標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム

The Recursive Algorithm of H_∞ Control Problems for Standard and Nonstandard Singularly Perturbed Systems.

[英文要旨]

Making use of the recursive technique, we consider the H_∞ control problem for singularly perturbed systems which include the nonstandard case. We construct the controller that guarantees a disturbance attenuation level γ which is larger than the maximum of the optimal disturbance attenuation levels for the slow and fast subsystems. In order to obtain the controller, we must solve the full-order Riccati equations. Using the recursive technique, we show that the solution of the full-order Riccati equation converges to a positive semidefinite stabilizing solution with the rate of convergence of $O(\varepsilon^k)$. In addition, the controller achieves the peformance level $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$. To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical examples are included.

Key Words： H_∞ control problems, recursive technique, nonstandard singularly perturbed systems

標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム

The Recursive Algorithm of H_∞ Control Problems for Standard and Nonstandard Singularly Perturbed Systems.

[邦文要旨]

A_{22}^{-1} が存在する標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題において, 確立した設計手法の 1 つに, full-order system を slow system と fast system の 2 つの時間領域に分ける特異摂動法がある. この手法では, 構築された制御器は $O(\varepsilon)$ 程度の近似解であり, 最適な制御を行うことは難しい. また, 近年, high-order である正確な制御器をえるためのアルゴリズムの研究報告があるが, 補助的な状態変数を導入しなければならないため, システムの次元及び, 計算が増加するなどの傾向がある.

従来, 係数行列である A_{22}^{-1} の存在が仮定されていない非標準特異摂動システムにおいて, H_∞ 制御問題に関する研究はほとんど扱われていない. また, 制御器を構成するために解く必要があるリカッチ方程式の再帰的アルゴリズムを利用した数値解法もほとんど研究されていない. そこで本論文では, 標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して, 再帰的アルゴリズムの手法を利用した制御器の構築を提案する. 再帰的アルゴリズムを利用することにより, 特異摂動法を用いずに, 直接 full-order system におけるリカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度でえられることを示す. また, 再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は, 設計仕様の γ に対して $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証することを示す. 最後に, アルゴリズムの有効性を検証するため, 数値例に適用し解を求める.

1. はじめに

近年, A_{22}^{-1} が存在する標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に関して, さまざまな研究が行われている [1)~4)]. Z.Pan[1),2)] らは, 微分ゲーム理論に基づき, 特異摂動法を利用して制御器を構築している. しかし, この設計法によれば, A_{22}^{-1} の存在が必要である. さらに, composite 制御器の場合, 設計仕様 γ に対して $O(\varepsilon)$ 程度の精度しか保証されない. 一方, E.Fridman[3)] によって, high–order である正確な制御器をえるためのアルゴリズムの研究報告がある. この設計法によれば, A_{22}^{-1} が存在する仮定は必要でないが, 補助的な状態変数を導入しなければならないため, システムの高次元化, ならびに, 制御器の設計に外部展開 (outer expantion) を利用しているため, 微分係数の計算が増加するなどの傾向がある.

著者らは文献 13), 14) において, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題や LQG 問題の制御器の設計に欠かせない摂動項 (ε) を含むリカッチ方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案した. しかし, 再帰的アルゴリズム [9)] を利用した H_∞ 制御に関する数値解法は研究されていない. この理由は, 制御器を構築するためのリカッチ方程式がゲーム型のリカッチ方程式 (P_ε の 2 次項の係数行列が, 正定とは限らない) であり, 従来の仮定である可制御性や可観測性の条件のもとでは, 再帰的アルゴリズムを利用して得られた解が準正定かつ安定化解である保証がないためである.

本論文では, A_{22}^{-1} の存在を仮定しない非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して, 文献 13), 14) の再帰的アルゴリズムの手法を拡張した制御器の構築を提案する. 本論文では, 特異摂動法を用いずに, 直接 full–order system におけるリカッチ方程式の解を k 回の繰り返し計算によって, $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことを示す. このとき, 構築された制御器は, 直接 full– オーダのリカッチ方程式を解いて構築した制御器と比較して, $O(\varepsilon^k)$ の高精度であるので, 特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて, より最適である. つまり, 再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は, 設計仕様の γ に対して $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証する. 以上から, 本論文では, E.Fridman[3)] が提案している外部展開を利用した high–order な制御器の設計方法と異なり, 再帰的アルゴリズムを利用して高精度の制御器を設計しているところに大きな特徴がある.

本論文では, 以下の記号を用いる. $||X||_S$ は, 実行列 $X \in \mathbf{R}^{k_1\times k_1}$ の最大特異値 $||X||_S \equiv [\lambda_{\max}(X^TX)]^{1/2}$, $||G(s)||_\infty$ は, 伝達関数行列 $G(s) \in \mathbf{R}^{k_2\times k_2}$ の H_∞ ノルム $||G(s)||_\infty \equiv \sup_s[\lambda_{\max}(G^T(s)G(s))]^{1/2}$ $(s = j\omega,\ \omega \in \mathbf{R})$, $||h(t)||_2$ は, 時間関数ベクトル $h(t) \in \mathbf{R}^{k_3}$ の $L_2[0,\infty]$ ノルム $||h(t)||_2 \equiv [\int_0^\infty h^T(t)h(t)dt]^{1/2}$ $(t \in \mathbf{R})$, $|x|_E$ は, 実ベクトル $x \in \mathbf{R}^{k_4}$ のユークッリドノルム $|x|_E \equiv [x^Tx]^{1/2}$ をそれぞれあらわす.

2. 問題設定

2.1 特異摂動システム

システムに摂動項を含む状態空間において, 以下のような線形時不変特異摂動システムを考える [3)].

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}w + B_{21}u,\ x_1(0) = 0 \quad (1a)$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{12}w + B_{22}u,\ x_2(0) = 0 \quad (1b)$$

このシステムに対する 2 次評価関数は (2) である.

$$J = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \quad (2)$$

ただし,

$$z = Cx + Du$$

である. システム (1b) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T$ は $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}(i = 1,2)$ である状態ベクトル, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ は制御入力, $w(t) \in \mathbf{R}^r$ は外乱, $z(t) \in \mathbf{R}^l$ は制御量である. また, 各係数行列は適当な次元をもつと仮定する. ここで, システム (1a)~(1b) において, A_{22} が特異である, つまり, A_{22}^{-1} が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ.

続いて, 以下の行列を定義する.

$$\begin{aligned}
Q &= C^TC = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1^TC_1 & C_1^TC_2 \\ C_2^TC_1 & C_2^TC_2 \end{bmatrix} \geq 0 \\
S_{ij}^\gamma &= B_{2i}B_{2j}^T - \gamma^{-2}B_{1i}B_{1j}^T,\ i = 1,2, j = 1,2 \\
B_{1\varepsilon} &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ \varepsilon^{-1}B_{12} \end{bmatrix},\ B_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{21} \\ \varepsilon^{-1}B_{22} \end{bmatrix} \\
A_\varepsilon &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \\
S_\varepsilon^\gamma &= \begin{bmatrix} S_{11}^\gamma & \varepsilon^{-1}S_{12}^\gamma \\ \varepsilon^{-1}S_{12}^{T\gamma} & \varepsilon^{-2}S_{22}^\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

また, 以下の仮定を導入する [1),3)].

[仮定 1] 行列対 $(A_\varepsilon, B_{1\varepsilon})$, $(A_\varepsilon, B_{2\varepsilon})$ はともに可安定であり, また同時に行列対 (A_ε, C) は可検出である摂動項 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$ が存在する.

以上の [仮定 1] のもと, H_∞ 制御問題とは,

(条件 1) 状態フィードバック $u = Kx$ によって, 閉ループシステム (1a)~(1b) を内部安定にする.
(条件 2) システム (1a)~(1b) における外乱 w から制御量 z にいたる伝達関数 G_ε の H_∞ ノルム $||G_\varepsilon||_\infty$ をある与えられた設計仕様 γ 以下, すなわち $||G_\varepsilon||_\infty < \gamma$ にする. ただし,

$$G_\varepsilon = (C + DK)\cdot(sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K)^{-1}B_{1\varepsilon} \quad (3)$$

ここで, 制御器の存在性に関係する前提条件として, 以下の仮定を設定する.

[仮定 2] $C^TD = 0$ (直交条件), $D^TD = I$ (正規化条件)

以上の H_∞ 制御問題に対して, システム (1a)~(1b) 及び評価関数 (2) に対する H_∞ 制御器は以下の (4)~(5) によって与えられる [1),5),6),8)].

リカッチ方程式 (4)

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon^\gamma P_\varepsilon + Q = 0 \tag{4}$$

が準正定である安定化解, すなわち, $P_\varepsilon \geq 0$ かつ, 行列 $A_\varepsilon - S_\varepsilon^\gamma P_\varepsilon$ が安定であるような解をもつとき, 制御器の制御入力

$$u(t) = -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon x(t) = Kx(t) \tag{5}$$

は, $||G_\varepsilon||_\infty < \gamma$ を満足する. ただし,

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11}(\varepsilon) & \varepsilon P_{21}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon P_{21}(\varepsilon) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \tag{6}$$

である.

2.2 0− オーダ方程式の導出

まず, full− オーダリカッチ方程式 (4) を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる [13), 14)].

[補題 1] full− オーダリカッチ方程式 (4) は, 以下の一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) を解くことに等価である.

$$P^T A + A^T P - P^T S^\gamma P + Q = 0 \tag{7a}$$

$$P_\varepsilon = \bar{D}^T P = P^T \bar{D} \tag{7b}$$

このとき, (5) で与えられる制御入力 $u(t)$ は以下によって変形できる.

$$u(t) = -B_2^T P x(t) = Kx(t) \tag{8}$$

ただし,

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ S^\gamma = \begin{bmatrix} S_{11}^\gamma & S_{12}^\gamma \\ S_{12}^{\gamma T} & S_{22}^\gamma \end{bmatrix}$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$$

次に, 一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) における再帰的アルゴリズムを導出する. 方程式 (7a)~(7b) を各ブロックごとに計算する.

$$\begin{aligned} &A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\ &\quad - P_{11}^T S_{11}^\gamma P_{11} - P_{21}^T S_{22}^\gamma P_{21} \\ &\quad - P_{11}^T S_{12}^\gamma P_{21} - P_{21}^T S_{12}^{\gamma T} P_{11} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\ &\quad - \varepsilon P_{21} S_{11}^\gamma P_{11} - \varepsilon P_{21} S_{12}^\gamma P_{21} \\ &\quad - P_{22}^T S_{12}^{\gamma T} P_{11} - P_{22}^T S_{22}^\gamma P_{21} + Q_{12}^T = 0 \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} &A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} \\ &\quad - P_{22}^T S_{22}^\gamma P_{22} - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^{\gamma T} P_{21}^T \\ &\quad - \varepsilon P_{21} S_{12}^\gamma P_{22} - \varepsilon^2 P_{21} S_{11}^\gamma P_{21}^T + Q_{22} = 0 \end{aligned} \tag{9c}$$

続いて, リカッチ方程式 (9a)~(9c) において $\varepsilon = 0$ とすれば, 方程式 (10a)~(10c) を得る. ここで, 0− オーダ方程式の解を $\bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ とおく.

$$\begin{aligned} &A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{11}^T S_{11}^\gamma \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^T S_{22}^\gamma \bar{P}_{21} \\ &\quad - \bar{P}_{11}^T S_{12}^\gamma \bar{P}_{21} - \bar{P}_{21}^T S_{12}^{\gamma T} \bar{P}_{11} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} - \bar{P}_{22}^T S_{12}^{\gamma T} \bar{P}_{11} \\ &\quad - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\gamma \bar{P}_{21} + Q_{12}^T = 0 \end{aligned} \tag{10b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\gamma \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{10c}$$

ここで, 以下の仮定を導入する [1), 3)].

[仮定 3] 行列対 (A_{22}, B_{22}) は可安定であり, かつ行列対 (A_{22}, C_2) は可観測である.

また, リカッチ方程式 (10c) において γ_f を以下のように定める [3), 12)].

$\gamma_f = \inf\{\gamma > 0|$ リカッチ方程式 (10c) が正定である安定化解 $\bar{P}_{22}$ をもつ. $\}$

このとき, $\gamma > \gamma_f$ をみたすすべての γ に対して, 方程式 (10c) は正定対称かつ安定化解をもつので行列 $A_{22} - S_{22}^\gamma P_{22}$ は非特異である. したがって, $(A_{22} - S_{22}^\gamma P_{22})^{-1}$ は存在する. 以上から 0− オーダ方程式 (11a)~(11c) がえられる.

[0− オーダ方程式]

$$\bar{P}_{11}^T A_0^\gamma + A_0^{\gamma T} \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_0^\gamma \bar{P}_{11} + Q_0^\gamma = 0 \tag{11a}$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \tag{11b}$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^\gamma \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \tag{11c}$$

ただし

$$\begin{aligned} A_0^\gamma &= A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12}^\gamma N_2^T + N_1 S_{22}^\gamma N_2^T \\ S_0^\gamma &= S_{11}^\gamma + N_1 S_{12}^{\gamma T} + S_{12}^\gamma N_1^T + N_1 S_{22}^\gamma N_1^T \\ Q_0^\gamma &= Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22}^\gamma N_2^T \\ N_2^T &= \bar{A}_{22}^{-T} \hat{Q}_{12}^T,\ N_1^T = -\bar{A}_{22}^{-T} \bar{A}_{12}^T \\ \bar{A}_{12} &= A_{12} - S_{12}^\gamma \bar{P}_{22},\ \bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}^\gamma \bar{P}_{22} \\ \hat{Q}_{12} &= Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22} \end{aligned}$$

(注意 1) 行列 A_0^γ , S_0^γ, Q_0^γ を記述する公式の中には, リカッチ方程式 (11c) の解 $\bar{P}_{22}$ が含まれているが,

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11}^\gamma \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12}^\gamma \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix}$$
$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^{\gamma T} \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22}^\gamma \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}$$

に対し,

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \left[\begin{array}{cc} A_0^\gamma & -S_0^\gamma \\ -Q_0^\gamma & -A_0^{\gamma T} \end{array} \right] \tag{12}$$

が成立するので実際には, 行列 A_0^γ, S_0^γ, Q_0^γ はリカッチ方程式 (11c) の解 $\bar{P}_{22}$ に依存しない [13),14)].

リカッチ方程式 (11a) が正定である安定化解をもつために, 以下の仮定を導入する [12)].

[仮定 4] $Q_{ij} = C_i^T C_j$ $(i, j = 1, 2)$ とする. このとき,

$$\mathrm{rank} \left[\begin{array}{ccc} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_{21} \\ -A_{21} & -A_{22} & B_{22} \end{array} \right] = n_1 + n_2 \tag{13}$$

$$\mathrm{rank} \left[\begin{array}{ccc} sI_{n_1} - A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{array} \right] = n_1 + n_2 \tag{14}$$

である. ただし, $\forall s \in \mathrm{C}$ である.

(注意 2) [仮定 4] が成立することは, $\gamma > \gamma_f$ を満たすすべての γ に対して, 行列対 $(A_0^\gamma,\ \hat{B}_0^\gamma)$ は可安定であり, かつ行列対 (A_0^γ, C_0^γ) は可観測であることと等価である [12)]. ただし,

$$\begin{aligned}
&Q_0^\gamma = C_0^{\gamma T} C_0^\gamma,\ C_0^\gamma = C_1 + C_2 M_1^T \\
&M_1 = -\tilde{A}_{21} \tilde{A}_{22}^{-1} \\
&\tilde{A}_{21} = A_{21}^T + Q_{12} \bar{P}_{22}^{-1} \\
&\tilde{A}_{22} = A_{22}^T + Q_{22} \bar{P}_{22}^{-1} \\
&S_0^\gamma = \hat{B}_0^\gamma \hat{B}_0^{\gamma T} - \gamma^{-2} \bar{B}_0^\gamma \bar{B}_0^{\gamma T} \\
&\hat{B}_0^\gamma = B_{21} + N_1 B_{22} = B_{21} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{22} \\
&\bar{B}_0^\gamma = B_{11} + N_1 B_{12} = B_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{12}
\end{aligned}$$

である.

次に, リカッチ方程式 (11a) において γ_s を以下のように定める [12)].

$\gamma_s = \inf\{\gamma > 0|$ リカッチ方程式 (11a) が正定である安定化解 $\bar{P}_{11}$ をもつ. $\}$

以上から, リカッチ方程式 (11a), (11c) は $\gamma > \bar{\gamma}$ を満たすすべての γ に対して, 正定対称である安定化解をもつ. ただし, $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ とする.

2.3 再帰的アルゴリズムの導出

再帰的アルゴリズムを導出するために, 偏差を定義する.

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11},\ P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21} \\
P_{22} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}
\end{aligned} \tag{15}$$

以上を方程式 (9a)~(9c) に代入する. 0– オーダ方程式 (10a)~(10c) を用いて, 偏差 E についての方程式 (16a)~(16c) が得られる.

$$\begin{aligned}
E_{11}^T \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11} = &-V^T H_1^T - H_1 V \\
&+ V^T H_3 V + \varepsilon H_2
\end{aligned} \tag{16a}$$

$$E_{11}^T \bar{A}_{12} + E_{21}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22} = H_1 \tag{16b}$$

$$E_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22} = H_3 \tag{16c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1 &= -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11}^\gamma P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^{\gamma T} P_{21}^T \\
&\quad + \varepsilon (E_{11}^T S_{12}^\gamma E_{22} + E_{21}^T S_{22}^\gamma E_{22}) \\
H_2 &= E_{11}^T S_{11}^\gamma E_{11} + E_{21}^T S_{22}^\gamma E_{21} \\
&\quad + E_{11}^T S_{12}^\gamma E_{21} + E_{21}^T S_{12}^{\gamma T} E_{11} \\
H_3 &= -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11}^\gamma P_{21}^T \\
&\quad + \varepsilon E_{22}^T S_{22}^\gamma E_{22} + P_{21} S_{12}^\gamma P_{22} + P_{22}^T S_{12}^{\gamma T} P_{21}^T \\
\bar{A}_{11} &= A_{11} - S_{11}^\gamma \bar{P}_{11} - S_{12}^\gamma \bar{P}_{21} \\
\bar{A}_{21} &= A_{21} - S_{12}^{\gamma T} \bar{P}_{11} - S_{22}^\gamma \bar{P}_{21},\ V = \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}
\end{aligned}$$

したがって, 偏差 E についての方程式 (16a)~(16c) を差分化することによって, 偏差 E についての再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) が導出される.

$$\begin{aligned}
&E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11}^{(j+1)} = \\
&\quad - V^T H_1^{(j)T} - H_1^{(j)} V + V^T H_3^{(j)} V + \varepsilon H_2^{(j)}
\end{aligned} \tag{17a}$$

$$E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_{12} + E_{21}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22}^{(j+1)} = H_1^{(j)} \tag{17b}$$

$$E_{22}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22}^{(j+1)} = H_3^{(j)} \tag{17c}$$

ただし

$$\begin{aligned}
H_1^{(j)} &= -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11}^\gamma P_{21}^{(j)T} \\
&\quad + P_{21}^{(j)T} S_{12}^{\gamma T} P_{21}^{(j)T} \\
&\quad + \varepsilon (E_{11}^{(j)T} S_{12}^\gamma E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22}^\gamma E_{22}^{(j)}) \\
H_2^{(j)} &= E_{11}^{(j)T} S_{11}^\gamma E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22}^\gamma E_{21}^{(j)} \\
&\quad + E_{11}^{(j)T} S_{12}^\gamma E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^{\gamma T} E_{11}^{(j)} \\
H_3^{(j)} &= -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)} A_{12} \\
&\quad + \varepsilon P_{21}^{(j)} S_{11}^\gamma P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22}^\gamma E_{22}^{(j)} \\
&\quad + P_{21}^{(j)} S_{12}^\gamma P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^{\gamma T} P_{21}^{(j)T} \\
P_{11}^{(j)} &= \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)},\ P_{21}^{(j)} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)} \\
P_{22}^{(j)} &= \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)},\ E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0
\end{aligned}$$

ここで, $^{(j)}$ は j 番目の値, $^{(j+1)}$ は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j 番目の値が求まれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値が定まり, これを再帰的に求めればよい.

3. 再帰的アルゴリズムの収束

まず, 定理をあげる.

<<定理1>> ε が十分小さいと仮定する. また, [仮定1]~[仮定4] が成立するとする. このとき, $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するある γ に対して, アルゴリズム (17a)~(17c) は, 偏差 E の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$||E - E^{(k)}||_S = O(\varepsilon^k), \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{18}$$

また, リカッチ方程式 (4) の準正定である安定化解 P_ε は,

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11} & \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21})^T \\ \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}) & \varepsilon(\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}) \end{bmatrix} \tag{19}$$

と表現できる. ただし

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{bmatrix}, \ E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理1の証明) まず, 再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) において, $\varepsilon = 0$ の近傍における唯一解 E の存在は陰関数定理により証明できる [9),13),14)]. 陰関数定理を用いるために, アルゴリズム (17a)~(17c) に対するヤコビ行列を以下のように計算する.

[ヤコビ行列]

$$J|_{\varepsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \tag{20}$$

ただし

$$\begin{aligned}
J_{11} &= I \otimes \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T \otimes I \\
J_{22} &= I \otimes \bar{A}_{22} \\
J_{33} &= I \otimes \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T \otimes I \\
J_{k1} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}}|_{\varepsilon=0}, \ J_{k2} = \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}}|_{\varepsilon=0} \\
J_{k3} &= \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}}|_{\varepsilon=0}, \ (k = 1, 2, 3) \\
L_1 &= E_{11}^T \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V \\
&\quad - V^T H_3 V - \varepsilon H_2 \\
L_2 &= E_{11}^T \bar{A}_{12} + E_{21}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22} - H_1 \\
L_3 &= E_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22} - H_3
\end{aligned}$$

$\otimes$ はクロネッカ積である. ここで, $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}^\gamma \bar{P}_{22}$ はリカッチ方程式 (11c) が, 安定化解をもつので安定である. 同様に, $A_0^\gamma - S_0^\gamma \bar{P}_{11}$ は, リカッチ方程式 (11a) が, 安定化解をもつので安定である. したがって,

$$A_0^\gamma - S_0^\gamma \bar{P}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21} = \bar{A}_0 \tag{21}$$

となるので, $\bar{A}_0$ は安定となる. 以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) に対する唯一解 E の存在が証明される.

次に, 再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) の収束性について考える. 再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) に対して $j = 0$ とおき, 方程式 (16a)~(16c) との差をとる.

$$\begin{aligned}
&(E_{11} - E_{11}^{(1)})\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T(E_{11} - E_{11}^{(1)}) \\
&\quad = \varepsilon \mathcal{F}_1(E_{11}, \ E_{21}, \ \varepsilon)
\end{aligned} \tag{22a}$$

$$(E_{21} - E_{21}^{(1)})^T \bar{A}_{22} = \varepsilon \mathcal{F}_2(E_{11}, \ E_{21}, \ E_{22}, \ \varepsilon) \tag{22b}$$

$$\begin{aligned}
&(E_{22} - E_{22}^{(1)})\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T(E_{22} - E_{22}^{(1)}) \\
&\quad = \varepsilon \mathcal{F}_3(E_{21}, \ E_{22}, \ \varepsilon)
\end{aligned} \tag{22c}$$

ここで, 関数 $\mathcal{F}_1, \ \mathcal{F}_2, \ \mathcal{F}_3$ は, $\varepsilon, \ E_{11}, \ E_{21}, \ E_{22}$ を適切に含む陰関数である. $\bar{A}_{22}, \ \bar{A}_0$ は安定行列なので,

$$\begin{aligned}
&||E_{11} - E_{11}^{(1)}||_S = O(\varepsilon), \ ||E_{21} - E_{21}^{(1)}||_S = O(\varepsilon) \\
&||E_{22} - E_{22}^{(1)}||_S = O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{23}$$

となる. この操作を帰納的に $j = 1, \ 2, \ 3, \cdots$ と続ければ,

$$\begin{aligned}
&||H_1 - H_1^{(j-1)}||_S = O(\varepsilon^j), \ ||H_2 - H_2^{(j-1)}||_S = O(\varepsilon^j) \\
&||H_3 - H_3^{(j-1)}||_S = O(\varepsilon^j)
\end{aligned} \tag{24}$$

に注意して,

$$\begin{aligned}
&||E_{11} - E_{11}^{(j)}||_S = O(\varepsilon^j), \ ||E_{21} - E_{21}^{(j)}||_S = O(\varepsilon^j) \\
&||E_{22} - E_{22}^{(j)}||_S = O(\varepsilon^j)
\end{aligned} \tag{25}$$

となる. したがって, (18) が得られる. 以上から, 任意の初期値に対して, ε が小さいなら再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) は収束する. また, その収束解は $E_{11}, \ E_{21}, \ E_{22}$ である.

続いて, 再帰的アルゴリズムによってえられた解 P_ε が準正定かつ安定化解であることを示す. 通常, 文献 13), 14) などで扱われている最適レギュレータ問題や LQG 問題において, 最適ゲインを得るために解く必要がある摂動項を含むリカッチ方程式は, 可制御性, 可観測性が仮定されている. したがって, 得られた解は準正定かつ安定化解を保証している. しかし, 本論文で扱われているリカッチ方程式 (4) は, 可制御性, 可観測性を仮定しても, えられた収束解が準正定かつ安定化解の保証がない. そこで, 再帰的アルゴリズム (17a)~(17c) によってえられた解が準正定かつ安定化解である証明を新たに行う.

この証明は, $\varepsilon = 0$ の近傍における解 P_ε が準正定かつ安定化解であることを示すことと等価である. (19) から

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(\varepsilon) \tag{26}$$

である. [仮定3], [仮定4] から, リカッチ方程式 (11a), の解 $\bar{P}_{11}$ は準正定であるから ε が十分小さいとき, P_ε も準正定になる. 続いて,

$$\begin{aligned}
&A_\varepsilon - S_\varepsilon^\gamma P_\varepsilon \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \\
&\quad - \left[\begin{matrix} S_{11}^\gamma P_{11} + S_{12}^\gamma P_{21} \\ \varepsilon^{-1}(S_{12}^{\gamma T} P_{11} + S_{22}^\gamma P_{21}) \end{matrix} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon S_{11}^{\gamma} P_{21}^T + S_{12}^{\gamma} P_{22} \\ \varepsilon^{-1}(\varepsilon S_{12}^{\gamma T} P_{21}^T + S_{22}^{\gamma} P_{22}) \end{array} \Bigg]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_{11} + O(\varepsilon) & \bar{A}_{12} + O(\varepsilon) \\ \varepsilon^{-1}(\bar{A}_{21} + O(\varepsilon)) & \varepsilon^{-1}(\bar{A}_{22} + O(\varepsilon)) \end{array} \right] \quad (27)$$

である． [仮定 3] から $\bar{A}_{22}$ は安定行列であり，関係式 (21) と [仮定 4] から $\bar{A}_0 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}$ も安定行列である． したがって, 文献 11) から, 行列 (27) は安定となる. 以上から, 解 P_ε が準正定かつ安定化解であることが示される． □

次に, 再帰的アルゴリズムを k 回繰り返してえられた解 $P_\varepsilon^{(k)}$ を用いて制御器を構成することを考える． このとき，設計された制御器に対して以下の定理をえることができる．

<< 定理 2>> $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するある γ に対して，リカッチ方程式 (4) を再帰的アルゴリズム (17a)∼(17c) によって解いた解を $P_\varepsilon^{(k)}$ とする． このとき，(5) によって構成された制御器 $u_{pro} = K_{pro}x$ は,

$$\begin{aligned} & \|(C + DK_{pro}) \\ & \quad \cdot(sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K_{pro})^{-1}B_{1\varepsilon}\|_\infty \\ = \; & \|(C + DK_{exa}) \\ & \quad \cdot(sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K_{exa})^{-1}B_{1\varepsilon}\|_\infty + O(\varepsilon^{k+1}) \\ < \; & \gamma + O(\varepsilon^{k+1}) \end{aligned} \quad (28)$$

を満たす. ただし,

$$\begin{aligned} K_{exa} &= -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon, \; K_{pro} = -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon^{(k)} \\ P_\varepsilon^{(k)} &= \left[\begin{array}{cc} \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(k)} & \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(k)})^T \\ \varepsilon(\bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(k)}) & \varepsilon(\bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(k)}) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

(定理 2 の証明) E.Fridman[3] の Appendix に書かれている証明法を用いて不等式の評価を行う． まず，E.Fridman[3] と同様にして，リカッチ方程式 (4) の解 P_ε を用いて，(5) によって構築された制御器をシステム (1a)∼(1b) に適用する． このとき，システム (1a)∼(1b) および，評価関数 (2) は，以下の (30a)∼(30b) になる．

$$\dot{x} = \hat{A}_\varepsilon x + \varepsilon F_\varepsilon x + B_{1\varepsilon}w, \; x(0) = 0 \quad (30a)$$

$$J = \int_0^\infty x^T(t)\bar{Q}x(t)dt \quad (30b)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \hat{A}_\varepsilon &= A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}B_2^T\bar{P} \\ &= A_\varepsilon - \left[\begin{array}{cc} B_1B_1^T & B_1B_2^T \\ \varepsilon^{-1}B_2B_1^T & \varepsilon^{-1}B_2B_2^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1}\hat{A}_{21} & \varepsilon^{-1}\hat{A}_{22} \end{array} \right] \\ F_\varepsilon &= -\varepsilon^{-1}B_{2\varepsilon}(B_{2\varepsilon}^TP_\varepsilon - B_2^T\bar{P}) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ \varepsilon^{-1}F_2 \end{array} \right] \\ \bar{Q} &= Q + P_\varepsilon B_{2\varepsilon}B_{2\varepsilon}^TP_\varepsilon \end{aligned}$$

である． $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}^{\gamma}\bar{P}_{22}$ が安定より，$\hat{A}_{22} = A_{22} - B_2B_2^T\bar{P}_{22}$ は安定行列であるから [8],

$$\begin{aligned} & T^{-1}\hat{A}_\varepsilon T = \left[\begin{array}{cc} A_s & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_f \end{array} \right], \; y = T^{-1}x \\ & T = \left[\begin{array}{cc} I_{n_1} & \varepsilon H \\ -L & I_{n_2} - \varepsilon LH \end{array} \right] \\ & A_s = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}L = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{22}^{-1}\hat{A}_{21} + O(\varepsilon) \\ & A_f = \hat{A}_{22} + \varepsilon L\hat{A}_{12} = \hat{A}_{22} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (31)$$

である線形変換行列 T が存在する [10), 11)]． ただし，L, H は以下の代数方程式 (32a)∼(32b) の解である．

$$\hat{A}_{22}L - \hat{A}_{21} - \varepsilon L(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}L) = 0 \quad (32a)$$

$$H(\hat{A}_{22} + \varepsilon L\hat{A}_{12}) - \hat{A}_{12} - \varepsilon(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}L)H = 0 \quad (32b)$$

したがって, 線形変換 (31) をシステム (30a) に適用することによって, システム (33a)∼(33b) をえる．

$$\dot{y}_1 = A_sy_1 + \varepsilon F_sy + B_{1s}w, \; y_1(0) = 0 \quad (33a)$$

$$\varepsilon\dot{y}_2 = A_fy_2 + \varepsilon F_fy + B_{1f}w, \; y_2(0) = 0 \quad (33b)$$

ただし,

$$\left[\begin{array}{c} B_{1s} \\ \varepsilon^{-1}B_{1f} \end{array} \right] = T^{-1}B_{1\varepsilon}, \; \left[\begin{array}{c} F_s \\ \varepsilon^{-1}F_f \end{array} \right] = T^{-1}F_\varepsilon T,$$

$$y = \left[\begin{array}{c} y_1(t) \\ y_2(t) \end{array} \right]$$

である．

続いて，E.Fridman[3] が提案している制御器 $u_m = [V_m + O(\varepsilon^m)]x$ の代わりに，本論文で導出された再帰的解 $P_\varepsilon^{(k)}$ を用いて，(5) によって構築した制御器 u_{pro} をシステム (1a)∼(1b) に適用する．このときのシステム (1a)∼(1b) および，評価関数 (2) は, 以下の (34a)∼(34b) になる．

$$\dot{x} = \hat{A}_\varepsilon x + \varepsilon\hat{F}_\varepsilon x + B_{1\varepsilon}w, \; x(0) = 0 \quad (34a)$$

$$\hat{J} = \int_0^\infty x^T(t)\hat{Q}x(t)dt \quad (34b)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \hat{F}_\varepsilon &= -\varepsilon^{-1}B_{2\varepsilon}(B_{2\varepsilon}^TP_\varepsilon^{(k)} - B_2^T\bar{P}) = \left[\begin{array}{c} \hat{F}_1 \\ \varepsilon^{-1}\hat{F}_2 \end{array} \right], \\ \hat{Q} &= Q + P_\varepsilon^{(k)}B_2B_2^TP_\varepsilon^{(k)} \end{aligned}$$

である. 同様に, $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}^{\gamma}\bar{P}_{22}$ は安定行列であるから, 線形変換 $f = T^{-1}x$ をシステム (34a) に適用すれば, システム (35a)∼(35b) をえる．

$$\dot{f}_1 = A_sf_1 + \varepsilon\hat{F}_sf + B_{1s}w, \; f_1(0) = 0 \quad (35a)$$

$$\varepsilon\dot{f}_2 = A_ff_2 + \varepsilon\hat{F}_ff + B_{1f}w, \; f_2(0) = 0 \quad (35b)$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_s \\ \varepsilon^{-1}\hat{F}_f \end{bmatrix} = T^{-1}\hat{F}_\varepsilon T,$$
$$f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

である.

本論文では, E.Fridman[3] と異なり, 直接的に 2 つの行列 (19) 及び (29) の差をとり, 定理 1 から以下の結果をえることができる.

$$||P_\varepsilon - P_\varepsilon^{(k)}||_S = O(\varepsilon^{k+1}) \tag{36}$$

したがって,

$$||T^{-1}\hat{F}_\varepsilon T - T^{-1}F_\varepsilon T||_S = O(\varepsilon^k) \tag{37}$$
$$||\hat{Q} - \bar{Q}||_S = O(\varepsilon^{k+1}) \tag{38}$$

であることに注意すれば, シュワルツの不等式を利用することによって,

$$\begin{aligned} |J - \hat{J}| &\le \int_0^\infty [m_1|e(t)|_E|y(t)|_E + m_2|e(t)|_E|f(t)|_E \\ &\quad + m_0\varepsilon^{k+1}|y(t)|_E|f(t)|_E]dt \\ &\le \bar{m}[||e||_2(||y||_2 + ||f||_2) \\ &\quad + \varepsilon^{k+1}||y||_2 \cdot ||f||_2] \end{aligned} \tag{39}$$

ただし,

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) - f(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \\ \bar{m} &= \max\{m_0,\ m_1,\ m_2\} \\ m_1 &= ||T^T\bar{Q}T||_S > 0,\ m_2 \ = \ ||T^T\hat{Q}T||_S > 0 \end{aligned}$$

システム (33a)~(33b) および, システム (35a)~(35b) の差を考えることによって, 以下のシステム (40a)~(40b) を導入する.

$$\dot{e}_1 = A_s e_1 + \varepsilon\hat{F}_s e + O(\varepsilon^{k+1})y \tag{40a}$$

$$\varepsilon\dot{e}_2 = A_f e_2 + \varepsilon\hat{F}_f e + O(\varepsilon^{k+1})y \tag{40b}$$

以上の準備のもとで, まず, 微分方程式 (33b) を解く.

$$\begin{aligned} ||y_2||_2^2 &\le \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t \frac{\beta_2}{\varepsilon^2}\exp[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t-r-p)] \\ &\quad \cdot[|w(p)|_E + \varepsilon|y(p)|_E] \\ &\quad \cdot[|w(r)|_E + \varepsilon|y(r)|_E]drdpdt \end{aligned} \tag{41}$$

α_2, β_2 はそれぞれ $||\exp\varepsilon^{-1}A_f t||_S \ \le \ \beta_2\exp(-\varepsilon^{-1}\alpha_2 t)$ を満たす正の定数である, ここで, 一般に成立する不等式

$$\begin{aligned} &[|w(p)|_E + \varepsilon|y(p)|_E]\cdot[|w(r)|_E + \varepsilon|y(r)|_E] \\ \le\ & \varepsilon^2[|y(p)|_E^2 + |y(r)|_E^2] + |w(p)|_E^2 + |w(r)|_E^2 \end{aligned} \tag{42}$$

および, 積分方程式 (41) の積分順序の変更をすることによって以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} ||y_2||_2^2 &\le \frac{2\beta_2}{\varepsilon^2}\int_0^\infty \int_p^\infty \int_0^t \exp[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t-r-p)] \\ &\quad drdt\cdot[|w(p)|_E^2 + \varepsilon^2|y(p)|_E^2]dp \\ &\le \frac{2\beta_2}{\alpha_2^2}[||w||_2^2 + \varepsilon^2||y||_2^2] \end{aligned} \tag{43}$$

同様にして, 微分方程式 (33a) を解けば.

$$||y_1||_2^2 \le \frac{2\beta_1}{\alpha_1^2}[||w||_2^2 + \varepsilon^2||y||_2^2] \tag{44}$$

をえることができる. したがって, ε が十分小さいときには,

$$||y||_2 \le c_1||w||_2,\ c_1 > 0 \tag{45}$$

が成立する. また, (35a)~(35b), (40a)~(40b) から,

$$||f||_2 \le c_2||w||_2,\ c_2 > 0 \tag{46}$$
$$\begin{aligned} ||e||_2 &\le c_3\varepsilon^{k+1}||y||_2 \\ &\le c_4\varepsilon^{k+1}||w||_2,\ c_3, c_4 > 0 \end{aligned} \tag{47}$$

がえられる. 以上の結果から不等式 (46)~(47) を (39) に適用すれば,

$$\begin{aligned} |J - \hat{J}| &\le \bar{m}[||e||_2(||y||_2 + ||f||_2) + \varepsilon^{k+1}||y||_2\cdot||f||_2] \\ &\le \bar{m}[c_4(c_1+c_2) + c_1\cdot c_2]\varepsilon^{k+1}||w||_2^2 \\ &\le \bar{m}_0\varepsilon^{k+1}||w||_2^2 \end{aligned} \tag{48}$$

となるが, $J \ \le \gamma^2||w||_2^2$ に注意すれば

$$\begin{aligned} &\hat{J} = J + O(\varepsilon^{k+1})||w||_2^2 \\ \Leftrightarrow\ &\hat{J} \le [\gamma + O(\varepsilon^{k+1})]^2||w||_2^2 \end{aligned} \tag{49}$$

と等価である. □

(注意 3) 定理 2 の証明は, 文献 3) の Theorem の証明と類似している. しかし, 本論文では, 定理 1 からえられた関係式 (18) を利用して証明をおこなっているところが E.Fridman[3] と異なる. すなわち, 文献 3) で提案されている制御器 $u_m = [V_m + O(\varepsilon^m)]x$ が外部展開 (outer expantion) を利用しているために, ε の展開式になっている. つまり, $V_m = -\sum\sum_{k=0}^m \varepsilon^k[\cdot\cdot]$ の形をしており, 文献 3) の Appendix の中にある $Q_m - \bar{Q} = O(\varepsilon^{m+1})$ などの関係式は外部展開からの結果を利用して導出されている. 一方, 本論文では, (29) 式の制御器 $u_{pro} = K_{pro}x$ は再帰的アルゴリズムを利用している. その結果, 定理 1 からの結果である関係式 (36), (37), 及び (38) などは全て (18) を利用して導出しているところが異なる.

さらに, 制御器の近似誤差を決定する要因が E.Fridman[3] と異なることが大きな特徴である. (u_m は設計者が展開した次数 m によって近似誤差が決まり, u_{pro} は再帰的アルゴリズムの反復回数 k(収束回数 k) によって近似誤差が決まるところが大きな違いになる.) また, 微分係数の計算が必要ないので, 制御器の設計が全て計算機によって可能である.

4. 数値例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し，解を求める．

システム (1a)~(1b) および，評価関数 (2) における各係数行列を以下によって与える．ただし，$\varepsilon = 0.0001$ である．

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix} \\
A_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
B_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} \\
B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
Q &= C^T C = \mathrm{diag}\{1, 0, 1, 0\} \\
C^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

このとき，2 次評価関数は以下になる．

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)u(t)]dt \tag{50}$$

システム (1b) における行列 A_{22} の行列式 $\det A_{22}$ は，$\det A_{22} = 0$ なので非標準特異摂動システムである．

まず，$\gamma_f = 0.7680, \gamma_s = 7.0817$ であるので，ε が十分小さいとき $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\} = 7.0817$ を満足するある γ に対して，一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) は準正定である安定化解をもつことがわかる．したがって，本論文では，$\gamma = 8 > \bar{\gamma}$ として設計する．

はじめに，一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) に対して $\varepsilon = 0$ とおくことによってえられる 0- オーダ解 $P^{(0)}$，および制御ゲイン K_0 は以下によって与えられる．

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.85007 & 6.26150 & 0 & 0 \\ 6.26150 & 8.74375 & 0 & 0 \\ 12.54696 & 5.27678 & 4.86116 & 1.03771 \\ 2.77242 & 0.72567 & 1.03771 & 0.24405 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} -2.77242 & -0.72567 & -1.03771 & -0.24405 \end{bmatrix}$$

ここで，注意しなければならないことは，制御ゲイン K_0 は，E.Fridman[3] の提案している制御ゲイン V_0 に一致することである．続いて，本論文で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば，4 回の繰り返し計算によって次の一般化リカッチ方程式 (7a)~(7b) の再帰的解 $P^{(k)}$ ($P_\varepsilon^{(k)} = \bar{D}^T P^{(k)}$)，および制御ゲイン K_{pro} をえることができる．

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} 14.85237 & 6.26272 & 0.00126 & 0.00028 \\ 6.26272 & 8.74439 & 0.00053 & 0.00007 \\ 12.54901 & 5.27789 & 4.86227 & 1.03794 \\ 2.77286 & 0.72592 & 1.03794 & 0.24411 \end{bmatrix}$$

$$K_{pro} = \begin{bmatrix} -2.77286 & -0.72592 & -1.03794 & -0.24411 \end{bmatrix}$$

本論文では，収束の判定は $||P^{(j+1)} - P^{(j)}||_S < 10^{-7}, j = 1, 2, \cdots$ となったところで計算を打ち切る．一般化リカッチ方程式の解の精度を比較するために，MATLAB を用いて直接リカッチ方程式 (4) を分割計算することなく解いた解 P_ε，および制御ゲイン K_{exa} を以下によって与える．

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} 14.8509 & 6.2620 & 0.0013 & 0.0003 \\ 6.2620 & 8.7440 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0013 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{exa} = \begin{bmatrix} -2.7726 & -0.7258 & -1.0379 & -0.2441 \end{bmatrix}$$

最後に，$\gamma = 8$ で設計した制御器に対する式 (3) による H_∞ ノルムの値は以下のとおりである．

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 7.8729 \\
\gamma_{pro} &= 7.8727 \\
\gamma_{exa} &= 7.8729 \\
\gamma_{opt} &= 7.0484
\end{aligned}$$

ここで，γ_0 は 0 オーダ解 $\bar{P}_0$ によってえられた制御器 $u = K_0 x$ をシステム (1a)~(1b) に入力したときの式 (3) で与えられる H_∞ ノルムの値である．あるいは，E.Fridman[3] の提案している制御ゲイン V_0 を入力したときの H_∞ ノルムの値と解釈できる．同様に γ_{pro} は提案型の方法を利用してえられた解 $P_\varepsilon^{(k)}$ による H_∞ ノルムの値．γ_{exa} は直接リカッチ方程式 (4) を $\gamma = 8$ として得られた解 P_ε による H_∞ ノルムの値を意味する．最後の γ_{opt} は，$\varepsilon = 0.0001$ としたときのシステム (1a)~(1b) に関するリカッチ方程式 (4) が準正定である安定化解をもつための γ の下限値である．

これらの結果を比較する．まず，0- オーダ解 $\bar{P}_0$ によってえられた制御器 $u = K_0 x$ をシステムに入力したときの H_∞ ノルムの値 (E.Fridman[3] の提案している制御ゲイン V_0 を入力したときの H_∞ ノルムの値)γ_0，提案型の方法を利用してえられた制御器による H_∞ ノルムの値 γ_{pro}，MATLAB を用いて，直接リカッチ方程式 (4) を $\gamma = 8$ としてえられた制御器を入力したときの H_∞ ノルムの値 γ_{exa} のいずれも，$\varepsilon = 0.0001$ としたときの γ_{opt} より大きいが，設計前の $\gamma = 8$ より小さくなっていることが確認される．

さらに，本論文で提案されたアルゴリズムで得られた解 $P_\varepsilon^{(k)}$ は，リカッチ方程式を直接解いてえられた解 P_ε に限りなく近づく．つまり，

$$P_\varepsilon^{(k)} \to P_\varepsilon \tag{51}$$

したがって一般化リカッチ方程式の解が 10^{-3} オーダの範囲でえられた結果は妥当であることがわかる．また，制御入力および，そのときの H_∞ ノルムの値に関しても 10^{-3} オーダの範囲で一致していることがわかる．以上から，数値例からも定理 2 における H_∞ ノルムの不等式 (28) を確認することができる．

(注意 4)　E.Fridman[3] の提案している high–order である制御器 u_m(文献 3) の (3.8) 式) は, $m = 0$ の場合 ($u = u_0$), 本論文の 0– オーダ解を利用した制御器 $u = K_0x$ と一致する．しかし, $1 \leq m$ の場合, E.Fridman[3] の提案している high–order である制御器を構築することは, 本論文の数値例では, 微分係数の計算など困難なため, 制御器をえることは実際に難しい．したがって, 本論文では, $u = K_0x = u_0$ を入力したときの H_∞ ノルムの比較を行っている． その結果, 本論文の数値例では, 解析的に文献 3) の評価式 $\gamma + O(\varepsilon^{m+1})$ にあてはめたとき, E.Fridman の制御器 $u_m = u_0$ では $\gamma + O(\varepsilon)$ しか達成されない．しかし, 本論文で提案された制御器の場合, 評価式 $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ は反復回数 k に依存しており, 本論文の数値例の場合 $k = 4$ で収束しているので, $\gamma + O(\varepsilon^5)$ を達成していることがわかる．

5. まとめ

本論文では, A_{22}^{-1} の存在を仮定しない標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して, 一般化リカッチ方程式を利用した再帰的アルゴリズムの手法による制御器の構築を提案した． 再帰的アルゴリズムを利用することにより, 摂動項 ε が十分小さいとき, えられた一般化リカッチ方程式の解は準正定かつ安定化解であることを証明した．さらに, 直接 full-order system における一般化リカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことによって, 構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であることを同時に示した． その結果, 特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて, より最適な制御が可能となった．つまり再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は, 設計仕様の γ に対して $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証している．さらに, 本論文では, アルゴリズムの有効性を検証するため, 数値例に適用し解を求めた． このとき, 再帰的アルゴリズムによってえられた一般化リカッチ方程式の解で構成される制御器が, 数値的に十分有効であることが確認された．

参考文献

1) Z.Pan and T.Basar : $H_\infty-$Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part I. Pperfect state mesurements, Automatica, **29**-2, 401 / 423 (1993)

2) Z.Pan and T.Basar : $H_\infty-$Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part II. Imperfect state mesurements, IEEE Tran. Automatic Control, **39**-2, 230 / 299 (1994)

3) E.Fridman : Near-Optimal $H_\infty-$ Control of Linear Singularly Perturbed Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **41**-2, 236 / 240 (1996)

4) V.Dragan : $H_\infty-$Norms and Disturbance Attenuation for Systemes with Fast Transients, IEEE Trans. Automatic Control, **41**-5, 747 / 750 (1996)

5) J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar, and B.A.Francis : State Space Solution to Standard H_2, and H_∞ Control Ploblems, IEEE Tran. Automatic Control, **34**-8, 831 / 847 (1989)

6) G.Hewer : Existence Theorems for Positive Semidefinite and Sign Indefinite Stabilizing Solutions of H_∞ Riccati Equations, SIAM J.Control and Optimization, **31**, 16/29 (1993)

7) Z.Gajic and M.T.J.Qureshi: Lyapunov Matrix Equation in Syatem Stabilty and Control, ACADEMIC PRESS. Vol.195 (1995)

8) P.Lancaster and L.Rodman : Algebraic Riccati Equations, CLARENDON PRESS · OXFORD. (1995)

9) Z.Gajic, Petkovski.D and Shen.X : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System-a Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Infomation Sciences, 140, Berlin ; Springer-Verlag (1990)

10) W.C.Su, Z.Gajic, and X.Shen : The exact slow-fast decomposition of the algebraic Riccati equation of singularly perturbed systems, IEEE Trans. Automatic Control, **37**-9, 1456 / 1459 (1992)

11) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design ; Academic Press (1986)

12) H.Xu and K.Mizukami : Nonstandard extension of $H_\infty-$optimal control for singularly perturbed systems ; Proceeding of the 7th International Symposium on Dynamic Games and Applications, December 16-18,Japan(1996)

13) 向谷, 水上, 徐 : 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集　**32**-5, 672/678 (1996)

14) 向谷, 水上 : 非標準特異摂動システムにおける Linear-Quadratic-Gaussian(LQG) 問題のための再帰的アルゴリズム, 電気学会論文誌 C vol.**116-C**, No12, 1382/1389 (1996)