P_{22} に ε をかければ, リカッチ方程式を直接解いて得られた解 P_{exa} に限りなく近づく. つまり,

$$
\begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ \varepsilon P_{21} & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \to P_{exa} \tag{33}
$$

したがって一般化リカッチ方程式の解が 10^{-3} オーダの範囲で得られた結果は妥当であることがわかる. 制御入力に関しても 10^{-3} オーダの範囲で一致していることがわかる.

また $\varepsilon = 0.0001$ では, リカッチ方程式を直接解くことは困難である. しかし, 本アルゴリズムでは, 4 回の繰返し計算によって以下の収束解が得られる.

$$
\begin{aligned}
P_{pro} &= \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6.28447 & 2.89877 & 0.00047 & 0.0001 \\ 2.89877 & 7.28635 & 0.00022 & 0.000004 \\ 4.71191 & 2.21092 & 4.71226 & 1.00008 \\ 1.0 & 0.04475 & 1.00008 & 0.23452 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

このとき, 最適制御入力は,

$$
u_{pro}^* = -\begin{bmatrix} 1.0 \\ 4.47598 \times 10^{-2} \\ 1.00008 \\ 2.34520 \times 10^{-1} \end{bmatrix}^T x
$$

6. まとめ

本論文では, A_{22}^{-1} が存在しない非標準特異摂動システムにおけるレギュレータ問題を扱っている. A_{22}^{-1} が存在しない場合, 通常の最適レギュレータ理論でみられたような方法を用いて, リカッチ方程式を導出すると, 0 オーダ方程式の変換はできない. よって, ディスクリプタシステムにおける Hamilton-Jacobi equation を利用して最適フィードバックゲインを求めることを提案した.

このとき, 最適制御入力を求めるために一般化リカッチ方程式が現れる. したがって, 非標準特異摂動システムの最適レギュレータ問題について, Z.Gajic らと異なった方法で再帰的アルゴリズムを導出できた.

また, このアルゴリズムの収束性の証明に陰関数定理を用いた. その結果, 十分小さな正のパラメータ (ε) に対し, 収束解の存在を証明することができた.

さらに, 本論文では, 導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために 2 つの簡単な数値例を示した. この数値例によって, ε が十分小さくても, 収束解が得られることが示された. また, 得られた解は妥当なものであることがわかる.

参考文献

1) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design ; Academic Press (1986)

2) Z.Gajic, Petkovski.D and Shen.X : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System-a Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Infomation Sciences, 140, Berlin ; Springer-Verlag (1990)

3) Y.Y.Wang, P.M.Frank and D.J.Clements : The Robustness Properties of the Linear Quadratic Regulators for Singular Systems ; IEEE Trans. Automatic Control, 38-1, 96 / 100 (1993)

4) Y.Y.Wang, S.J.Shi and Z.J.Zhang : A Descriptor-System Approach to Singular Perturbation of Linear Regulators ; IEEE Trans. Automatic Control, 33-4, 370 / 373 (1988)

5) H.K.Khalil : Feedback Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems ; IEEE Trans. Automatic Control, 34-10, 1052 / 1060 (1989)

6) H.Xu and K.Mizukami : The linear-quadratic optimal regulator for continuous-time descriptor systems : a dynamic programming approach ; Int. J. Systems Sciences, 11, 1889 / 1898 (1994)

7) H.Xu and K.Mizukami : Hamilton-Jacobi equation for descriptor systems ; System and Control Letter, 21, 321 / 327 (1993)

8) H.Xu, K.Mizukami and Y.Y.Wang : Connection Between the Generalized Riccati Equations and the Standard Reduced-Order Riccati Equations ; (1994) (submitted)

9) J.H.Chow and P.V.Kokotovic : A Decomposition of Near-Optimum Regulators for System with Slow and Fast Modes ; IEEE Trans. Automatic Control, AC.21, 701 / 705 (1976)

10) 杉浦光夫 : 解析学入門 2 ; 東京大学出版会 (1985)

表1 $\varepsilon = 0.01$ の P の値

Tab.1. Value of P when $\varepsilon = 0.01$

j	P_{11}	P_{21}	P_{22}
1	1.41421	2.41421	1.0
2	1.44836	2.41421	1.02414
3	1.44794	2.41421	1.02385
4	1.44795	2.41421	1.02386
5	1.44795	2.41421	1.02386
6	1.44795	2.41421	1.02386
7	1.44795	2.41421	1.02386