計測自動制御学会論文集
Vol.32, No.1, 1/9 (1995)

特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームのための再帰的アルゴリズム

向谷博明*・小林康秀*・沖田豪*

Recursive Algorithm of Linear Quadratic Nash Games for Singularly Perturbed Systems

Hiroaki MUKAIDANI*, Yasuhide KOBAYASHI* and Tsuyoshi OKITA*

In this paper we study the linear quadratic Nash Game strategies for a singularly perturbed systems. In order to obtain the optimal closed loop strategies, we must solve the cross–coupled generalized algebraic Riccati equations with small parameter ε. The main results in this paper is to propose a new recursive algorithm by making use of a Lyapunov iterations. Using a Lyapunov iterations and the recursive algorithm, we show that the solution of the cross–coupled generalized algebraic Riccati equations converges to a positive semi–definite solutions with the rate of convergence of $O(\varepsilon^{k+1})$ where k is a iteration number of recursive algorithm. Furthermore, in order to show the effectiveness of the proposed algorithms, numerical examples are included.

Key Words: Linear quadratic Nash games, Singularly perturbed systems, Lyapunov iterations, Recursive algorithm

1. はじめに

線形2次ナッシュゲームに関するさまざまな研究報告がある[1)〜4)]. Starr ら[1)]は線形2次ナッシュゲームに対してナッシュ均衡解を導出している. Limebeer ら[2)]は, H_2/H_∞ 制御問題の制御則の導出にナッシュゲームの理論を利用している. Li ら[3)]は, ナッシュ均衡解を得るための連立型リカッチ方程式の再帰的数値解法をリアプノフ型再帰的数値解法 (Lyapunov Iterations) を利用して導出している. Freiling ら[4)]は, リカッチ型再帰的数値解法 (Riccati Iterations) を利用して連立型リカッチ方程式の解を求めている.

ここで, 特徴的なことは, いずれの文献の問題も均衡解を得るために, 連立型リカッチ方程式を解かなければならないことである. 特に, 問題の対象であるシステムが特異摂動システムである場合, 摂動項 ε の影響によりシステムの次数が高次元となり, それに伴い連立型リカッチ方程式を解くことは計算機の物理的容量の限界から大変困難となる. この困難を回避するために, Khalil ら[5)]は, A_{22}^{-1} が存在する標準特異摂動システムに対して特異摂動法を利用した線形2次ナッシュゲームの合成ナッシュ均衡解を提案している. Xu ら[6)]は同様な問題を対象に, A_{22}^{-1} が存在しない非標準特異摂動システムに対して, ディスクリプタシステムの手法を利用した線形2次ナッシュゲームの合成ナッシュ均衡解を提案している. しかし, これらの文献の結果では, ナッシュ均衡解 (4) を入力したときの評価関数 (2) の値 $J_i, (i=1,\ 2)$ と, 文献5),6) の中で示されている合成ナッシュ均衡解を入力したときの評価関数 (2) の値 $\bar{J}_i, (i=1,\ 2)$ に対していずれの文献も $\bar{J}_i = J_i + O(\varepsilon), (i=1,\ 2)$ の近似しか達成されない.

通常, 特異摂動システムにおいて, 合成制御則[10),11)]を構築する以外の設計手法に再帰的アルゴリズムを利用した設計手法が存在する[7)〜9),12)〜16)]. 例えば, LQR 問題や LQG 問題に関して, Gajic らは文献7)〜9) の中で標準特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムを提案した. 後に, 文献12), 13) では同じ制御問題を対象に, 標準, 非標準特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムを提案した. さらに, 文献14)〜16) では H_∞ 制御問題を対象に, 標準, 非標準特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムを導出した. 一方, 線形2次ナッシュゲーム問題に焦点をしぼれば弱結合システム (Weakly Coupled System) に対する再帰的アルゴリズムは Gajic ら[7)〜9)]によって研究されている. しかし, Gajic らと同様, 著者らも含め, 特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムの研究は現在のところ行われていない.

本論文では, 従来扱われていなかった特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームのためのナッシュ均衡解を得るための再帰的アルゴリズムを導出する. 弱結合システムにおける線形2次ナッシュゲーム[7)〜9)]の場合, システムの特徴から, 再帰的アルゴリズムが直接的に適用可能である. そこで自然な考えとして, 特異摂動システムに関する線

* 広島市立大学情報科学部　広島市安佐南区大塚東 3-4-1
* Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University, Ozuka-Higasi, Asaminami-ku, Hiroshima city, 3-4-1
(Received July 9, 1998)
(Revised February 24, 1999)

形2次ナッシュゲームのナッシュ均衡解を再帰的アルゴリズム[7)～9),12)～16)]によって構築することが考えられる．しかし，文献7),8),9) などで研究されている弱結合システムにおける線形2次ナッシュゲームのための再帰的アルゴリズムを同様な手順によって，特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームにそのまま適用することはできない．この原因は，偏差を求めるための方程式が変数分離できないことに起因する．したがって，再帰的アルゴリズムの収束解の唯一性を証明するための Jacobi 行列の非特異性が，弱結合システムの場合と異なり，簡単に証明できない．さらに，偏差を文献7),8),9) のように独立して求めることができない．また，文献12)～16) で提案されている非標準特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムも，対象とするリカッチ方程式が線形2次ナッシュゲームで扱われる連立型リカッチ方程式とは根本的に異なるために適用することができない．そこで，本論文では，先に説明した特異摂動システムに対するナッシュ均衡解を得るための数値計算および証明の困難さを Li ら[3)] によって提案された連立型リカッチ方程式のためのリアプノフ型再帰的数値解法 (Lyapunov Iterations)[3),9)] 及び Gajic らによって提案された再帰的アルゴリズム (Recursive Algorithm)[7)～9)] を融合することによって克服する．この2つのアルゴリズムを融合するアイディアは，3つの文献7),8),9) のいずれにもない．さらに，本論文で提案された手法は，標準，非標準特異摂動システムのいずれにも適用できる．

本論文では，導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために簡単な数値例を示す．この数値例によって，ε が十分小さくても，連立型リカッチ方程式に対して高精度の収束解が得られることを検証する．

2. 問題設定

この章では，まず，線形2次ナッシュゲームとそのナッシュ均衡解を得るための連立型リカッチ方程式を紹介する．次に，Li ら[3)] によって提案されたナッシュ均衡解を得るための連立型リカッチ方程式に対するリアプノフ型再帰的数値解法の概要を説明する．

2.1 線形2次ナッシュゲーム

システムに摂動項を含む状態空間において，以下のような線形時不変特異摂動システムを考える[5),6)]．

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_{11}u_1 + B_{12}u_2,\ x(0) = x_0 \tag{1a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_{21}u_1 + B_{22}u_2,\ z(0) = z_0 \tag{1b}$$

このシステムに対する2次評価関数は (2) である．

$$J_i = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y^TQ_iy + u_i^TR_{ii}u_i + u_j^TR_{ij}u_j)dt \tag{2}$$
$$(i, j = 1, 2,\ i \neq j)$$

ただし，

$$y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix},\ \ Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i11} & Q_{i12} \\ Q_{i12}^T & Q_{i22} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$R_{ii} > 0,\ \ R_{ij} \geq 0$$

である．ここで，システム (1) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ．$x(t)$，$z(t)$，$y(t)$ はそれぞれ $x(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$，$z(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$，$y(t) \in \mathbf{R}^{n_1+n_2}$ である状態ベクトル．$u_i(t)$，$(i = 1,\ 2)$ はそれぞれ $u_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i} (i = 1, 2)$ であるプレーヤ1とプレーヤ2の制御入力である．また，各係数行列は適当な次元をもつと仮定する．ここで，システム (1) において，A_{22} が特異である，つまり，A_{22}^{-1} が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ．

ナッシュ均衡解はすべての許容制御入力 u_i，$(i = 1, 2)$ に対して

$$J_i(u_i^*,\ u_j^*) \leq J_i(u_i,\ u_j^*),\ \ (i,\ j = 1, 2,\ \ i \neq j) \tag{3}$$

を満たす対 $(u_1^*,\ u_2^*)$ のことである．このナッシュ均衡解を与える前に，以下の行列を定義する．

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{i\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ \varepsilon^{-1}B_{2i} \end{bmatrix},\ B_i = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{bmatrix}$$

$$S_{i\varepsilon} = B_{i\varepsilon}R_{ii}^{-1}B_{i\varepsilon}^T,\ G_{j\varepsilon} = B_{j\varepsilon}R_{jj}^{-1}R_{ij}R_{jj}^{-1}B_{j\varepsilon}^T$$

$$S_i = B_iR_{ii}^{-1}B_i^T = \begin{bmatrix} S_{11i} & S_{12i} \\ S_{12i}^T & S_{22i} \end{bmatrix}$$

$$G_j = B_jR_{jj}^{-1}R_{ij}R_{jj}^{-1}B_j^T = \begin{bmatrix} G_{11j} & G_{12j} \\ G_{12j}^T & G_{22j} \end{bmatrix}$$
$$(i,\ j = 1, 2,\ \ i \neq j)$$

さらに，本論文で扱われている非標準特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームの均衡解の存在性に関して基本的な仮定を導入する[3)～9)]．

[仮定1] 行列対 $(A_\varepsilon, B_{1\varepsilon})$，$(A_\varepsilon, B_{2\varepsilon})$ はともに可安定であり，また同時に行列対 $(A_\varepsilon, \sqrt{Q_1})$，$(A_\varepsilon, \sqrt{Q_2})$ は可検出である摂動項 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$ が存在する．

以上から，ナッシュ均衡解は以下によって与えられる[3)～9)]．

[補題1] 特異摂動システム (1) に対して，(3) を満たす戦略対 $(u_1^*,\ u_2^*)$ は

$$u_1^*(t) = -R_{11}^{-1}B_{1\varepsilon}^TX_\varepsilon y(t) \tag{4a}$$

$$u_2^*(t) = -R_{22}^{-1}B_{2\varepsilon}^TY_\varepsilon y(t) \tag{4b}$$

によって与えられる．ここで，X_ε，Y_ε は以下の連立型リカッチ方程式 (5) の唯一の準正定対称安定化解である．

$$A_\varepsilon^TX_\varepsilon + X_\varepsilon A_\varepsilon + Q_1 - X_\varepsilon S_{1\varepsilon}X_\varepsilon - X_\varepsilon S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon - Y_\varepsilon S_{2\varepsilon}X_\varepsilon + Y_\varepsilon G_{2\varepsilon}Y_\varepsilon = 0 \tag{5a}$$

$$A_\varepsilon^TY_\varepsilon + Y_\varepsilon A_\varepsilon + Q_2 - Y_\varepsilon S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon - Y_\varepsilon S_{1\varepsilon}X_\varepsilon - X_\varepsilon S_{1\varepsilon}Y_\varepsilon + X_\varepsilon G_{1\varepsilon}X_\varepsilon = 0 \tag{5b}$$

ただし,

$$X_\varepsilon = \begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ \varepsilon X_{21} & \varepsilon X_{22} \end{bmatrix},\ Y_\varepsilon = \begin{bmatrix} Y_{11} & \varepsilon Y_{21}^T \\ \varepsilon Y_{21} & \varepsilon Y_{22} \end{bmatrix}$$

補題1からナッシュ均衡解を求めるためには, 連立型リカッチ方程式(5)を解けば良い. しかし, 微小パラメータεを含むために係数行列の高次元化, ならびに各ブロック行列間の数値的オーダの違い, 及び計算機の物理的容量から直接, 連立型リカッチ方程式(5)の解を得ることは大変困難である. Khalilら[5]及びXuら[6]は, このような困難を克服するためにεに依存しない合成ナッシュ均衡解を導出した. しかし, ナッシュ均衡解(4)を入力したときの評価関数(2)の値$J_i, (i=1,\ 2)$と, 合成ナッシュ均衡解を入力したときの評価関数(2)の値$\bar{J}_i, (i=1,\ 2)$には$\bar{J}_i = J_i + O(\varepsilon), (i=1,\ 2)$である関係が成立し, その結果, $O(\varepsilon)$の近似精度しか達成されないのが難点である. そこで, 直接的に再帰的アルゴリズム[7)〜9),12)〜16)]を利用して解を求める方法が考えられる. ところが, 本論文で扱われている特異摂動システムにおける線形2次ナッシュゲームの問題では, Gajicら[7)〜9)]が扱っている弱結合システムにおける線形2次ナッシュゲームの問題と比較して方程式の解の分離は容易ではない. そこで, 本論文では, Liらによって提案された連立型リカッチ方程式のためのリアプノフ型再帰的数値解法[3]及びGajicらによって提案された再帰的アルゴリズム[7)〜9)]を融合することによって特異摂動システムにおける連立型リカッチ方程式の解を求める手法を提案する. 解を得るための基本的な手順は以下である. まず, Liら[3]によって提案されたナッシュ均衡解を得るための連立型リカッチ方程式のリアプノフ型再帰的数値解法を利用して, 疑似的に連立型リカッチ方程式(5)の解を分離する. 次に, 疑似的に分離された2つのリアプノフ方程式のそれぞれに再帰的アルゴリズムを利用してk回の繰り返し計算を行うことによって$O(\varepsilon^{k+1})$の高精度の解を求める.

2.2 Lyapunov Iterations

この節では, 連立型リカッチ方程式(5)を解くためのリアプノフ型再帰的数値解法を研究する. 仮定1の条件のもと, 連立型リカッチ方程式(5)の解を得るためのアルゴリズムがLiら[3]によって以下の(6)のように提案されている.

[アルゴリズム]

$$\begin{aligned}&(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} - S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)})^T X_\varepsilon^{(n+1)} \\ &\quad + X_\varepsilon^{(n+1)}(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} - S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)}) \\ &\quad + Q_1 + X_\varepsilon^{(n)}S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} + Y_\varepsilon^{(n)}G_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)} = 0 \qquad (6a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} - S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)})^T Y_\varepsilon^{(n+1)} \\ &\quad + Y_\varepsilon^{(n+1)}(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} - S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)}) \\ &\quad + Q_2 + X_\varepsilon^{(n)}G_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(n)} + Y_\varepsilon^{(n)}S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(n)} = 0 \qquad (6b) \\ &\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots)\end{aligned}$$

ただし, 初期条件$X_\varepsilon^{(0)}$, $Y_\varepsilon^{(0)}$は以下の(7)式で与えられる準正定対称安定化解である.

$$A_\varepsilon^T X_\varepsilon^{(0)} + X_\varepsilon^{(0)}A_\varepsilon + Q_1 - X_\varepsilon^{(0)}S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(0)} = 0 \qquad (7a)$$

$$\begin{aligned}&(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(0)})^T Y_\varepsilon^{(0)} + Y_\varepsilon^{(0)}(A_\varepsilon - S_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(0)}) \\ &\quad Q_2 + X_\varepsilon^{(0)}G_{1\varepsilon}X_\varepsilon^{(0)} - Y_\varepsilon^{(0)}S_{2\varepsilon}Y_\varepsilon^{(0)} = 0 \qquad (7b)\end{aligned}$$

ここで, $X_\varepsilon^{(n)}$, $Y_\varepsilon^{(n)}$の構造は以下で与えられる.

$$X_\varepsilon^{(n)} = \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \varepsilon X_{21}^{(n)T} \\ \varepsilon X_{21}^{(n)} & \varepsilon X_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$Y_\varepsilon^{(n)} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{(n)} & \varepsilon Y_{21}^{(n)T} \\ \varepsilon Y_{21}^{(n)} & \varepsilon Y_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

(注意1)　Freilingら[4]が研究しているナッシュゲーム問題には, 非線形方程式であるリカッチ方程式を利用したリカッチ型再帰的数値解法が使用されている. しかし, 収束性の証明は現在のところ行われていない. さらに, リカッチ型再帰的数値解法を利用した場合, 再帰的アルゴリズムの導出が複雑となる. 一方, 本論文では, 同じナッシュゲーム問題に対して, Liら[3]によって収束性が保障されている線形方程式であるリアプノフ方程式を利用したリアプノフ型再帰的数値解法を使用している. その結果, 再帰的アルゴリズムの導出が簡単になる.

(注意2)　本論文では, 線形2次ナッシュゲームに関する連立型リカッチ方程式に対して, 従来の文献で提案されている解析的に未知の行列を分離して解く手法[7)〜9)]と異なり, 解を求める初期段階に疑似的な2つのリアプノフ方程式に分離して解を求めることが大きな特徴である. もう少し詳しく説明すると, 従来の文献[7)〜9)]では対象としているシステムが弱結合システムであり, 特異摂動システムと異なり, 摂動項の存在する場所の違いから計算の途中段階で偏差の方程式が自動的に分離される. 一方, 本論文では特異摂動システムを扱っているため計算の途中段階で偏差の方程式が自動的に分離されることはない. そこで, 本論文ではLiら[3]によって提案されたナッシュ均衡解を得るための連立型リカッチ方程式のリアプノフ型再帰的数値解法を利用することによって, 初期段階で$X_\varepsilon^{(n+1)}$, $Y_\varepsilon^{(n+1)}$について疑似的に独立な2つのリアプノフ方程式に分離する. その後, この2つに分離された方程式に対して再帰的アルゴリズムを導出する. 以上の2つのアルゴリズムを融合するアイディアは従来の文献[7)〜9)]になく, 本論文の大きな特徴となっている.

リアプノフ方程式(6)を一般化リアプノフ方程式(8)に変換する以下の補題を紹介する.

[補題2]　リアプノフ方程式(6)を解くことは, 以下の一般化リアプノフ方程式(8)を解くことに等価である.

$$\begin{aligned}&(A - S_1X^{(n)} - S_2Y^{(n)})^T X^{(n+1)} \\ &\quad + X^{(n+1)T}(A - S_1X^{(n)} - S_2Y^{(n)}) \\ &\quad + Q_1 + X^{(n)T}S_1X^{(n)} + Y^{(n)T}G_2Y^{(n)} = 0 \qquad (8a)\end{aligned}$$

$$(A-S_1X^{(n)}-S_2Y^{(n)})^TY^{(n+1)}$$
$$+Y^{(n+1)T}(A-S_1X^{(n)}-S_2Y^{(n)})$$
$$+Q_2+X^{(n)T}G_1X^{(n)}+Y^{(n)T}S_2Y^{(n)}=0 \qquad (8b)$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

ただし,

$$X^{(n)}=\begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \varepsilon X_{21}^{(n)T} \\ X_{21}^{(n)} & X_{22}^{(n)} \end{bmatrix},\ X_{\varepsilon}^{(n)}=\Pi_{\varepsilon}^TX^{(n)}$$
$$Y^{(n)}=\begin{bmatrix} Y_{11}^{(n)} & \varepsilon Y_{21}^{(n)T} \\ Y_{21}^{(n)} & Y_{22}^{(n)} \end{bmatrix},\ Y_{\varepsilon}^{(n)}=\Pi_{\varepsilon}^TY^{(n)}$$
$$\Pi_{\varepsilon}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix}$$

(証明 1) 簡単な代数計算によって証明できるので省略する. □

3. 再帰的アルゴリズム

この章では, 疑似的に分離された 2 つの一般化リアプノフ方程式 (8) のための再帰的アルゴリズムをそれぞれ導出する. まず, 以下の行列を定義する.

$$A-S_1X^{(n)}-S_2Y^{(n)}=\bar{A}^{(n)}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^{(n)} & \bar{A}_{12}^{(n)} \\ \bar{A}_{21}^{(n)} & \bar{A}_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$
$$Q_1+X^{(n)T}S_1X^{(n)}+Y^{(n)T}G_2Y^{(n)}=\bar{Q}^{(n)}$$
$$=\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(n)} & \bar{Q}_{12}^{(n)} \\ \bar{Q}_{12}^{(n)T} & \bar{Q}_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$
$$Q_2+X^{(n)T}G_1X^{(n)}+Y^{(n)T}S_2Y^{(n)}=\hat{Q}^{(n)}$$
$$=\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11}^{(n)} & \hat{Q}_{12}^{(n)} \\ \hat{Q}_{12}^{(n)T} & \hat{Q}_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

したがって, 一般化リアプノフ方程式 (8) は以下の 2 つの一般化リアプノフ方程式 (9) になる.

$$\bar{A}^{(n)T}X^{(n+1)}+X^{(n+1)T}\bar{A}^{(n)}+\bar{Q}^{(n)}=0 \qquad (9a)$$
$$\bar{A}^{(n)T}Y^{(n+1)}+Y^{(n+1)T}\bar{A}^{(n)}+\hat{Q}^{(n)}=0 \qquad (9b)$$

次の節では, 一般化リアプノフ方程式 (9) について再帰的アルゴリズムをそれぞれ導出する.

3.1 $X^{(n+1)}$ のための再帰的アルゴリズム

一般化リアプノフ方程式 (9a) をブロックごとに計算する.

$$\bar{A}_{11}^{(n)T}X_{11}^{(n+1)}+X_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_{11}^{(n)}+\bar{A}_{21}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)}$$
$$+X_{21}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+\bar{Q}_{11}^{(n)}=0 \qquad (10a)$$
$$\varepsilon X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}+X_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}X_{11}^{(n+1)}$$
$$+\bar{A}_{22}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)}+\bar{Q}_{12}^{(n)T}=0 \qquad (10b)$$
$$\bar{A}_{22}^{(n)T}X_{22}^{(n+1)}+X_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\varepsilon\bar{A}_{12}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)T}$$
$$+\varepsilon X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{12}^{(n)}+\bar{Q}_{22}^{(n)}=0 \qquad (10c)$$

ブロックごとに計算された方程式 (10) において, 解 $X_{11}^{(n+1)}$, $X_{21}^{(n+1)}$, $X_{22}^{(n+1)}$ に対する $O(\varepsilon)$ の摂動を摂動方程式 (11) で定義する. ここで, 方程式 (10) の $O(\varepsilon)$ の摂動方程式の解を $\bar{X}_{11}^{(n+1)}$, $\bar{X}_{21}^{(n+1)}$, $\bar{X}_{22}^{(n+1)}$ とおく.

$$\bar{A}_{11}^{(n)T}\bar{X}_{11}^{(n+1)}+\bar{X}_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_{11}^{(n)}+\bar{A}_{21}^{(n)T}\bar{X}_{21}^{(n+1)}$$
$$+\bar{X}_{21}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+\bar{Q}_{11}^{(n)}=0 \qquad (11a)$$
$$\bar{X}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}\bar{X}_{11}^{(n+1)}+\bar{A}_{22}^{(n)T}\bar{X}_{21}^{(n+1)}$$
$$+\bar{Q}_{12}^{(n)T}=0 \qquad (11b)$$
$$\bar{A}_{22}^{(n)T}\bar{X}_{22}^{(n+1)}+\bar{X}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{Q}_{22}^{(n)}=0 \qquad (11c)$$

(注意 3) 摂動方程式 (11) は, 方程式 (10) に含まれている ε をすべて $\varepsilon=0$ として得られた方程式ではないことに注意を要する [7]. 詳しく説明すれば, 行列 $\bar{A}_{ij}^{(n)}$, $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ の中には ε を含んでいる. しかし, これらの ε に対しては $\varepsilon=0$ としない. これは, ε が十分小さいとき直接 $X^{(n+1)}$ の項に ε が掛けてある項以外は解 $X^{(n+1)}$ の有効桁数の範囲に直接影響しないためである. すなわち, $\bar{A}_{ij}^{(n)}$, $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ は ε を含んでいるが, ε が十分小さければ $X^{(n+1)}$ の解のオーダ (有効桁数の範囲) には直接影響しないためである. したがって, $\bar{A}_{ij}^{(n)}$, $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ $(i,\ j=1,\ 2)$ の ε に与えられた値を代入してリアプノフ方程式 (9a) の解 $X^{(n+1)}$ を求める. 実際には, 例えば ε が十分小さいとき, 以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{22}^{(n)} &= A_{22}-\varepsilon S_{121}^TX_{21}^{(n)T}-S_{221}X_{22}^{(n)} \\ &\quad -\varepsilon S_{122}^TY_{21}^{(n)T}-S_{222}Y_{22}^{(n)} \\ &\approx A_{22}-S_{221}X_{22}^{(n)}-S_{222}Y_{22}^{(n)}\end{aligned}$$

したがって係数行列 $\bar{A}_{ij}^{(n)}$, $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ のすべての ε に対して $\varepsilon=0$ としなくても有効数字の範囲で解 $X^{(n+1)}$ を求めることが可能である.

$[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}$ の存在を保障するために以下の仮定を導入する [5),6)].

[仮定 2] 行列対 (A_{22},B_{21}), (A_{22},B_{22}) はともに可安定であり, また同時に行列対 $(A_{22},\sqrt{Q_{122}})$, $(A_{22},\sqrt{Q_{222}})$ は可検出である.

仮定 2 から十分小さな ε に対し, すべての n において $[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}$ は存在するので [7)〜9)], 摂動方程式 (11) は以下の方程式 (12) に変形できる.

$$\bar{A}_{0}^{(n)T}\bar{X}_{11}^{(n+1)}+\bar{X}_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_{0}^{(n)}+\bar{Q}_{0}^{(n)}=0 \qquad (12a)$$
$$\bar{X}_{21}^{(n+1)}=-[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}(\bar{X}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}$$
$$+\bar{A}_{12}^{(n)T}\bar{X}_{11}^{(n+1)}+\bar{Q}_{12}^{(n)T}) \qquad (12b)$$
$$\bar{A}_{22}^{(n)T}\bar{X}_{22}^{(n+1)}+\bar{X}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{Q}_{22}^{(n)}=0 \qquad (12c)$$

ただし,

$$\bar{A}_{0}^{(n)}=\bar{A}_{11}^{(n)}-\bar{A}_{12}^{(n)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}$$
$$\bar{Q}_{0}^{(n)}=\bar{Q}_{11}^{(n)}-\bar{Q}_{12}^{(n)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}$$
$$-\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\bar{Q}_{12}^{(n)T}$$

$$+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\bar{Q}_{22}^{(n)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}$$

ここで, 方程式 (10) の解 $X_{11}^{(n+1)}$, $X_{21}^{(n+1)}$, $X_{22}^{(n+1)}$ は摂動方程式 (11) の解 $\bar{X}_{11}^{(n+1)}$, $\bar{X}_{21}^{(n+1)}$, $\bar{X}_{22}^{(n+1)}$ を利用して以下の (13) のように表現できる.

$$X_{ij}^{(n+1)}=\bar{X}_{ij}^{(n+1)}+\varepsilon E_{ij}^{(n+1)},\ (ij=11,21,22) \quad (13)$$

以上を方程式 (10) に代入する. $O(\varepsilon)$ の摂動方程式 (11) を用いて整理すれば方程式 (14) が得られる.

$$\begin{aligned}
&E_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}E_{11}^{(n+1)}\\
&\quad=-\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\bar{H}^{(n+1)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\qquad+\bar{A}_{11}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\qquad+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)} &(14\mathrm{a})\\
&E_{21}^{(n+1)}=-[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\cdot[\bar{A}_{12}^{(n)T}E_{11}^{(n+1)}\\
&\qquad+E_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}] &(14\mathrm{b})\\
&E_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{22}^{(n)T}E_{22}^{(n+1)}+\bar{H}^{(n+1)}=0 &(14\mathrm{c})
\end{aligned}$$

ただし,

$$\bar{H}^{(n+1)}=X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{12}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)T}$$

さらに差分化することによって偏差 $E_{ij}^{(n+1)}$ $(ij=11,21,22)$ についての以下の再帰的アルゴリズム (15) が導出される.

$$\begin{aligned}
&E_{11(k+1)}^{(n+1)T}\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}E_{11(k+1)}^{(n+1)}\\
&\quad=-\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\bar{H}_{(k)}^{(n+1)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\qquad+\bar{A}_{11}^{(n)T}X_{21(k)}^{(n+1)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\qquad+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}X_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)} &(15\mathrm{a})\\
&E_{21(k+1)}^{(n+1)}=-[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\cdot[\bar{A}_{12}^{(n)T}E_{11(k+1)}^{(n+1)}\\
&\qquad+E_{22(k+1)}^{(n+1)}\bar{A}_{21}^{(n)}+X_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}] &(15\mathrm{b})\\
&E_{22(k+1)}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}E_{22(k+1)}^{(n+1)}+\bar{H}_{(k)}^{(n+1)}=0 &(15\mathrm{c})\\
&\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\bar{H}_{(k)}^{(n+1)}=X_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{12}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}X_{21(k)}^{(n+1)T},\ E_{21(0)}^{(n+1)}=0$$
$$X_{ij(k)}^{(n+1)}=\bar{X}_{ij}^{(n+1)}+\varepsilon E_{ij(k)}^{(n+1)},\ (ij=11,21,22)$$

再帰的アルゴリズム (15) に対して以下の定理が得られる.

《定理 1》　仮定 1 及び仮定 2 が成立するとき, 十分小さな ε に対して, 再帰的アルゴリズム (15) は偏差 $E^{(n+1)}$ の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する. すなわち,

$$\|E^{(n+1)}-E_{(k)}^{(n+1)}\|=O(\varepsilon^k)\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots) \quad (16)$$

ただし

$$E^{(n+1)}=\begin{bmatrix} E_{11}^{(n+1)} & E_{21}^{(n+1)T}\\ E_{21}^{(n+1)} & E_{22}^{(n+1)}\end{bmatrix}$$
$$E_{(k)}^{(n+1)}=\begin{bmatrix} E_{11(k)}^{(n+1)} & E_{21(k)}^{(n+1)T}\\ E_{21(k)}^{(n+1)} & E_{22(k)}^{(n+1)}\end{bmatrix}$$

(証明 2)　まず, 方程式 (14) に関する $\varepsilon=0$ の近傍における唯一解 $E_{ij}^{(n+1)}$ $(ij=11,21,22)$ の存在は陰関数定理により証明できる[7)～9),12)～16)]. 陰関数定理を用いるために, 方程式 (14) に対するヤコビ行列を以下のように計算する.

$$J|_{\varepsilon=0}=\begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0\\ J_{21} & J_{22} & J_{23}\\ 0 & 0 & J_{33}\end{bmatrix} \quad (17)$$

ただし

$$\begin{aligned}
J_{11}&=I\otimes\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}\otimes I,\quad J_{22}=I\otimes\bar{A}_{22}^{(n)}\\
J_{33}&=I\otimes\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{22}^{(n)T}\otimes I\\
J_{m1}&=\frac{\partial L_m}{\partial E_{11}^{(n+1)}}|_{\varepsilon=0},\ J_{m2}=\frac{\partial L_m}{\partial E_{21}^{(n+1)}}|_{\varepsilon=0}\\
J_{m3}&=\frac{\partial L_m}{\partial E_{22}^{(n+1)}}|_{\varepsilon=0},\ (m=1,2,3)\\
L_1&=E_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}E_{11}^{(n+1)}\\
&\quad+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\bar{H}^{(n+1)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\quad-\bar{A}_{11}^{(n)T}X_{21}^{(n+1)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\
&\quad-\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}\\
L_2&=\bar{A}_{22}^{(n)T}E_{21}^{(n+1)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}E_{11}^{(n+1)}\\
&\quad+E_{22}^{(n+1)}\bar{A}_{21}^{(n)}+X_{21}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}\\
L_3&=E_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}E_{22}^{(n+1)}+\bar{H}^{(n+1)}
\end{aligned}$$

式 (17) の記号 $\otimes$ はクロネッカ積である. ここで, 仮定 1 及び仮定 2 から $\bar{A}_{22}^{(n)}$, $\bar{A}_0^{(n)}$ はすべての n に対して安定である[3),9)]. 以上より, ヤコビ行列が非特異であるから, 陰関数定理を適用して方程式 (14) に対する唯一解 $E_{ij}^{(n+1)}$ の存在が証明される.

続いて, 再帰的アルゴリズム (15) の収束性の証明を行う. 再帰的アルゴリズム (15) に対して $k=0$ とおき, 方程式 (14) との差をとる.

$$\begin{aligned}
&(E_{11}^{(n+1)}-E_{11(1)}^{(n+1)})\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}(E_{11}^{(n+1)}-E_{11(1)}^{(n+1)})\\
&\qquad=\varepsilon\mathcal{F}_1(E_{21}^{(n+1)}-E_{21(0)}^{(n+1)}) &(18\mathrm{a})\\
&(E_{21}^{(n+1)}-E_{21(1)}^{(n+1)})^T\bar{A}_{22}^{(n)}\\
&\qquad=\varepsilon\mathcal{F}_2(E_{21}^{(n+1)}-E_{21(0)}^{(n+1)}) &(18\mathrm{b})\\
&(E_{22}^{(n+1)}-E_{22(1)}^{(n+1)})\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{22}^{(n)T}(E_{22}^{(n+1)}-E_{22(1)}^{(n+1)})\\
&\qquad=\varepsilon\mathcal{F}_3(E_{21}^{(n+1)}-E_{21(0)}^{(n+1)}) &(18\mathrm{c})
\end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ は, $E_{21}^{(n+1)}-E_{21(0)}^{(n+1)}$ の関数である. $\bar{A}_{22}^{(n)}$, $\bar{A}_0^{(n)}$ はすべての n に対して安定行列なので[3),9)],

$$\|E_{ij}^{(n+1)}-E_{ij(1)}^{(n+1)}\|=O(\varepsilon),\ (ij=11,21,22) \quad (19)$$

となる. この操作を帰納的に $k=1,\ 2,\ 3,\cdots,k_0$ と続ければ, $E_{21(0)}^{(n+1)}=0$ 及び差分式 (18b) を考慮して

$$\|E_{ij}^{(n+1)}-E_{ij(k_0)}^{(n+1)}\|=O(\varepsilon^{k_0}),\ (ij=11,21,22) \quad (20)$$

が得られる. したがって, 初期値 $E_{21(0)}^{(n+1)}=0$ に対して, ε が十分小さいなら再帰的アルゴリズム (15) は収束する. また, その収束解は $E_{11}^{(n+1)}$, $E_{21}^{(n+1)}$, $E_{22}^{(n+1)}$ である.　□

3.2 $Y^{(n+1)}$ のための再帰的アルゴリズム

一般化リアプノフ方程式 (9b) のための再帰的アルゴリズムを導出する．前節と同様にして, 一般化リアプノフ方程式 (9b) から以下の $O(\varepsilon)$ の摂動方程式 (21) 及び再帰的アルゴリズム (22) が得られる．

$$\bar{A}_0^{(n)T}\bar{Y}_{11}^{(n+1)}+\bar{Y}_{11}^{(n+1)T}\bar{A}_0^{(n)}+\hat{Q}_0^{(n)}=0 \tag{21a}$$

$$\bar{Y}_{21}^{(n+1)}=-[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}(\bar{Y}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{21}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}\bar{Y}_{11}^{(n+1)}+\hat{Q}_{12}^{(n)T}) \tag{21b}$$

$$\bar{A}_{22}^{(n)T}\bar{Y}_{22}^{(n+1)}+\bar{Y}_{22}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\hat{Q}_{22}^{(n)}=0 \tag{21c}$$

$$\begin{aligned}F_{11(k+1)}^{(n+1)T}\bar{A}_0^{(n)}+\bar{A}_0^{(n)T}F_{11(k+1)}^{(n+1)} &= -\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\hat{H}_{(k)}^{(n+1)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\&\quad+\bar{A}_{11}^{(n)T}Y_{21(k)}^{(n+1)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\&\quad+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}Y_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}\end{aligned} \tag{22a}$$

$$F_{21(k+1)}^{(n+1)}=-[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\cdot[\bar{A}_{12}^{(n)T}F_{11(k+1)}^{(n+1)}+F_{22(k+1)}^{(n+1)}\bar{A}_{21}^{(n)}+Y_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{11}^{(n)}] \tag{22b}$$

$$F_{22(k+1)}^{(n+1)T}\bar{A}_{22}^{(n)}+\bar{A}_{22}^{(n)T}F_{22(k+1)}^{(n+1)}+\hat{H}_{(k)}^{(n+1)}=0 \tag{22c}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{Q}_0^{(n)}&=\hat{Q}_{11}^{(n)}-\hat{Q}_{12}^{(n)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\\&\quad-\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\hat{Q}_{12}^{(n)T}\\&\quad+\bar{A}_{21}^{(n)T}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-T}\hat{Q}_{22}^{(n)}[\bar{A}_{22}^{(n)}]^{-1}\bar{A}_{21}^{(n)}\end{aligned}$$

$$\hat{H}_{(k)}^{(n+1)}=Y_{21(k)}^{(n+1)}\bar{A}_{12}^{(n)}+\bar{A}_{12}^{(n)T}Y_{21(k)}^{(n+1)T},\ F_{21(0)}^{(n+1)}=0$$

$$Y_{ij(k)}^{(n+1)}=\bar{Y}_{ij}^{(n+1)}+\varepsilon F_{ij(k)}^{(n+1)},\ (ij=11,21,22)$$

再帰的アルゴリズム (22) に対して, 以下の定理が得られる．

《定理 2》 仮定 1 及び仮定 2 が成立するとき, 十分小さな ε に対して, 再帰的アルゴリズム (22) は偏差 $F^{(n+1)}$ の正確な値に $O(\varepsilon^k)$ の高精度で収束する．すなわち,

$$\|F^{(n+1)}-F_{(k)}^{(n+1)}\|=O(\varepsilon^k)\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots) \tag{23}$$

ただし

$$F^{(n+1)}=\begin{bmatrix}F_{11}^{(n+1)} & F_{21}^{(n+1)T}\\ F_{21}^{(n+1)} & F_{22}^{(n+1)}\end{bmatrix}$$

$$F_{(k)}^{(n+1)}=\begin{bmatrix}F_{11(k)}^{(n+1)} & F_{21(k)}^{(n+1)T}\\ F_{21(k)}^{(n+1)} & F_{22(k)}^{(n+1)}\end{bmatrix}$$

$$Y_{ij}^{(n+1)}=\bar{Y}_{ij}^{(n+1)}+\varepsilon F_{ij}^{(n+1)},\ (ij=11,21,22)$$

(証明 3) 定理 1 と同様に陰関数定理によって証明できるので省略する． □

定理 1 と定理 2 から評価関数 (2) に関して以下の系を得ることができる．

［系 1］ 十分大きなリアプノフ型数値解法の繰り返し計算回数 n に対して, 再帰的アルゴリズム (15) 及び (22) を並列に k 回繰り返し計算して得られた解をそれぞれ $X_{\varepsilon(k)}^{(n)}$, $Y_{\varepsilon(k)}^{(n)}$ とする．これらの解によって得られた以下の高精度なナッシュ均衡解 (24) を特異摂動システム (1) に入力したときの評価関数の値を $\hat{J}_i,(i=1,\ 2)$ と定義する．

$$u_1^c(t)=-R_{11}^{-1}B_{1\varepsilon}^TX_{\varepsilon(k)}^{(n)}y(t) \tag{24a}$$

$$u_2^c(t)=-R_{22}^{-1}B_{2\varepsilon}^TY_{\varepsilon(k)}^{(n)}y(t) \tag{24b}$$

また, ナッシュ均衡解 (4) を特異摂動システム (1) に入力したときの評価関数の値を $J_i,(i=1,\ 2)$ と定義する．このとき, 以下の関係式 (25) が成立する．

$$\hat{J}_i=J_i+O(\varepsilon^{k+1}),\ \ (i=1,\ 2) \tag{25}$$

(証明 4) まず, 十分大きな n に対して, Li ら[3] の結果を利用すれば $X_\varepsilon^{(n)}$ 及び $Y_\varepsilon^{(n)}$ はそれぞれ連立型リカッチ方程式 (5) を満たす．さらに, 再帰的アルゴリズムを k 回繰り返して得られた解 $X_{\varepsilon(k)}^{(n)}$ 及び $Y_{\varepsilon(k)}^{(n)}$ は連立型リカッチ方程式 (5) の解 X_ε 及び Y_ε に対して,

$$\|X_\varepsilon-X_{\varepsilon(k)}^{(n)}\|=O(\varepsilon^{k+1}),\ \|Y_\varepsilon-Y_{\varepsilon(k)}^{(n)}\|=O(\varepsilon^{k+1})$$

を満足する．証明の後半は, Xu ら[6),11)] と同様に陰関数定理によって証明することができる． □

文献5),6) で提案された合成ナッシュ均衡解をそれぞれ標準, 非標準特異摂動システムに入力したときの評価関数の値 $\bar{J}_i,(i=1,\ 2)$ に関して $\bar{J}_i=J_i+O(\varepsilon),(i=1,\ 2)$ が成立する．したがって, 関係式 (25) から, 本論文で得られた高精度なナッシュ均衡解 (24) を利用したほうが評価関数の値に対して劣化が少ないことが分かる．

4. 数値例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し, 解を求める．システム (1) における各係数行列を仮定 1 及び仮定 2 が成立するようにランダムに与える．ただし, $\varepsilon=1.0\times10^{-4}$ である．

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0 & 0.4\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.345 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0 & -0.524\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0.262\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$B_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}0.2\\ 1\end{bmatrix}$$

また, 2 次評価関数は以下で与えられる．

$$J_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty(y^TQ_1y+u_1^2+2u_2^2)dt \tag{26a}$$

$$J_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty(y^TQ_2y+2u_1^2+u_2^2)dt \tag{26b}$$

ただし, $Q_1=\mathrm{diag}\{1,\ 0,\ 1,\ 0\}$, $Q_2=\mathrm{diag}\{0,\ 0,\ 1,\ 1\}$.

Table 1　Initial values of $X_\varepsilon^{(0)}$, $Y_\varepsilon^{(0)}$ with $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$.

$$X_\varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} 6.28449323 & 2.89877152 & 4.71190863 \times 10^{-4} & 9.99999950 \times 10^{-4} \\ 2.89877152 & 7.28636943 & 2.21089120 \times 10^{-4} & 4.47571105 \times 10^{-6} \\ 4.71190863 \times 10^{-4} & 2.21089120 \times 10^{-4} & 4.71226223 \times 10^{-4} & 1.00007622 \times 10^{-4} \\ 9.99999950 \times 10^{-4} & 4.47571105 \times 10^{-6} & 1.00007622 \times 10^{-4} & 2.34520123 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$Y_\varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} 5.15115389 & 1.30681124 & 3.84208016 \times 10^{-4} & 3.61568014 \times 10^{-5} \\ 1.30681124 & 7.76793757 & 9.84286146 \times 10^{-5} & -4.78419976 \times 10^{-6} \\ 3.84208016 \times 10^{-4} & 9.84286146 \times 10^{-5} & 4.92716548 \times 10^{-4} & 4.58164327 \times 10^{-5} \\ 3.61568014 \times 10^{-5} & -4.78419976 \times 10^{-6} & 4.58164327 \times 10^{-5} & 4.34631603 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Table 2　Convergence values of $X_{\varepsilon(k)}^{(n)}$, $Y_{\varepsilon(k)}^{(n)}$ with $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$.

$$X_{\varepsilon(3)}^{(27)} = \begin{bmatrix} 5.37350836 & 3.64235743 & 3.38456482 \times 10^{-4} & 5.26017155 \times 10^{-5} \\ 3.64235743 & 7.00257307 & 2.70604555 \times 10^{-4} & 4.87532009 \times 10^{-6} \\ 3.38456482 \times 10^{-4} & 2.70604555 \times 10^{-4} & 3.29578663 \times 10^{-4} & 7.53139480 \times 10^{-5} \\ 5.26017155 \times 10^{-5} & 4.87532009 \times 10^{-6} & 7.53139480 \times 10^{-5} & 2.33767437 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$Y_{\varepsilon(3)}^{(27)} = \begin{bmatrix} 2.52792447 & 8.57517325 \times 10^{-1} & 1.98610038 \times 10^{-4} & 1.93889118 \times 10^{-5} \\ 8.57517325 \times 10^{-1} & 6.33142038 & 6.59499184 \times 10^{-5} & -5.87907423 \times 10^{-6} \\ 1.98610038 \times 10^{-4} & 6.59499184 \times 10^{-5} & 4.18347288 \times 10^{-4} & 4.00642821 \times 10^{-5} \\ 1.93889118 \times 10^{-5} & -5.87907423 \times 10^{-6} & 4.00642821 \times 10^{-5} & 4.29415039 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

特異摂動システム (1b) における係数行列 A_{22} の行列式 $\det A_{22}$ は, $\det A_{22} = 0$ なので非標準特異摂動システムである．したがって, 本論文の数値例は Khalil ら[5] の結果が適用できないことに注意しなければならない．

まず, 初期値を与えるリカッチ方程式 (7) の解 $X_\varepsilon^{(0)}$, $Y_\varepsilon^{(0)}$ は文献12), 13) を利用して **Table 1** のように計算される．本論文の手法を利用することによって, $n = 27$ 回のリアプノフ型再帰的数値解法の繰り返し計算によって収束解を得ることができた．このとき, $n = 27$ 回での再帰的アルゴリズム (15), (22) の繰り返し計算回数はともに $k = 3$ 回である．収束後の連立型リカッチ方程式 (5) の解は **Table 2** に与えられる．ここで, 本論文で使用したリアプノフ型再帰的数値解法の収束判定は

$$A^T X + X^T A + Q_1 - X^T S_1 X - X^T S_2 Y - Y^T S_2 X + Y^T G_2 Y \equiv F_1(X,\ Y) \tag{27a}$$

$$A^T Y + Y^T A + Q_2 - Y^T S_2 Y - Y^T S_1 X - X^T S_1 Y + X^T G_1 X \equiv F_2(X,\ Y) \tag{27b}$$

と定義したとき,

$$\max\{\|F_1(X_{(k)}^{(n)},\ Y_{(k)}^{(n)})\|,\ \|F_2(X_{(k)}^{(n)},\ Y_{(k)}^{(n)})\|\} < 10^{-6}$$

とした．また, 再帰的アルゴリズムの収束判定は

$$\max\{\|X_{(k)}^{(n)} - X_{(k-1)}^{(n)}\|,\ \|Y_{(k)}^{(n)} - Y_{(k-1)}^{(n)}\|\} < 10^{-8}$$

とした．ただし, 行列 $X_{(k)}^{(n)}$, $Y_{(k)}^{(n)}$ は以下で与えられる．

$$X_{(k)}^{(n)} = \begin{bmatrix} X_{11(k)}^{(n)} & \varepsilon X_{21(k)}^{(n)T} \\ X_{21(k)}^{(n)} & X_{22(k)}^{(n)} \end{bmatrix},\ \Pi_\varepsilon^T X_{(k)}^{(n)} = X_{\varepsilon(k)}^{(n)}$$

$$Y_{(k)}^{(n)} = \begin{bmatrix} Y_{11(k)}^{(n)} & \varepsilon Y_{21(k)}^{(n)T} \\ Y_{21(k)}^{(n)} & Y_{22(k)}^{(n)} \end{bmatrix},\ \Pi_\varepsilon^T Y_{(k)}^{(n)} = Y_{\varepsilon(k)}^{(n)}$$

解の精度を確認するために, 27 回後の残差 (27) を以下に与える．

$$F_1(X_{(3)}^{(27)},\ Y_{(3)}^{(27)}) = 10^{-9} \times \begin{bmatrix} 5.82 & 1.62 & 1.09 & 0.62 \\ 1.62 & 2.82 & 3.10 & 1.15 \\ 1.09 & 3.10 & 2.09 & 1.33 \\ 0.62 & 1.15 & 1.33 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$F_2(X_{(3)}^{(27)},\ Y_{(3)}^{(27)}) = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} 1.08 & 0.34 & 0.71 & 0.26 \\ 0.34 & 0.15 & 0.01 & 0.04 \\ 0.71 & 0.01 & 2.72 & 0.31 \\ 0.26 & 0.04 & 0.31 & 0.01 \end{bmatrix}$$

したがって, 本論文で提案されたアルゴリズムによって計算された連立型リカッチ方程式 (5) の解 $X_\varepsilon(\approx X_{\varepsilon(3)}^{(27)})$, $Y_\varepsilon(\approx Y_{\varepsilon(3)}^{(27)})$ が 10^{-8} オーダの範囲で妥当であることがわかる．本論文で提案されたリアプノフ型再帰的数値解法と再帰的アルゴリズムを融合した数値解法は, 繰り返し計算によって解を求めているために, 収束までの回数がリアプノフ型再帰的数値解法で 27 回, 再帰的アルゴリズムで 3 回となったが, この収束の遅さを除けば, 数値的に比較して, 十分有効であることがわかる．

5. ま と め

本論文では, 特異摂動システムに対して, 線形 2 次ナッシュゲームのためのナッシュ均衡解をリアプノフ型再帰的数値解法 (Lyapunov Iterations)[3),9)] および再帰的アルゴリズム (Recursive Algorithm)[7)〜9)] を融合して求めることを提案した．本論文の大きな特徴は以下の 4 つにまとめられる．第 1 に, リアプノフ型再帰的数値解法を利用することによって, 連立型リカッチ方程式を疑似的に独立した 2 つのリカッチ方程式に分離したことである．疑似的に分離した 2 つのリカッ

チ方程式のそれぞれに再帰的アルゴリズムを利用したことで, 従来の文献[7)〜9),12)〜16)]と同様に, $O(\varepsilon^{k+1})$ の高精度の解を得ることが可能である. 本論文で得られた結果は, 従来の文献と比較して, 解の性質について類似性が見られる. しかし, 再帰的アルゴリズムを直接特異摂動システムに適用した場合, 従来のような高精度な解を得ることができない. したがって, 本論文で得られた結果は自明でないことに注意を要する. 第2に, Khalil ら[5)]及び Xu ら[6)]によって解かれた標準, 非標準特異摂動システムに対する線形2次ナッシュゲームのための合成ナッシュ均衡解と異なり, 関係式 (25) が成立する高精度なナッシュ均衡解 (24) を構築したことである. その結果, 合成ナッシュ均衡解を入力したときより評価関数の値に対して劣化が少ないことが示された. 第3に, 演算効率については, 本論文で扱った特異摂動システムに対して, 摂動項 ε が比較的小さくない場合, 提案されたリアプノフ型再帰的数値解法及び再帰的アルゴリズムを融合した手法は, Li ら[3)]によって提案されたリアプノフ型再帰的数値解法を単独で利用する手法と比較して, ナッシュ均衡解を得るための演算量, 記憶容量はかなり必要とする. しかし, 十分小さな ε に対しては, リアプノフ型再帰的数値解法を単独で使用する場合, 計算機の物理的容量から高精度な解を得ることは不可能であるのに対して, 本論文の手法では $O(\varepsilon^{k+1})$ の高精度のナッシュ均衡解を求めることが可能である. さらに, Freiling ら[4)]が利用したリカッチ方程式型再帰的数値解法と比較して, 本論文で利用したリアプノフ型再帰的数値解法のほうが使いやすく, また演算量も線形方程式であるリアプノフ方程式を利用しているので少なくて済む. 最後に, 第4の特徴として, 本論文で提案された手法は標準, 非標準特異摂動システムの両方に適用可能である.

本論文では, 導出されたアルゴリズムの有効性を検証するために簡単な数値例を示した. この数値例によって, ε が十分小さくても, 高精度の収束解が得られることが示された.

最後に, 本論文に対して, 有益なコメントを頂きました査読者の皆様に謝意を表します. さらには, 日頃有益なコメントを頂いております広島大学教授 水上孝一先生, 筑波大学助教授 Xu Hua 先生, 数値計算を手伝ってくれた広島大学 横奥宏明君に謝意を表します.

参 考 文 献

1) A.W.Starr and Y.C.Ho : Nonzero-sum differential games, Journal of Optimization Theory and Application, **3**-3, 184/206 (1969)
2) D.J.N.Limebeer, B.D.O.Anderson and B.Hendel : A Nash Game Approach to Mixed H_2/H_∞ Control, IEEE Trans. Automatic Control, **39**-1, 69/82 (1994)
3) T.Li and Z.Gajic : Lyapunov Iterations for Solving Coupled Algebraic Lyapunov Equations of Nash Differential Games and Algebraic Riccati Equations of Zero-Sum Games, Proc. 6th Int. Symp. on Dynamic Games and Application, St-Jovite, Canada, 489/494 (1994)
4) G.Freiling, G.Jank and H.Abou-Kandil : On Global Existence of Solutions to Coupled Matrix Riccati Equations in Closed-Loop Nash Games, IEEE Trans. Automatic Control, **41**-2, 264/269 (1996)
5) H.K.Khalil and P.V.Kokotovic : Feedback and Well-Posedness of Singularly Perturbed Nash Games, IEEE Trans. Automatic Control, **24**-5, 699/708 (1979)
6) H.Xu, H.Mukaidani and K.Mizukami : An Order Reduction Procedure to Composite Nash Solution of Singularly Perturbed Systems, 1999 IFAC World Congress, to appear.
7) Z.Gajic, D.Petkovski and X.Shen : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System-a Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.140, Springer-Verlag (1990)
8) Z.Gajic and X.Shen : Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems, Springer-Verlag (1993)
9) Z.Gajic and M.T.J Qureshi : Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control, Mathematics in Science and Engineering, Vol.195, Academic Press (1995)
10) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design, Academic Press (1986)
11) H.Xu, H.Mukaidani and K.Mizukami : New Method for Composite Optimal Control of Singularly Perturbed Systems, Int. J. Systems Sciences, **28**-2, 161/172 (1997)
12) 向谷, 水上, 徐 : 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集 **32**-5, 672/678 (1996)
13) 向谷, 水上 : 非標準特異摂動システムにおける Linear-Quadratic-Gaussian (LQG) 問題のための再帰的アルゴリズム, 電気学会論文誌 C **116**-12, 1382/1389 (1996)
14) 向谷, 水上 : 摂動項を含む H_∞ タイプリカッチ方程式のための再帰的アルゴリズム, 電気学会論文誌 C **117**-10, 1464/1471 (1997)
15) 向谷, 水上, 徐 : 標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集 **34**-6, 555/562 (1998)
16) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami : Recursive Approach of H_∞ Control Problems for Singularly Perturbed Systems Under Perfect and Imperfect State Measurements, Int. J. Systems Science, to appear.

[著 者 紹 介]

向 谷 博 明 (正会員)

1994年4月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了. 97年10月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了. 博士(工学). 98年4月広島市立大学情報科学部助手. 現在に至る. 主として, ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事. 電気学会および機械学会会員.

小 林 康 秀 (正会員)

1979年3月九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程前期修了. 同年4月山口大学工学部助手. 1995年4月から広島市立大学情報科学部助教授となり現在に至る. 工学博士. 主として, システム同定の研究に従事. 電子情報通信学会および電気学会会員.

沖　田　　　豪（正会員）

1964 年 3 月東北大学大学院工学研究科修士課程修了．同年 4 月広島大学工学部助手．同講師，助教授を経て，1978 年 4 月山口大学工学部教授.1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部教授となり現在に至る．工学博士．主として，システム同定の研究に従事．電気学会およびシステム制御情報学会会員．