計測自動制御学会論文集
Vol.32, No.1, 1/10 (1995)

出力フィードバックを利用した非標準特異摂動システムのためのロバスト H_∞ 制御問題 †

向谷 博明*・小林 康秀*・沖田 豪*

Robust H_∞ Control Problem for Nonstandard Singularly Perturbed Systems Via Output Feedback

Hiroaki MUKAIDANI*, Yasuhide KOBAYASHI* and Tsuyoshi OKITA*

This paper considers the robust H_∞ control problem for nonstandard singularly perturbed systems with time–varying norm–bounded parameter uncertainties in both state and output equations. In order to obtain the controller such that both robust stability and a disturbance attenuation level γ larger than a arbitrary boundary value are achieved, irrespective of uncertainties, we must solve two algebraic Riccati equations with the singular perturbation parameter $\varepsilon > 0$. The main results in this paper are to propose a new algorithm to solve the above equations and to find an ε independent sufficient conditions for the existence of the full–order dynamic controller. Using the algebraic Riccati equation approach, although the uncertain matrix $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ has unstable mode, our new results are applicable to both standard and nonstandard uncertain singularly perturbed systems. Furthermore, in order to show the effectiveness of the proposed algorithms, numerical examples are included.

Key Words: Nonstandard Singularly Perturbed Systems, Robust H_∞ control problem, Riccati equations, Parameter Uncertainties

1. はじめに

近年, 不確定要素を含む線形システムに対して, リカッチ方程式を道具立てとするロバスト安定化制御問題が多数報告されている [1)〜4)]. これらの研究で使用されている主な安定化手法には, 以下の 2 通りが存在する. 1 つは QB 法 (Quadratic Bound Method) やマッチング条件下におけるリアプノフ関数の設計法に見られるようなリアプノフの安定論を主体とした 2 次安定化手法 [1)〜3)] である. もう 1 つは H_∞ 制御理論に見られるようなスモールゲイン定理を主体とした手法 [4)] である. 最近では, H_∞ 制御問題に対して, 係数行列の不確定要素を考慮したロバスト H_∞ 制御問題が注目されている [6)〜9)]. これらの文献では, H_∞ 制御問題で要求されるノルム条件, すなわち外乱から制御量までの伝達関数 $G(s)$ が $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ を満足し, かつ 2 次安定であるための必要十分条件を不確定要素に無関係な形で導出している.

不確定要素を含む特異摂動システムの 2 次安定化に関する研究も, ここ数年で多数報告されている [12),13),17)]. さらに, 不確定要素を含む特異摂動システムに対するロバスト H_∞ 制御問題が新たに報告されている [10)]. 特に文献10) で扱われている不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト H_∞ 制御問題では, 出力フィードバックが利用されている. 文献11) では不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト H_2 制御問題が研究されている.

不確定要素を含む特異摂動システムに関する 2 次安定化制御問題を扱っている文献で, 特に注目すべき点は, 大部分の文献で不確定要素を含む係数行列の一部である A_{22} 或いは $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が非特異であると仮定している点である [10)〜13)]. A_{22} が非特異である特異摂動システムを一般に標準特異摂動システムと呼んでいるが, 標準特異摂動システムが多く扱われる理由に, 制御則の設計段階でシステムを時間的に 2 つのモードに分割するので摂動項 ε に無関係に制御則を構築できる利点があげられる. このような解析手法を特異摂動法 [19)] と呼んでいるが, この解析方法の欠点は A_{22} 或いは $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が非特異であると仮定しなければならない点である. 従来, A_{22} 或いは $A_{22} + \Delta A_{22}(t)$ が特異である不確定要素を含む非標準特異摂動システムを扱う場合, 第 1 の手法として, fast system に prefeedback を導入した設計方法 [20)] が考えられる. しかし, この手法を利用した研究は, prefeedback によるゲインパラメータの決定が困難なため未だに研究がなされていない. 第 2 の手法として一般化リカッ

† 第 38 回計測自動制御学会学術講演会で一部発表 (1999・7)

* 広島市立大学情報科学部　広島市安佐南区大塚東 3-4-1
* Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University, Ozuka-Higasi, Asaminami-ku, Hiroshima City, 3-4-1
(Received March 25, 1999)
(Revised March 25, 1999)

チ方程式を利用した手法[14),17)] が考えられる．文献17) では，システムの状態行列のみに不確定要素が加わったシステムに対する安定化問題を扱っている．しかし，外乱を考慮したロバスト H_∞ 制御問題は扱っていない．また，文献14) ～ 16) では不確定要素を含まない H_∞ 制御問題を扱っている．

本論文では，文献10) で扱われている不確定要素を含む特異摂動システムに対するロバスト H_∞ 制御問題を非標準特異摂動システムに拡張する．本論文の主要な結果は次のように述べられる．まず，第 1 に文献10) と異なりシステムの状態行列の全てにノルム有界型時変不確定要素が存在することである．さらに，A_{22} は非特異であると仮定しないので，より現実的なシステムに対して制御則が設計可能である．第 2 に制御則が存在するための十分条件を摂動項 ε に無関係に導出することである．ε に依存しない低次元化された 4 つのリカッチ方程式が全て準正定対称安定化解をもてば動的フィードバック制御則によってロバスト H_∞ 制御可能である．また，特異摂動システムにおける H_∞ 制御可能である証明が Dragan[15)] と比較して異なっている．詳しく説明すれば，陰関数定理[15),16),21)] を基礎とした部分は Dragan[15)] とは変わりない．しかし，リアプノフ型再帰的アルゴリズム[21)] を導入することによって，再帰的に証明を行っている点が大きく異なる．したがって，得られた結果に対して類似性が認められるが，証明に工夫を要する等，変更点も多数存在する．第 3 に摂動項 ε を含むリカッチ方程式に対して，再帰的アルゴリズム[17),18),21)] に代わる新たなアルゴリズムを提案することである．本論文で示されるアルゴリズムはリアプノフ型再帰的アルゴリズム[21)] と一般化リカッチ方程式の手法[14)] を融合しているため，従来と異なり行列をブロックごとに分割して計算する必要がない．したがって再帰的アルゴリズムを利用した手法と比較して大幅な計算手順の簡略化が可能である．また，リアプノフ型再帰的アルゴリズムの初期値に，低次元化されたリカッチ方程式の解を使用することによってアルゴリズムの収束の証明を簡単化している．さらに，リアプノフ型再帰的アルゴリズムに現れるリアプノフ方程式を解くとき，摂動項 ε を未知数に含めないように一次元連立方程式を解くなどの工夫をして数値計算上の困難を克服している．最後に摂動項 ε を含むリカッチ方程式を直接解いて動的フィードバック制御則を構築するため，Tan ら[14)] が提案している近似動的フィードバック制御則と比較して，高精度な動的フィードバック制御則を得ることができる．

なお，本論文の題名にある “非標準” とは，行列 A_{22} が特異である特異摂動システム (非標準特異摂動システム) を意味するものであり，後に出てくる仮定 1 (A1.∼A3.) が成り立たない非標準 H_∞ 制御問題の意味とは異なることに注意しなければならないことを付記する．

本論文では以下の記号を用いる．$\|G(s)\|_\infty$ は，伝達関数行列 $G(s) \in \mathbf{R}^{k_1\times k_2}$ の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_s[\lambda_{\max}(G^*(s)G(s))]^{1/2}$ $(s = j\omega,\ \omega \in \mathbf{R}^+)$，$\|h(t)\|_2$ は，時間関数ベクトル $h(t) \in \mathbf{R}^{k_3}$ の $L_2[0,\infty]$ ノルム $\|h(t)\|_2 \equiv [\int_0^\infty h^T(t)h(t)dt]^{1/2}$ $(t \in \mathbf{R})$，$\rho(M)$ は正方行列 $M \in \mathbf{R}^{k_4\times k_4}$ のスペクトル半径 (最大固有値 $\rho(M) = \lambda_{\max}(M)$)，${}_{\mathrm{CS}}M$ は M の列展開，$\det M$ は M の行列式をそれぞれ表す．また，行列 I_k は，$I_k \in \mathbf{R}^{k\times k}$ の単位行列，$\otimes$ は行列のクロネッカ積を表す．

2. 問題設定

システムに摂動項を含む状態空間において，以下のようなノルム有界型不確定要素を含む非標準特異摂動システム (1) を考える[10),11)]．

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= [A_{11}+\Delta A_{11}(t)]x_1(t)+[A_{12}+\Delta A_{12}(t)]x_2(t)\\ &\quad +B_{11}w(t)+[B_{12}+\Delta B_{12}(t)]u(t),\\ &\quad x_1(0)=0 \end{aligned} \tag{1a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}_2(t) &= [A_{21}+\Delta A_{21}(t)]x_1(t)+[A_{22}+\Delta A_{22}(t)]x_2(t)\\ &\quad +B_{21}w(t)+[B_{22}+\Delta B_{22}(t)]u(t),\\ &\quad x_2(0)=0 \end{aligned} \tag{1b}$$

$$z(t) = C_{11}x_1(t)+C_{12}x_2(t)+D_{12}u(t) \tag{1c}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= [C_{21}+\Delta C_{21}(t)]x_1(t)+[C_{22}+\Delta C_{22}(t)]x_2(t)\\ &\quad +D_{21}w(t)\end{aligned} \tag{1d}$$

ここで，システム (1b) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ，$x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i = 1,\ 2)$ は状態ベクトル，$w(t) \in \mathbf{R}^{l_1}$ は外乱，$u(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$ は制御入力，$z(t) \in \mathbf{R}^{l_2}$ は制御量，$y(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$ は出力であり，ノルム有界型時変不確定要素は以下のマッチング条件を満足する．

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) & \Delta B_{12}(t)\\ \Delta A_{21}(t) & \Delta A_{22}(t) & \Delta B_{22}(t)\end{bmatrix}\\ &\quad = \begin{bmatrix}H_{a1}\\ H_{a2}\end{bmatrix}F(t)\begin{bmatrix}E_{a1} & E_{a2} & E_b\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta C_{21}(t) & \Delta C_{22}(t)\end{bmatrix} = H_cF(t)\begin{bmatrix}E_{a1} & E_{a2}\end{bmatrix} \tag{2b}$$

ただし，$F(t) \in \mathbf{R}^{p\times s}$ は $F^T(t)F(t) \le I_s$ を満たす各要素がルベーグ可測である未知の時間関数行列である．また，各係数行列は適当な次元をもつと仮定する．本論文ではシステム (1) において，A_{22} が非特異であると仮定しない．さらに文献10) と異なり，$\Delta A_{12}(t)$，$\Delta A_{21}(t)$ 及び $\Delta C_{22}(t)$ が含まれているので，より一般的なシステムを扱うことが可能である．

ここで，以下の行列を定義する．

$$x(t) = \begin{bmatrix}x_1^T(t) & x_2^T(t)\end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^n,\ n = n_1+n_2$$

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22}\end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$B_{1\varepsilon} = \begin{bmatrix}B_{11}\\ \varepsilon^{-1}B_{21}\end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{bmatrix}$$

$$B_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix}B_{12}\\ \varepsilon^{-1}B_{22}\end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix}B_{12}\\ B_{22}\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}$$

$$\Delta A_\varepsilon(t)=\begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t)\\ \varepsilon^{-1}\Delta A_{21}(t) & \varepsilon^{-1}\Delta A_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$\Delta B_{2\varepsilon}(t)=\begin{bmatrix} \Delta B_{21}(t)\\ \varepsilon^{-1}\Delta B_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$\Delta C_2(t)=\begin{bmatrix} \Delta C_{21}(t) & \Delta C_{22}(t)\end{bmatrix}$$

$$H_{a\varepsilon}=\begin{bmatrix} H_{a1}\\ \varepsilon^{-1}H_{a2}\end{bmatrix},\ H_a=\begin{bmatrix} H_{a1}\\ H_{a2}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times p}$$

$$E_a=\begin{bmatrix} E_{a1} & E_{a2}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{s\times n}$$

したがって, システム (1) は以下のシステム (3) に書き換えることができる.

$$\dot{x}(t) = [A_\varepsilon+\Delta A_\varepsilon(t)]x(t)+B_{1\varepsilon}w(t) +[B_{2\varepsilon}+\Delta B_{2\varepsilon}(t)]u(t),\quad x(0)=0 \tag{3a}$$

$$z(t) = C_1x(t)+D_{12}u(t) \tag{3b}$$

$$y(t) = [C_2+\Delta C_2(t)]x(t)+D_{21}w(t) \tag{3c}$$

ただし,

$$\Delta A_\varepsilon(t)=H_{a\varepsilon}F(t)E_a,\quad \Delta B_{2\varepsilon}(t)=H_{a\varepsilon}F(t)E_b$$
$$\Delta C_2(t)=H_cF(t)E_a$$

システム (3) に対して, 以下の補題1が知られている [8),10)].

［**補題 1**］　次の2つの命題 [I] 及び [II] は等価である.

[I]　不確定要素 $\Delta A_\varepsilon(t)$, $\Delta B_{2\varepsilon}(t)$ 及び $\Delta C_2(t)$ に無関係にシステム (3) を出力フィードバックによって一様漸近安定化し, かつ外乱 $w(t)$ から制御量 $z(t)$ までの伝達関数 $G_\Delta(s)$ に関するノルム条件 (4) を満足する制御則が存在する. すなわち, システム (3) は出力フィードバックによってロバスト H_∞ 制御可能である.

$$\|G_\Delta(s)\|_\infty<\gamma \quad \Leftrightarrow \|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2 \tag{4}$$

[II]　構造的不確かさが存在しないシステム (5) に対して, 出力フィードバックによって閉ループ系を内部安定化し, かつ拡張外乱 $w_e(t)$ から拡張制御量 $z_e(t)$ までの伝達関数 $G_0(s)$ に関するノルム条件 (6) を満足するような正定数 $\lambda>0$ が存在する. すなわち, システム (5) に対して, 出力フィードバックによって H_∞ 制御可能な正定数 $\lambda>0$ が存在する.

$$\dot{x}(t) = A_\varepsilon x(t)+\begin{bmatrix} B_{1\varepsilon} & \gamma\lambda H_{a\varepsilon}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t)\\ \hat{w}(t)\end{bmatrix} +B_{2\varepsilon}u(t),\quad x(0)=0 \tag{5a}$$

$$\begin{bmatrix} z(t)\\ \hat{z}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1\\ \dfrac{1}{\lambda}E_a\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} D_{12}\\ \dfrac{1}{\lambda}E_b\end{bmatrix}u(t) \tag{5b}$$

$$y(t) = C_2x(t)+\begin{bmatrix} D_{21} & \gamma\lambda H_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t)\\ \hat{w}(t)\end{bmatrix} \tag{5c}$$

$$\|G_0(s)\|_\infty<\gamma \quad \Leftrightarrow \|z_e(t)\|_2<\gamma\|w_e(t)\|_2 \tag{6}$$

ここで,

$$z_e(t)=\begin{bmatrix} z(t)\\ \hat{z}(t)\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{l_2+s},\ w_e(t)=\begin{bmatrix} w(t)\\ \hat{w}(t)\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{l_1+p}$$

は, それぞれ新たに拡張された制御量 $z_e(t)$ 及び外乱 $w_e(t)$ を表す.

さらに, 以下の行列を定義する.

$$B_{1\gamma\lambda\varepsilon}=\begin{bmatrix} B_{1\varepsilon} & \gamma\lambda H_{a\varepsilon}\end{bmatrix},\ C_{1\lambda}=\begin{bmatrix} C_1\\ \dfrac{1}{\lambda}E_a\end{bmatrix}$$

$$D_{12\lambda}=\begin{bmatrix} D_{12}\\ \dfrac{1}{\lambda}E_b\end{bmatrix},\ D_{21\gamma\lambda}=\begin{bmatrix} D_{21} & \gamma\lambda H_c\end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_1=(D_{12\lambda}^TD_{12\lambda})^{-1},\ \tilde{D}_2=(D_{21\gamma\lambda}D_{21\gamma\lambda}^T)^{-1}$$

したがって, システム (5) は以下のシステム (7) に書き換えることができる.

$$\dot{x}(t) = A_\varepsilon x(t)+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}w_e(t)+B_{2\varepsilon}u(t),\ x(0)=0 \tag{7a}$$

$$z_e(t) = C_{1\lambda}x(t)+D_{12\lambda}u(t) \tag{7b}$$

$$y(t) = C_2x(t)+D_{21\gamma\lambda}w_e(t) \tag{7c}$$

最後に, システム (7) に対して出力フィードバックにより閉ループ系が内部安定かつノルム条件 (6) を満足するような正定数 $\lambda>0$ が存在する必要十分条件を示す. その前に, 特異摂動システム (3) 及び (7) に対して仮定1を導入する.

［**仮定 1**］　**A1.**　行列対 $(A_\varepsilon,\ B_{2\varepsilon})$ は可安定であり, また同時に行列対 $(C_2,\ A_\varepsilon)$ は可検出であるような摂動項 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$ が存在する.

A2.　$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} D_{12}\\ E_b\end{bmatrix}=m_1,\ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} D_{21} & H_c\end{bmatrix}=m_2$

A3.　$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-sI_n & B_2\\ C_1 & D_{12}\\ E_a & E_b\end{bmatrix}=n+m_1$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-sI_n & B_1 & H_a\\ C_2 & D_{21} & H_c\end{bmatrix}=n+m_2$

仮定1の条件のもと, 以下の補題2が知られている [5),7),10),15),16)].

［**補題 2**］　2つのリカッチ方程式 (8) を考える.

$$\begin{aligned}F_1(X_\varepsilon)&=A_\varepsilon^TX_\varepsilon+X_\varepsilon A_\varepsilon+\gamma^{-2}X_\varepsilon B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon\\ &\quad-(X_\varepsilon B_{2\varepsilon}+C_{1\lambda}^TD_{12\lambda})\tilde{D}_1(B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon+D_{12\lambda}^TC_{1\lambda})\\ &\quad+C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}=0\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}F_2(Y_\varepsilon)&=A_\varepsilon Y_\varepsilon+Y_\varepsilon A_\varepsilon^T+\gamma^{-2}Y_\varepsilon C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}Y_\varepsilon\\ &\quad-(Y_\varepsilon C_2^T+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}D_{21\gamma\lambda}^T)\tilde{D}_2(C_2Y_\varepsilon+D_{21\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^T)\\ &\quad+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^T=0\end{aligned} \tag{8b}$$

ただし, 解 X_ε, Y_ε は以下の構造を持つと仮定する [(注1)].

(注1) A_{22} が非特異であるとき, 解 X_ε, Y_ε の構造は文献15), 16) によって示されている. 一方, A_{22} が特異であるときは文献18) によって示されている. 以上から, 本論文でも従来の文献と同じリカッチ方程式の解の構造を使用している.

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ \varepsilon X_{21} & \varepsilon X_{22}\end{bmatrix},\ Y_\varepsilon=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12}^T \\ Y_{12} & \varepsilon^{-1} Y_{22}\end{bmatrix}$$

システム (7) に対して出力フィードバックにより閉ループ系が内部安定かつノルム条件 (6) を満足するような正定数 $\lambda>0$ が存在する必要十分条件は, 以下の 3 つの条件を満足するリカッチ方程式 (8) の準正定対称解 $X_\varepsilon\geq 0$, $Y_\varepsilon\geq 0$ が存在することである.

a1. X_ε は安定化解である. 即ち, $A_\varepsilon+\gamma^{-2}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1(B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon+D_{12\lambda}^TC_{1\lambda})$ は安定である.

a2. Y_ε は安定化解である. 即ち, $A_\varepsilon+\gamma^{-2}Y_\varepsilon C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}-(Y_\varepsilon C_2^T+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}D_{21\gamma\lambda}^T)\tilde{D}_2C_2$ は安定である.

a3. $\rho(X_\varepsilon Y_\varepsilon)<\gamma^2$

3 つの条件を全て満足するとき, 不確定要素を含む特異摂動システム (1) は以下の動的フィードバック (9) によってロバスト H_∞ 制御可能である.

$$\dot{\xi}(t)\ =\ A_{c\varepsilon}\xi(t)+L_\varepsilon y(t) \tag{9a}$$

$$u(t)\ =\ K_\varepsilon\xi(t) \tag{9b}$$

ただし

$$K_\varepsilon=-\tilde{D}_1(B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon+D_{12\lambda}^TC_{1\lambda})$$
$$L_\varepsilon=Z_\varepsilon(Y_\varepsilon C_2^T+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}D_{21\gamma\lambda}^T)\tilde{D}_2$$
$$A_{c\varepsilon}=A_\varepsilon+B_{2\varepsilon}K_\varepsilon+\gamma^{-2}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon -L_\varepsilon(C_2+\gamma^{-2}D_{21\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon)$$
$$Z_\varepsilon=(I_n-\gamma^{-2}Y_\varepsilon X_\varepsilon)^{-1},\ \xi(t)\in\mathbf{R}^n$$

3 章以降は, 動的フィードバック制御則 (9) が存在するための十分条件を摂動項 ε に無関係な形で導出する. 続いて, 摂動項 ε を含むリカッチ方程式 (8) に対して, 再帰的アルゴリズム [17),21)] に代わる新たなアルゴリズムを提案する.

3. 制御則が存在するための十分条件

この章では, ロバスト H_∞ 制御則が存在するための十分条件を摂動項 ε に依存しない形で与える. まず, リカッチ方程式 (8a), (8b) を一般化リカッチ方程式 (10), (11) にそれぞれ等価変換する [17),18)].

$$A^TX+X^TA+\gamma^{-2}X^TB_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^TX -(X^TB_2+C_{1\lambda}^TD_{12\lambda})\tilde{D}_1(B_2^TX+D_{12\lambda}^TC_{1\lambda}) +C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}=0 \tag{10a}$$

$$\Pi_\varepsilon^TX=X^T\Pi_\varepsilon=X_\varepsilon \tag{10b}$$

$$AY^T+YA^T+\gamma^{-2}YC_{1\lambda}^TC_{1\lambda}Y^T -(YC_2^T+B_{1\gamma\lambda}D_{21\gamma\lambda}^T)\tilde{D}_2(C_2Y^T+D_{21\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^T) +B_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^T=0 \tag{11a}$$

$$\Pi_\varepsilon^{-1}Y=Y^T\Pi_\varepsilon^{-T}=Y_\varepsilon \tag{11b}$$

ただし

$$\Pi_\varepsilon=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{n_2}\end{bmatrix},\ B_{1\gamma\lambda}=\begin{bmatrix} B_1 & \gamma\lambda H_a\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ \varepsilon Y_{12}^T & Y_{22}\end{bmatrix}$$
$$X_{11}=X_{11}^T,\ X_{22}=X_{22}^T,\ Y_{11}=Y_{11}^T,\ Y_{22}=Y_{22}^T$$
$$A_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}A,\ B_{1\gamma\lambda\varepsilon}=\Pi_\varepsilon^{-1}B_{1\gamma\lambda},\ B_{2\varepsilon}=\Pi_\varepsilon^{-1}B_2$$

次に以下の行列を定義する.

$$\bar{A}\ =\ A-B_2\tilde{D}_1D_{12\lambda}^TC_{1\lambda} \tag{12a}$$
$$\bar{R}\ =\ B_2\tilde{D}_1B_2^T-\gamma^{-2}B_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^T \tag{12b}$$
$$\bar{Q}\ =\ C_{1\lambda}^T[I_{l_2+s}-D_{12\lambda}\tilde{D}_1D_{12\lambda}^T]C_{1\lambda} \tag{12c}$$
$$\hat{A}\ =\ A-B_{1\gamma\lambda}D_{21\gamma\lambda}^T\tilde{D}_2C_2 \tag{13a}$$
$$\hat{R}\ =\ C_2^T\tilde{D}_2C_2-\gamma^{-2}C_{1\lambda}^TC_{1\lambda} \tag{13b}$$
$$\hat{Q}\ =\ B_{1\gamma\lambda}[I_{l_1+p}-D_{21\gamma\lambda}^T\tilde{D}_2D_{21\gamma\lambda}]B_{1\gamma\lambda}^T \tag{13c}$$

ただし

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix},\ \bar{R}=\begin{bmatrix} \bar{R}_{11} & \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{12}^T & \bar{R}_{22}\end{bmatrix}$$
$$\bar{Q}=\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22}\end{bmatrix},\ \hat{A}=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}$$
$$\hat{R}=\begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ \hat{R}_{12}^T & \hat{R}_{22}\end{bmatrix},\ \hat{Q}=\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{12}^T & \hat{Q}_{22}\end{bmatrix}$$

以上の準備のもと, リカッチ方程式 (8a), (8b) の準正定対称安定化解の存在条件を導出する. まず, リカッチ方程式 (8a), (8b) の準正定対称安定化解の存在を保証するために仮定 2 を導入する [14),18)].

［**仮定 2**］ **A4.** 行列対 $(A_{22},\ B_{22})$ は可安定であり, また同時に行列対 $(C_{22},\ A_{22})$ は可検出である.

A5. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A_{22}-sI_{n_2} & B_{22} \\ C_{12} & D_{12} \\ E_{a2} & E_b\end{bmatrix}=n_2+m_1$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A_{22}-sI_{n_2} & B_{12} & H_{a2} \\ C_{22} & D_{21} & H_c\end{bmatrix}=n_2+m_2$

A6. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \mathcal{A}(s) & B_2 \\ C_1 & D_{12} \\ E_a & E_b\end{bmatrix}=n+m_1$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \mathcal{A}(s) & B_1 & H_a \\ C_2 & D_{21} & H_c\end{bmatrix}=n+m_2$

ただし, $\mathcal{A}(s)=\begin{bmatrix} A_{11}-sI_{n_1} & A_{12} \\ A_{22} & A_{22}\end{bmatrix}$

はじめに一般化リカッチ方程式 (10a) を考える. 関係式 (12) を一般化リカッチ方程式 (10a) に代入してブロックごとに分割計算すれば (14) を得る.

$$\bar{A}_{11}^TX_{11}+X_{11}^T\bar{A}_{11}+\bar{A}_{21}^TX_{21}+X_{21}^T\bar{A}_{21}$$

$$-X_{11}^T\bar{R}_{11}X_{11}-X_{21}^T\bar{R}_{22}X_{21}$$
$$-X_{11}^T\bar{R}_{12}X_{21}-X_{21}^T\bar{R}_{12}^TX_{11}+\bar{Q}_{11}=0 \quad (14a)$$
$$\varepsilon X_{21}\bar{A}_{11}+X_{22}^T\bar{A}_{21}+\bar{A}_{12}^TX_{11}+\bar{A}_{22}^TX_{21}$$
$$-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{11}X_{11}-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{12}X_{21}$$
$$-X_{22}^T\bar{R}_{12}^TX_{11}-X_{22}^T\bar{R}_{22}X_{21}+\bar{Q}_{12}^T=0 \quad (14b)$$
$$\bar{A}_{22}^TX_{22}+X_{22}^T\bar{A}_{22}+\varepsilon\bar{A}_{12}^TX_{21}^T+\varepsilon X_{21}\bar{A}_{12}$$
$$-X_{22}^T\bar{R}_{22}X_{22}-\varepsilon X_{22}^T\bar{R}_{12}^TX_{21}^T-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{12}X_{22}$$
$$-\varepsilon^2X_{21}\bar{R}_{11}X_{21}^T+\bar{Q}_{22}=0 \quad (14c)$$

方程式 (14) に対して, 摂動項である ε を $\varepsilon\equiv 0$ とすれば 0– オーダ方程式 (15) を得る．ここで, 0– オーダ方程式 (15) の解を $\bar{X}_{11}$, $\bar{X}_{21}$, $\bar{X}_{22}$ とおく．

$$\bar{A}_{11}^T\bar{X}_{11}+\bar{X}_{11}^T\bar{A}_{11}+\bar{A}_{21}^T\bar{X}_{21}+\bar{X}_{21}^T\bar{A}_{21}$$
$$-\bar{X}_{11}^T\bar{R}_{11}\bar{X}_{11}-\bar{X}_{21}^T\bar{R}_{22}\bar{X}_{21}-\bar{X}_{11}^T\bar{R}_{12}\bar{X}_{21}$$
$$-\bar{X}_{21}^T\bar{R}_{12}^T\bar{X}_{11}+\bar{Q}_{11}=0 \quad (15a)$$
$$\bar{X}_{22}^T\bar{A}_{21}+\bar{A}_{12}^T\bar{X}_{11}+\bar{A}_{22}^T\bar{X}_{21}-\bar{X}_{22}^T\bar{R}_{12}^T\bar{X}_{11}$$
$$-\bar{X}_{22}^T\bar{R}_{22}\bar{X}_{21}+\bar{Q}_{12}^T=0 \quad (15b)$$
$$\bar{A}_{22}^T\bar{X}_{22}+\bar{X}_{22}^T\bar{A}_{22}-\bar{X}_{22}^T\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}+\bar{Q}_{22}=0 \quad (15c)$$

リカッチ方程式 (15c) に対して $\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}$ が安定かつ行列 $\bar{X}_{22}$ が準正定であるような γ 及び λ が存在すれば, 0– オーダ方程式 (15) は以下の (16) に等価変形できる．

$$\bar{A}_0^T\bar{X}_{11}+\bar{X}_{11}^T\bar{A}_0-\bar{X}_{11}^T\bar{R}_0\bar{X}_{11}+\bar{Q}_0=0 \quad (16a)$$
$$\bar{A}_{22}^T\bar{X}_{22}+\bar{X}_{22}^T\bar{A}_{22}-\bar{X}_{22}^T\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}+\bar{Q}_{22}=0 \quad (16b)$$
$$\bar{X}_{21}=-N_2^T+N_1^T\bar{X}_{11} \quad (16c)$$

ただし

$$\bar{A}_0=\bar{A}_{11}+N_1\bar{A}_{21}+\bar{R}_{12}N_2^T+N_1\bar{R}_{22}N_2^T$$
$$\bar{R}_0=\bar{R}_{11}+N_1\bar{R}_{12}^T+\bar{R}_{12}N_1^T+N_1\bar{R}_{22}N_1^T$$
$$\bar{Q}_0=\bar{Q}_{11}-N_2\bar{A}_{21}-\bar{A}_{21}^TN_2^T-N_2\bar{R}_{22}N_2^T$$
$$N_2^T=\bar{T}_4^{-T}\bar{L}_{12}^T,\ N_1^T=-\bar{T}_4^{-T}\bar{T}_2^T$$
$$\bar{T}_1=\bar{A}_{11}-\bar{R}_{11}\bar{X}_{11}-\bar{R}_{12}\bar{X}_{21}$$
$$\bar{T}_3=\bar{A}_{21}-\bar{R}_{12}^T\bar{X}_{11}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{21}$$
$$\bar{T}_2=\bar{A}_{12}-\bar{R}_{12}\bar{X}_{22},\ \bar{T}_4=\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}$$
$$\bar{L}_{12}=\bar{Q}_{12}+\bar{A}_{21}^T\bar{X}_{22},\ \bar{T}_0=\bar{T}_1-\bar{T}_2\bar{T}_4^{-1}\bar{T}_3$$

同様に, 関係式 (13) を一般化リカッチ方程式 (11a) に代入してブロックごとに分割計算した後, $\varepsilon\equiv 0$ とすれば, $\hat{A}_{22}-\hat{R}_{22}\hat{Y}_{22}$ が安定である条件のもとで 0– オーダ方程式 (17) を得る．ここで, 0– オーダ方程式 (17) の解を $\hat{Y}_{11}$, $\hat{Y}_{12}$, $\hat{Y}_{22}$ とおく．

$$\hat{A}_0\hat{Y}_{11}^T+\hat{Y}_{11}\hat{A}_0^T-\hat{Y}_{11}\hat{R}_0\hat{Y}_{11}^T+\hat{Q}_0=0 \quad (17a)$$
$$\hat{A}_{22}\hat{Y}_{22}^T+\hat{Y}_{22}\hat{A}_{22}^T-\hat{Y}_{22}\hat{R}_{22}\hat{Y}_{22}^T+\hat{Q}_{22}=0 \quad (17b)$$
$$\hat{Y}_{12}=-M_2+\hat{Y}_{11}M_1 \quad (17c)$$

ただし

$$\hat{A}_0=\hat{A}_{11}+\hat{A}_{12}M_1^T+M_2\hat{R}_{12}^T+M_2\hat{R}_{22}M_1^T$$
$$\hat{R}_0=\hat{R}_{11}^T+\hat{R}_{12}M_1^T+M_1\hat{R}_{12}^T+M_1\hat{R}_{22}M_1^T$$
$$\hat{Q}_0=\hat{Q}_{11}-\hat{A}_{12}M_2^T-M_2\hat{A}_{12}^T-M_2\hat{R}_{22}M_2^T$$
$$M_2^T=\hat{T}_4^{-1}\hat{L}_{21},\ M_1^T=-\hat{T}_4^{-1}\hat{T}_3$$
$$\hat{T}_1=\hat{A}_{11}-\hat{Y}_{12}\hat{R}_{12}^T-\hat{Y}_{11}\hat{R}_{11}^T$$
$$\hat{T}_2=\hat{A}_{12}-\hat{Y}_{12}\hat{R}_{22}^T-\hat{Y}_{11}\hat{R}_{12}$$
$$\hat{T}_3=\hat{A}_{21}-\hat{Y}_{22}\hat{R}_{12}^T,\ \hat{T}_4=\hat{A}_{22}-\hat{Y}_{22}\hat{R}_{22}^T$$
$$\hat{L}_{21}=\hat{Y}_{22}\hat{A}_{12}^T+\hat{Q}_{12}^T,\ \hat{T}_0=\hat{T}_1-\hat{T}_2\hat{T}_4^{-1}\hat{T}_3$$

以上より, リカッチ方程式 (8) の解の存在条件に対して以下の定理が得られる．

《**定理 1**》　仮定 1, 仮定 2 の条件が全て成り立つとする．また ε が十分小さいと仮定する．このとき, 適当な γ 及び λ に対して, ε に依存しない 2 つのリカッチ方程式 (16b), (17b) が $\rho(\bar{X}_{22}\hat{Y}_{22})<\gamma^2$ を満足するような準正定対称安定化解 $\bar{X}_{22}\geq 0$, $\hat{Y}_{22}\geq 0$ をもち, さらに ε に依存しない 2 つのリカッチ方程式 (16a), (17a) が $\rho(\bar{X}_{11}\hat{Y}_{11})<\gamma^2$ を満足するような準正定対称安定化解 $\bar{X}_{11}\geq 0$, $\hat{Y}_{11}\geq 0$ をもてば, ε を含む 2 つのリカッチ方程式 (8a), (8b) は準正定対称解 $X_\varepsilon\geq 0$, $Y_\varepsilon\geq 0$ をもつ．さらに解 X_ε, Y_ε は, 補題 2 の 3 つの条件 a1. ∼ a3. を全て満足する．ここで, 準正定対称解 X_ε, Y_ε は以下の構造をもつ．

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix}\bar{X}_{11}+\varepsilon E_{11}(\varepsilon) & \varepsilon\{\bar{X}_{21}+\varepsilon E_{21}(\varepsilon)\}^T\\ \varepsilon\{\bar{X}_{21}+\varepsilon E_{21}(\varepsilon)\} & \varepsilon\{\bar{X}_{22}+\varepsilon E_{22}(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$
$$Y_\varepsilon=\begin{bmatrix}\hat{Y}_{11}+\varepsilon F_{11}(\varepsilon) & \hat{Y}_{12}+\varepsilon F_{12}(\varepsilon)\\ \{\hat{Y}_{12}+\varepsilon F_{12}(\varepsilon)\}^T & \varepsilon^{-1}\{\hat{Y}_{22}+\varepsilon F_{22}(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$

（証明 1）　まず, 準正定対称解 X_ε, Y_ε の存在性及び行列の構造に対する証明を行う．証明の基本は, 2 つの一般化リカッチ方程式 (10a), (11a) のそれぞれに陰関数定理を適用することである [15]．はじめに解 X_ε について証明する．リカッチ方程式 (14) に対して, $(\varepsilon,\ X_{11},\ X_{21},\ X_{22})=(0,\ \bar{X}_{11},\ \bar{X}_{21},\ \bar{X}_{22})$ におけるヤコビ行列は以下のように計算される．

$$J|_{\varepsilon=0}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12} & 0\\ J_{21} & J_{22} & J_{23}\\ 0 & 0 & J_{33}\end{bmatrix} \quad (18)$$

ただし

$$J_{11}=\bar{T}_1^T\otimes I_{n_1}+I_{n_1}\otimes\bar{T}_1^T,\ J_{22}=\bar{T}_4^T\otimes I_{n_1}$$
$$J_{12}=\bar{T}_3^T\otimes I_{n_1}+(I_{n_1}\otimes\bar{T}_3^T)U_{n_1n_2}$$
$$J_{21}=\bar{T}_2^T\otimes I_{n_1},\ J_{33}=\bar{T}_4^T\otimes I_{n_2}+I_{n_2}\otimes\bar{T}_4^T$$
$$J_{m1}=\frac{\partial L_m}{\partial X_{11}}|_{\varepsilon=0},\ J_{m2}=\frac{\partial L_m}{\partial X_{21}}|_{\varepsilon=0}$$
$$J_{m3}=\frac{\partial L_m}{\partial X_{22}}|_{\varepsilon=0},\ (m=1,2,3)$$
$$L_1=\bar{A}_{11}^TX_{11}+X_{11}^T\bar{A}_{11}+\bar{A}_{21}^TX_{21}+X_{21}^T\bar{A}_{21}$$
$$-X_{11}^T\bar{R}_{11}X_{11}-X_{21}^T\bar{R}_{22}X_{21}$$
$$-X_{11}^T\bar{R}_{12}X_{21}-X_{21}^T\bar{R}_{12}^TX_{11}+\bar{Q}_{11}$$
$$L_2=\varepsilon X_{21}\bar{A}_{11}+X_{22}^T\bar{A}_{21}+\bar{A}_{12}^TX_{11}+\bar{A}_{22}^TX_{21}$$

$$\begin{aligned}&-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{11}X_{11}-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{12}X_{21}\\&-X_{22}^T\bar{R}_{12}^TX_{11}-X_{22}^T\bar{R}_{22}X_{21}+\bar{Q}_{12}^T\\L_3=&\ \bar{A}_{22}^TX_{22}+X_{22}^T\bar{A}_{22}+\varepsilon\bar{A}_{12}^TX_{21}^T\\&+\varepsilon X_{21}\bar{A}_{12}-X_{22}^T\bar{R}_{22}X_{22}-\varepsilon X_{22}^T\bar{R}_{12}^TX_{21}^T\\&-\varepsilon X_{21}\bar{R}_{12}X_{22}-\varepsilon^2X_{21}\bar{R}_{11}X_{21}^T+\bar{Q}_{22}\end{aligned}$$

ここで, $U_{n_1n_2}$ は置換行列 (permutation matrix) である. リカッチ方程式 (16b) の安定化解 $\bar{X}_{22}$ が存在するので $\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}=\bar{T}_4$ は安定である. したがって, J_{33} は非特異である. さらに J_{22} も非特異である. J_{33}, J_{22} が共に非特異であることを利用すれば以下を得る.

$$\det J|_{\varepsilon=0}=\det J_{33}\cdot\det J_{22}\cdot\det[\bar{T}_0^T\otimes I_{n_1}+I_{n_1}\otimes\bar{T}_0^T]$$

一方, リカッチ方程式 (16a) の安定化解 $\bar{X}_{11}$ が存在するので $\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}$ は安定であり, 簡単な代数計算から $\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}=\bar{T}_1-\bar{T}_2\bar{T}_4^{-1}\bar{T}_3=\bar{T}_0$ が導出されるので $\bar{T}_0$ は安定である. したがって, $\det J|_{\varepsilon=0}\neq 0$ である. 以上より, ヤコビ行列 (18) が十分小さな ε に対して非特異となるので陰関数定理によって $X_\varepsilon\geq 0$ は存在し, 定理に示された構造をもつ. 解 Y_ε については, 解 X_ε の場合と同様に示すことができるので本論文では省略する.

次に, 補題 2 の 3 つの条件 a1. ∼ a3. が成立することを示す. リカッチ方程式 (16b), (17b) の安定化解 $\bar{X}_{22}$, $\hat{Y}_{22}$ が存在するので $\bar{T}_4$, $\hat{T}_4$ は共に安定である. さらに, 先に述べたように 2 つのリカッチ方程式 (16a), (17a) の安定化解 $\bar{X}_{11}$, $\hat{Y}_{11}$ が存在するので $\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}$, $\hat{A}_0-\hat{Y}_{11}\hat{R}_0^T$ は共に安定であり, 簡単な代数計算から $\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}=\bar{T}_0$, $\hat{A}_0-\hat{Y}_{11}\hat{R}_0^T=\hat{T}_0$ が導出されるので, $\bar{T}_0$, $\hat{T}_0$ も共に安定である. したがって, 関係式

$$\begin{aligned}&A_\varepsilon+\gamma^{-2}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1(B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon+D_{12\lambda}^TC_{1\lambda})\\&=\begin{bmatrix}\bar{T}_1+O(\varepsilon)&\bar{T}_2+O(\varepsilon)\\\varepsilon^{-1}\{\bar{T}_3+O(\varepsilon)\}&\varepsilon^{-1}\{\bar{T}_4+O(\varepsilon)\}\end{bmatrix}\\&A_\varepsilon+\gamma^{-2}Y_\varepsilon C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}-(Y_\varepsilon C_2^T+B_{1\gamma\lambda\varepsilon}D_{21\gamma\lambda}^T)\tilde{D}_2C_2\\&=\begin{bmatrix}\hat{T}_1+O(\varepsilon)&\hat{T}_2+O(\varepsilon)\\\varepsilon^{-1}\{\hat{T}_3+O(\varepsilon)\}&\varepsilon^{-1}\{\hat{T}_4+O(\varepsilon)\}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

を利用すれば, 文献19) の Corollary 3.1 から十分小さな ε に対して, 補題 2 の条件 a1., a2. が成立する.

残りの補題 2 の条件 a3. に対しては,

$$X_\varepsilon Y_\varepsilon=\begin{bmatrix}\bar{X}_{11}\hat{Y}_{11}+O(\varepsilon)&O(1)\\O(\varepsilon)&\bar{X}_{22}\hat{Y}_{22}+O(\varepsilon)\end{bmatrix}$$

が成立するので, 条件 $\rho(\bar{X}_{22}\hat{Y}_{22})<\gamma^2$ 及び $\rho(\bar{X}_{11}\hat{Y}_{11})<\gamma^2$ を考慮すれば十分小さな ε に対して, $\rho(X_\varepsilon Y_\varepsilon)<\gamma^2$ が成立する. □

(注意 1) 行列 $\bar{A}_0$, $\bar{R}_0$, $\bar{Q}_0$ を記述する公式中には, リカッチ方程式 (16b) の解 $\bar{X}_{22}$ が含まれているが, 実際には,

$$\bar{H}_1=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11}&-\bar{R}_{11}\\-\bar{Q}_{11}&-\bar{A}_{11}^T\end{bmatrix},\ \bar{H}_2=\begin{bmatrix}\bar{A}_{12}&-\bar{R}_{12}\\-\bar{Q}_{12}&-\bar{A}_{21}^T\end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_3=\begin{bmatrix}\bar{A}_{21}&-\bar{R}_{12}^T\\-\bar{Q}_{12}^T&-\bar{A}_{12}^T\end{bmatrix},\ \bar{H}_4=\begin{bmatrix}\bar{A}_{22}&-\bar{R}_{22}\\-\bar{Q}_{22}&-\bar{A}_{22}^T\end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_0=\bar{H}_1-\bar{H}_2\bar{H}_4^{-1}\bar{H}_3=\begin{bmatrix}\bar{A}_0&-\bar{R}_0\\-\bar{Q}_0&-\bar{A}_0^T\end{bmatrix}$$

が成立するので, 2 つのリカッチ方程式 (16a), (16b) は独立である[14),17)]. また, $X_{11}=X_{11}^T$, $X_{22}=X_{22}^T$ が成立するので 2 つのリカッチ方程式 (16a), (16b) はともに一般化リカッチ方程式でない通常のリカッチ方程式であり, ε に無関係なので, 要求される解の存在性に対しての判定は容易である. さらに, 文献15) と異なり, 本論文では A_{22} が特異行列であっても 2 つのリカッチ方程式 (16a), (16b) を利用することによってリカッチ方程式 (8a) の準正定対称解 X_ε の存在を判定できる. 2 つのリカッチ方程式 (17a), (17b) に対しても

$$\hat{H}_1=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}^T&-\hat{R}_{11}\\-\hat{Q}_{11}&-\hat{A}_{11}\end{bmatrix},\ \hat{H}_2=\begin{bmatrix}\hat{A}_{21}^T&-\hat{R}_{12}\\-\hat{Q}_{12}&-\hat{A}_{12}\end{bmatrix}$$

$$\hat{H}_3=\begin{bmatrix}\hat{A}_{12}^T&-\hat{R}_{12}^T\\-\hat{Q}_{12}^T&-\hat{A}_{21}\end{bmatrix},\ \hat{H}_4=\begin{bmatrix}\hat{A}_{22}^T&-\hat{R}_{22}\\-\hat{Q}_{22}&-\hat{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\hat{H}_0=\hat{H}_1-\hat{H}_2\hat{H}_4^{-1}\hat{H}_3=\begin{bmatrix}\hat{A}_0^T&-\hat{R}_0\\-\hat{Q}_0&-\hat{A}_0\end{bmatrix}$$

から同様の性質が成り立つ.

4. リアプノフ型再帰的アルゴリズム

定理 1 の条件が成立するとき, 動的フィードバック制御則を得るためにリカッチ方程式 (8) あるいは一般化リカッチ方程式 (10), (11) を解く必要がある. 従来の研究では再帰的アルゴリズム[17),18),21)] の手法を利用した解法が報告されている. しかし, 再帰的アルゴリズムの手法を利用した解法は, 行列をブロック分割して解くために計算手順の増加が大きな問題となる. そこで, 本論文では再帰的アルゴリズム[17),18),21)] に代わる新たなアルゴリズムを提案する. 本論文で提案されるアルゴリズムは, Li ら[22)] によって提案されたリアプノフ型再帰的アルゴリズムと一般化リカッチ方程式の手法[14)] を融合しているため, 再帰的アルゴリズムの手法と異なり, 行列をブロックごとに分割して計算する必要がない. したがって従来の手法を利用した場合と比較して大幅な行列計算の低減化と計算機によるプログラミングの簡略化が可能となる. また, リアプノフ型再帰的アルゴリズムは, 後述のクラインマン型再帰的アルゴリズムと異なり, 適切な初期値を与えれば収束する[21),22)] などの性質をもつ. 以上より, 汎用性が高いアルゴリズムであることからリアプノフ型再帰的アルゴリズム[21),22)] を本論文で使用する.

仮定 1 及び仮定 2 の条件のもと, リカッチ方程式 (8) の解を得るための新たなアルゴリズムを (19) で定義する.

$$\begin{aligned}&[\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}]^TX^{(i+1)}\\&\quad+X^{(i+1)T}[\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}]+X^{(i)T}B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}\\&\quad+\gamma^{-2}X^{(i)T}B_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^TX^{(i)}+\bar{Q}=0\qquad(19a)\end{aligned}$$

$$[\hat{A}-Y^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2]Y^{(i+1)T}+Y^{(i+1)}[\hat{A}-Y^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2]^T+Y^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2Y^{(i)T}+\gamma^{-2}Y^{(i)}C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}Y^{(i)T}+\hat{Q}=0 \quad (19b)$$

初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ は, リアプノフ型再帰的アルゴリズムの特徴を考慮して, ε が十分小さいときのリカッチ方程式 (8) の解 X_ε, Y_ε の近傍解とする．すなわち, 4 つのリカッチ方程式 (16a), (16b), (17a), (17b) が安定かつ準正定対称解をもつような $\gamma=\hat{\gamma}$, $\lambda=\hat{\lambda}$ に対して, 4 つのリカッチ方程式 (16a), (16b), (17a), (17b) を実際に解いた解 $\bar{X}_{11}$, $\bar{X}_{21}$, $\bar{X}_{22}$, $\hat{Y}_{11}$, $\hat{Y}_{12}$, $\hat{Y}_{22}$ を用いて

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix}\bar{X}_{11} & \varepsilon\bar{X}_{21}^T\\ \bar{X}_{21} & \bar{X}_{22}\end{bmatrix},\ Y^{(0)}=\begin{bmatrix}\hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12}\\ \varepsilon\hat{Y}_{12}^T & \hat{Y}_{22}\end{bmatrix} \quad (20)$$

となるように選択する．ここで, $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ は以下の構造で定義される．

$$X^{(i)}=\begin{bmatrix}X_{11}^{(i)} & \varepsilon X_{21}^{(i)T}\\ X_{21}^{(i)} & X_{22}^{(i)}\end{bmatrix},\ X_{11}^{(i)}=X_{11}^{(i)T},\ X_{22}^{(i)}=X_{22}^{(i)T}$$

$$Y^{(i)}=\begin{bmatrix}Y_{11}^{(i)} & Y_{12}^{(i)}\\ \varepsilon Y_{12}^{(i)T} & Y_{22}^{(i)}\end{bmatrix},\ Y_{11}^{(i)}=Y_{11}^{(i)T},\ Y_{22}^{(i)}=Y_{22}^{(i)T}$$

アルゴリズム (19) に関して定理 2 を得る．

《定理 2》　仮定 1, 仮定 2 が成立する条件のもと, 適切な $\gamma=\hat{\gamma}$, $\lambda=\hat{\lambda}$ に対して 4 つのリカッチ方程式 (16a), (16b), (17a), (17b) が安定かつ準正定対称解をもつとする．そのような $\hat{\gamma}$, $\hat{\lambda}$ に対して, リカッチ方程式 (16), (17) の解 $\bar{X}_{11}$, $\bar{X}_{21}$, $\bar{X}_{22}$, $\hat{Y}_{11}$, $\hat{Y}_{12}$, $\hat{Y}_{22}$ を求めて初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ を (20) のように設定すれば, 提案されたアルゴリズム (19) は収束する．また, 収束解を $X^{(\infty)}$, $Y^{(\infty)}$ とおくとき, リカッチ方程式 (8) の解はそれぞれ $X_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^TX^{(\infty)}$, $Y_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}Y^{(\infty)}$ で表現される．さらに収束解は補題 2 の 3 つの条件 a1. ～ a3. を全て満足する．

(証明 2)　まず, 仮定 1 及び仮定 2 の条件のもと, 定理 1 の条件を満足すれば一般化リカッチ方程式 (10), (11) の解 X, Y の存在が保証されるので, アルゴリズム (19) の極限値 $\lim_{i\to\infty}X^{(i)}=\lim_{i\to\infty}X^{(i+1)}=X^{(\infty)}$, $\lim_{i\to\infty}Y^{(i)}=\lim_{i\to\infty}Y^{(i+1)}=Y^{(\infty)}$ が存在すれば $X^{(\infty)}=X$, $Y^{(\infty)}=Y$ である．次に, アルゴリズム (19) が収束することを示す．アルゴリズム (19) をリアプノフ方程式 (21) に変換する．

$$[\bar{A}_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(i)}]^TX_\varepsilon^{(i+1)}+X_\varepsilon^{(i+1)}[\bar{A}_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(i)}]+X_\varepsilon^{(i)}B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(i)}+\gamma^{-2}X_\varepsilon^{(i)}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}B_{1\gamma\lambda\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(i)}+\bar{Q}=0 \quad (21a)$$

$$[\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2]Y_\varepsilon^{(i+1)}+Y_\varepsilon^{(i+1)}[\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2]^T+Y_\varepsilon^{(i)}C_2^T\tilde{D}_2C_2Y_\varepsilon^{(i)}+\gamma^{-2}Y_\varepsilon^{(i)}C_{1\lambda}^TC_{1\lambda}Y_\varepsilon^{(i)}+\Pi_\varepsilon^{-1}\hat{Q}\Pi_\varepsilon^{-T}=0 \quad (21b)$$

ただし

$$X_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^TX^{(i)}=X^{(i)T}\Pi_\varepsilon,\ Y_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}Y^{(i)}=Y^{(i)T}\Pi_\varepsilon^{-T}$$

$$\bar{A}_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}\bar{A},\ \hat{A}_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}\hat{A}$$

$i=0$ のとき, 4 つの行列 $\bar{A}_0-\bar{R}_0X_{11}^{(0)}=\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}$, $\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}X_{22}^{(0)}=\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}$, $\hat{A}_0-Y_{11}^{(0)}\hat{R}_0=\hat{A}_0-\hat{Y}_{11}\hat{R}_0$, $\hat{A}_{22}-Y_{22}^{(0)}\hat{R}_{22}=\hat{A}_{22}-\hat{Y}_{22}\hat{R}_{22}$ が全て安定であるので, 十分小さな ε に対して文献19) の Corollary 3.1 から $\bar{A}_\varepsilon-\bar{R}_\varepsilon X_\varepsilon^{(0)}$, $\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(0)}\hat{R}_\varepsilon$ は共に安定となる．したがって, $\bar{A}_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(0)}$, $\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(0)}C_2^T\tilde{D}_2C_2$ は共に安定となるので[22], リアプノフの方程式の性質から解 $X_\varepsilon^{(1)}$, $Y_\varepsilon^{(1)}$ が存在する[21]．さらに (21) に陰関数定理を適用すれば, 簡単な計算によって

$$X_\varepsilon^{(1)}=\begin{bmatrix}\bar{X}_{11}+\varepsilon E_{11}^{(1)}(\varepsilon) & \varepsilon\{\bar{X}_{21}+\varepsilon E_{21}^{(1)}(\varepsilon)\}^T\\ \varepsilon\{\bar{X}_{21}+\varepsilon E_{21}^{(1)}(\varepsilon)\} & \varepsilon\{\bar{X}_{22}+\varepsilon E_{22}^{(1)}(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$

$$Y_\varepsilon^{(1)}=\begin{bmatrix}\hat{Y}_{11}+\varepsilon F_{11}^{(1)}(\varepsilon) & \hat{Y}_{12}+\varepsilon F_{12}^{(1)}(\varepsilon)\\ \{\hat{Y}_{12}+\varepsilon F_{12}^{(1)}(\varepsilon)\}^T & \varepsilon^{-1}\{\hat{Y}_{22}+\varepsilon F_{22}^{(1)}(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$

が示されるので, 十分小さな ε に対して 4 つの行列 $\bar{X}_{11}$, $\hat{Y}_{11}$, $\bar{X}_{22}$, $\hat{Y}_{22}$ が全て準正定対称解であることを考慮すれば $X_\varepsilon^{(1)}$, $Y_\varepsilon^{(1)}$ は $\varepsilon=0$ の近傍で準正定対称行列であることが示される．$i=1$ のときも $i=0$ と同様にして, 4 つの行列 $\bar{A}_0-\bar{R}_0\bar{X}_{11}$, $\bar{A}_{22}-\bar{R}_{22}\bar{X}_{22}$, $\hat{A}_0-\hat{Y}_{11}\hat{R}_0$, $\hat{A}_{22}-\hat{Y}_{22}\hat{R}_{22}$ が全て安定であるので, 文献19) の Corollary 3.1 から $\bar{A}_\varepsilon-\bar{R}_\varepsilon X_\varepsilon^{(1)}$, $\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(1)}\hat{R}_\varepsilon$ は共に安定となる．すなわち, $\bar{A}_\varepsilon-B_{2\varepsilon}\tilde{D}_1B_{2\varepsilon}^TX_\varepsilon^{(1)}$, $\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(1)}C_2^T\tilde{D}_2C_2$ は共に安定となる[22]．したがって, 十分小さな ε に対して準正定対称解 $X_\varepsilon^{(2)}$, $Y_\varepsilon^{(2)}$ が存在する．以上の操作を帰納的に繰り返せばリアプノフ型再帰的アルゴリズムの性質[21),22)] よりアルゴリズム (19) は収束する．最後に, 全ての $\forall i$ に対して, $\bar{A}_\varepsilon-\bar{R}_\varepsilon X_\varepsilon^{(i)}$, $\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(i)}\hat{R}_\varepsilon$ は共に安定かつ $\rho(X_\varepsilon^{(i)}Y_\varepsilon^{(i)})<\gamma^2$ を満たすことを示す．全ての $\forall i$ に対して, 陰関数定理より関係式 $\|X^{(0)}-X^{(i)}\|=O(\varepsilon)$, $\|Y^{(0)}-Y^{(i)}\|=O(\varepsilon)$ が示されるので, これらの関係式を利用すれば, 定理 1 の証明のときと同様な計算をすることによって以下を得る．

$$\bar{A}_\varepsilon-\bar{R}_\varepsilon X_\varepsilon^{(i)}=\begin{bmatrix}\bar{T}_1+O(\varepsilon) & \bar{T}_2+O(\varepsilon)\\ \varepsilon^{-1}\{\bar{T}_3+O(\varepsilon)\} & \varepsilon^{-1}\{\bar{T}_4+O(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_\varepsilon-Y_\varepsilon^{(i)}\hat{R}_\varepsilon=\begin{bmatrix}\hat{T}_1+O(\varepsilon) & \hat{T}_2+O(\varepsilon)\\ \varepsilon^{-1}\{\hat{T}_3+O(\varepsilon)\} & \varepsilon^{-1}\{\hat{T}_4+O(\varepsilon)\}\end{bmatrix}$$

$$X_\varepsilon^{(i)}Y_\varepsilon^{(i)}=\begin{bmatrix}\bar{X}_{11}\hat{Y}_{11}+O(\varepsilon) & O(1)\\ O(\varepsilon) & \bar{X}_{22}\hat{Y}_{22}+O(\varepsilon)\end{bmatrix}$$

定理 1 の証明と同様に, 4 つの行列 $\bar{T}_4$, $\hat{T}_4$ $\bar{T}_0$, $\hat{T}_0$ が全て安定であることと文献19) の Corollary 3.1 から, 十分小さな ε 及び全ての $\forall i$ に対して, $X_\varepsilon^{(i)}$, $Y_\varepsilon^{(i)}$ は補題 2 の 3 つの条件 a1. ～ a3. を全て満足する．以上から収束解 $X_\varepsilon^{(\infty)}$, $Y_\varepsilon^{(\infty)}$ も補題 2 の 3 つの条件を全て満足することが分かる．　□

(注意 2)　一般化リカッチ方程式 (10), (11) には摂動項 ε が含まれている．しかし, 通常のリカッチ方程式 (8) と異なり,

ε^{-1} は含んでいないので ε が十分小さくても計算機による求解に支障はない．さらに X, Y は共に非対称行列なので ε が十分小さくても X の X_{11}, X_{21}, X_{22} ブロックは摂動項 ε に吸収されることなく求めることが可能である．詳しく説明すれば, 通常のリカッチ方程式 (8a) の解 X_ε と一般化リカッチ方程式 (10a) の解 X の構造には

$$X_\varepsilon=\begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ \varepsilon X_{21} & \varepsilon X_{22}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} X_{11} & \varepsilon X_{21}^T \\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$$

の違いがある．ε が十分小さいとき, 解 X_ε は摂動項 ε の影響のために $\varepsilon X_{21}=O(\varepsilon)$, $\varepsilon X_{22}=O(\varepsilon)$ となるのので X_{11} の情報しか得られない．しかし, 解 X の場合, 摂動項 ε が十分小さくても X_{11}, X_{21}, X_{22} すべての情報を得ることができる特徴をもつ．この特徴は, 一般化リカッチ方程式 (11a) にも存在する．

方程式 (19a) 及び (21a), (19b) 及び (21b) は互いに等価な線形方程式である．例えば, 実際に一般化リアプノフ方程式 (19a) を列展開した連立 1 次方程式 (22) はリアプノフ方程式 (21a) を列展開した連立 1 次方程式と同一となる．

$$\begin{aligned}&[I_n\otimes\{\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}\}^T]\cdot\mathrm{cs}\,[X^{(i+1)}]\\&+[\{\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}\}^T\otimes I_n]\cdot\mathrm{cs}\,[X^{(i+1)T}]\\&+\mathrm{cs}[X^{(i)T}B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}\\&+\gamma^{-2}X^{(i)T}B_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^TX^{(i)}+\bar{Q}]=0\end{aligned}\tag{22}$$

ここで, 連立 1 次方程式 (22) は, 全ての $\forall i$ に対して ε が十分小さければ $\Pi_\varepsilon^{-1}[\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}]$ が常に安定であるから直接的に解くことが可能である[23]．

リアプノフ型再帰的アルゴリズムに現れるリアプノフ方程式 (19a) を解く場合, 連立 1 次方程式 (22) を解く方法が考えられる．しかし, $\mathrm{cs}[X^{(i+1)}]$ に摂動項 ε を含むため, 直接解くことは解のオーダの違いから困難である．そこで, 従来の手法と異なり, 摂動項 ε を未知数 $\mathrm{cs}[X^{(i+1)}]$ に含めないように一次元連立方程式を解くことが考えられる．例えば, システム (1) の次数が $n_1=n_2=1$ の場合, 連立 1 次方程式 (22) を以下のように等価変形して解けば十分小さな ε に対して安定に解を求めることが可能となる(注2)．

$$A_\alpha x=B_\beta\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}2\alpha_{11} & 2\alpha_{21} & 0\\ \alpha_{12} & \varepsilon\alpha_{11}+\alpha_{22} & \alpha_{21}\\ 0 & 2\varepsilon\alpha_{12} & 2\alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11}^{(i+1)}\\X_{21}^{(i+1)}\\X_{22}^{(i+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11}\\\beta_{21}\\\beta_{22}\end{bmatrix}$$

ただし

$$\bar{A}-B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&X^{(i)T}B_2\tilde{D}_1B_2^TX^{(i)}\\&\quad+\gamma^{-2}X^{(i)T}B_{1\gamma\lambda}B_{1\gamma\lambda}^TX^{(i)}+\bar{Q}=-\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{21}\\\beta_{21}&\beta_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(注2) $\varepsilon>0$ であるとき, 線形方程式 $A_\alpha x=B_\beta$ は (22) と等価であるので, A_α は十分小さな ε に対しても非特異である．

なお, システム (1) の次数が一般の $n=n_1+n_2$ の場合にも拡張可能である[23]．

アルゴリズム (19) はリアプノフ型再帰的アルゴリズム[21),22)] に基づいている．一方, 良く知られているリカッチ方程式を逐次的に解く方法に, クラインマン型再帰的アルゴリズム[21] が挙げられる．一般化リカッチ方程式 (10), (11) に対応するクラインマン型再帰的アルゴリズムによる解法を (23) に与える．

$$\begin{aligned}&[\bar{A}-\bar{R}X^{(i)}]^TX^{(i+1)}+X^{(i+1)T}[\bar{A}-\bar{R}X^{(i)}]\\&\quad+X^{(i)T}\bar{R}X^{(i)}+\bar{Q}=0\end{aligned}\tag{23a}$$

$$\begin{aligned}&[\hat{A}-Y^{(i)}\hat{R}]Y^{(i+1)T}+Y^{(i+1)}[\hat{A}-Y^{(i)}\hat{R}]^T\\&\quad+Y^{(i)}\hat{R}Y^{(i)T}+\hat{Q}=0\end{aligned}\tag{23b}$$

クラインマン型再帰的アルゴリズムはニュートン法であることが示されており, 適切な初期値を与えれば収束速度が早く安定であるなどの特徴をもつ．反対に, リアプノフ型再帰的アルゴリズムと異なり, 初期値が適切でない場合や, 方程式に凸性が保証されない場合, 発散するなどの特徴も有する．本論文で扱っている一般化リカッチ方程式 (10), (11) は LQG 理論で見られるリカッチ方程式と異なり, パラメータ γ を含むため凸性が保証されていない．したがって, γ の値によってはアルゴリズム (23) が発散する場合があるので, 安易なアルゴリズム (23) の使用は危険である．しかし, 定理 1 で得られた解 X_ε, Y_ε の構造から得られる関係式 $\|X-X^{(0)}\|=O(\varepsilon)$, $\|Y-Y^{(0)}\|=O(\varepsilon)$ に注目して, $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ が X, Y に対して $\varepsilon=0$ のまわりでの近傍解であるので, 初期値をアルゴリズム (19) と同じ (20) に設定すれば, 十分小さな ε に対して収束することがわかる．実際に 5 章の数値例で確認する．

5. 数 値 例

簡単な数値例に対して 4 章で提案されたアルゴリズム (19) を適用し, 動的フィードバック制御則 (9) を設計する．特異摂動システムは以下の (24) で与えられる．

$$\begin{aligned}\Pi_\varepsilon\dot{x}(t)=&\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}\Delta(t)\begin{bmatrix}0&0.1\end{bmatrix}\right)\\&\cdot x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}w(t)+\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right.\\&\left.+\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}\Delta(t)\right)u(t),\quad x(0)=0\end{aligned}\tag{24a}$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x(t)+u(t)\tag{24b}$$

$$\begin{aligned}y(t)=&\left(\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}+\Delta(t)\begin{bmatrix}0&0.1\end{bmatrix}\right)x(t)\\&+w(t)\end{aligned}\tag{24c}$$

ただし, $\Delta(t)$ はスカラ関数であるノルム有界型の不確定要素であり, $|\Delta(t)|\le 1$ を満たす．さらに $\varepsilon=0.0001$ である．

本論文の数値例では, 不確定要素を除いたノミナルシステ

ムの係数行列 A_{22} が $A_{22}=0$ である非標準特異摂動システムなので, 文献10) の結果は適用できない. したがって, 従来の方法ではロバスト H_∞ 制御できないことに注意を要する. 補題1より特異摂動システム (24) の代わりに特異摂動システム (7) に相当する不確定要素を含まない非標準特異摂動システム (25) に対して H_∞ 制御則の設計を行う.

$$\Pi_\varepsilon \dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1\cdot\gamma\lambda \end{bmatrix} w_e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0)=0 \tag{25a}$$

$$z_e(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1\cdot\lambda^{-1} \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^{-1} \end{bmatrix} u(t) \tag{25b}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 1 & \gamma\lambda \end{bmatrix} w_e(t) \tag{25c}$$

$\hat{\lambda}=1.0$, $\hat{\gamma}=3.0$ と設定したとき, ε に依存しない4つのリカッチ方程式 (16b), (17b) (16a), (17a) は $\rho(\bar{X}_{22}\hat{Y}_{22})<\hat{\gamma}^2$, $\rho(\bar{X}_{11}\hat{Y}_{11})<\hat{\gamma}^2$ を満足するような準正定対称安定化解 $\bar{X}_{22}\geq 0$, $\hat{Y}_{22}\geq 0$, $\bar{X}_{11}\geq 0$, $\hat{Y}_{11}\geq 0$ をそれぞれもつ. したがって, 定理1より ε を含む2つのリカッチ方程式 (8a), (8b) は $\lambda=\hat{\lambda}=1.0$, $\gamma=\hat{\gamma}=3.0$ であるとき準正定対称解 $X_\varepsilon\geq 0$, $Y_\varepsilon\geq 0$ をもつことがわかる. ところで, 特異摂動システム (25) に対して $\hat{\lambda}=1.0$, $\hat{\gamma}=3.0$ と設定したときの H_∞ 制御可能な γ の下限値は 1.6064 である. したがって, $\gamma=\hat{\gamma}=3.0$ ならば2つのリカッチ方程式 (8a), (8b) は準正定対称解をもつことから定理1の十分条件が成立することが確認できる.

新たに提案されたアルゴリズム (19) を利用して2つのリカッチ方程式 (8a), (8b) の解を求める. まず, 初期値 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ は, $\hat{\lambda}=1.0$, $\hat{\gamma}=3.0$ として, ε に依存しない4つのリカッチ方程式 (16b), (17b) (16a), (17a) を実際に解くことによって以下のように得られる.

$$X^{(0)}=\begin{bmatrix} 2.3196481\times 10^{-1} & 3.0692535\times 10^{-4} \\ 3.0692535 & 4.2995734\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$Y^{(0)}=\begin{bmatrix} 2.5876900 & 6.9382513 \\ 6.9382513\times 10^{-4} & 1.4048341 \end{bmatrix}$$

アルゴリズム (19) の収束判定を

$$\max\{\|X^{(i+1)}-X^{(i)}\|,\ \|Y^{(i+1)}-Y^{(i)}\|\}<10^{-14}$$

としたとき, アルゴリズム (19) を利用すれば12回の繰り返し計算によって2つの収束解 $X^{(12)}$, $Y^{(12)}$ が得られる.

$$X^{(12)}=\begin{bmatrix} 2.3499449\times 10^{-1} & 3.0692535\times 10^{-4} \\ 3.0692535 & 4.7566039\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$Y^{(12)}=\begin{bmatrix} 2.5881188 & 6.9337525 \\ 6.9337525\times 10^{-4} & 1.4055482 \end{bmatrix}$$

したがって, リカッチ方程式 (8a), (8b) の解 X_ε, Y_ε は $X_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^T X^{(12)}$, $Y_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}Y^{(12)}$ で求められる. 提案されたアルゴリズム (19) を利用して得られた解の精度を確認するため, $X_\varepsilon^{(12)}=\Pi_\varepsilon^T X^{(12)}$, $Y_\varepsilon^{(12)}=\Pi_\varepsilon^{-1}Y^{(12)}$ を (8) に代入して残差を求める.

$$\|F_1(X_\varepsilon^{(12)})\|=8.93\times 10^{-16},\ \|F_2(Y_\varepsilon^{(12)})\|=3.33\times 10^{-16}$$

以上から, 得られた解が 1.0×10^{-15} オーダの精度であることが確認される. また, 簡単な計算により補題2の3つの条件 a1. ～ a3. を全て満足することが確認される.

ところで, アルゴリズム (23) の収束判定をアルゴリズム (19) の収束判定と同じに設定した条件のもと, アルゴリズム (23) を利用した場合, 3回の繰り返し計算で収束した. ここで, アルゴリズム (23) で得られた収束解はアルゴリズム (19) で得られた収束解と比較して, 同程度の精度 (10^{-15} オーダ) を有することを確認した.

最後に, 解 $X_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^T X^{(12)}$, $Y_\varepsilon=\Pi_\varepsilon^{-1}Y^{(12)}$ を利用して, 実際に動的フィードバック制御則 (9) を構築すれば (26) になる.

$$\Pi_\varepsilon\dot{\xi}(t)=\begin{bmatrix} -4.3104 & -0.6442 \\ -1.5456 & -0.4047 \end{bmatrix}\xi(t) + \begin{bmatrix} 1.6278 \\ 0.3334 \end{bmatrix} y(t) \tag{26a}$$

$$u(t)=-\begin{bmatrix} 2.0346 & 0.0738 \end{bmatrix}\xi(t) \tag{26b}$$

まず, システム (24) を拡張したシステム (25) に動的フィードバック制御則 (26) を組み合わせたときの閉ループ伝達関数 $G_e(s)$ の H_∞ ノルムは $\|G_e(s)\|_\infty=2.4613$ であるので設計仕様 $\gamma=3.0$ を満足していることが分かる. 次に, $\Delta(t)\equiv 0$ のときのシステム (24) に動的フィードバック制御則 (26) を組み合わせたときの閉ループ伝達関数 $G_{\delta 0}(s)$ の H_∞ ノルムは $\|G_{\delta 0}(s)\|_\infty=1.0246$ である. 同様にして, $\Delta(t)\equiv 1$, $\Delta(t)\equiv -1$ であるときの閉ループ伝達関数 $G_{\delta+}(s)$, $G_{\delta-}(s)$ の H_∞ ノルムの値はそれぞれ $\|G_{\delta+}(s)\|_\infty=1.0591$, $\|G_{\delta-}(s)\|_\infty=1.2563$ である. 以上から, 3つの特殊な不確定要素 $\Delta(t)$ に対して設計仕様 $\hat{\gamma}=3.0$ を満足していることが確認できる. 最後に, ロバスト安定性を確認する. システム (24) に動的フィードバック制御則 (26) を組み合わせたときの閉ループ系の状態行列 $\mathcal{A}_c$ を定義する.

$$\mathcal{A}_c=\begin{bmatrix} A_\varepsilon+\Delta A_\varepsilon(t) & \{B_{2\varepsilon}+\Delta B_{2\varepsilon}(t)\}K_\varepsilon \\ L_\varepsilon\{C_{2\varepsilon}+\Delta C_{2\varepsilon}(t)\} & A_{c\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$\Delta(t)\equiv 0$, $\Delta(t)\equiv 1$, $\Delta(t)\equiv -1$ のときの状態行列 $\mathcal{A}_c$ の極 v_0, v_+, v_- はそれぞれ以下のように計算される.

$$v_0=-\begin{bmatrix} 3301.6 & 730.6 & 17.2 & 2.2 \end{bmatrix}$$

$$v_+=-\begin{bmatrix} 3122.8 & 803.4 & 23.6 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$v_-=-\begin{bmatrix} 3452.8 & 685.5 & 10.2 & 3.0 \end{bmatrix}$$

以上から, 3つの特殊な不確定要素 $\Delta(t)$ に対して, 閉ループ系の極は全て安定であることが確認できる.

6. ま と め

本論文では，不確定要素を含む非標準特異摂動システムに対するロバスト H_∞ 制御問題を扱った．文献10) で得られた結果と比較して，本論文では，システムの状態行列の全てのブロックにノルム有界型時変不確定要素が存在し，かつ A_{22} は非特異であると仮定しないのでシステムに対する拘束条件が緩和である．したがって，より現実的なシステムに対して制御則が設計可能である．さらに，制御則が存在するための十分条件を摂動項 ε に無関係に導出した．また，摂動項 ε を含むリカッチ方程式に対して，再帰的アルゴリズム[17),18),21)]に代わる新たなアルゴリズムを提案した．その結果，従来と異なり行列をブロックごとに分割して計算する必要がないため大幅な計算手順の簡略化が可能である．最後に，数値例によって，新たなアルゴリズムの有用性を確認した．

参 考 文 献

1) I.R.Petersen: A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems, Systems & Control Letters, **8**, 351/357 (1987)
2) I.R.Petersen and C.V.Hollot: A Riccati Equation Approach to the Stabilization of uncertain linear systems, Automatica. **22**–4, 397/411 (1986)
3) K.Zhou and P.P.Khagonekar: Robust Stabilization of Linear Systems with Norm Bounded Time–varing Uncertainty, Systems & Control Letters, **10**, 17/20 (1988)
4) P.P.Khargonekar, I.R.Petersen and K.Zhou: Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stability and H_∞ Control Theory, IEEE Trans. Automatic Control, **35**–3, 356/3611 (1990)
5) M.Sampei, T.Mita, and M.Nakamichi: An Algebraic Approach to H_∞ Output Feedback Control Problems, Systems & Control Letters, **14**, 13/24 (1990)
6) L.Xie and C.E. de Souza: Robust H_∞ Control for Linear Systems with Norm–Bounded Time–Varing Uncertainty, IEEE Trans. Automatic Control, **37**–8, 1188/1191 (1992)
7) L.Xie, M.Fu, and C.E. de Souza: H_∞ Control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty Via Output Feedback, IEEE Trans. Automatic Control, **37**–8, 1253/1256 (1992)
8) K.Gu: H_∞ Control of Systems Under Norm Bounded Uncertainties in all System Matrices, IEEE Trans. Automatic Control, **39**–6, 1320/1322 (1994)
9) L.Xie: Output Feedback H_∞ Control of Systems with Parameter Uncertainty, Int. J. Control, **63**–4, 741/750 (1996)
10) P.Shi, S.P.Shue, and R.K.Agarwal: Robust Disturbance Attenuation with Stability for a Class of Uncertain Singularly Perturbed Systems, Uncertainty, Int. J. Control, **70**–6, 873/891 (1998)
11) K.G.Garcia, J.Daafouz, and J.Bernussou: H_2 Guaranteed Cost Control for Singularly Perturbed Uncertain Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **43**–9, 1323/1329 (1998)
12) M.Corless, F.Garofalo, and L.Glielmo: New results on composite Control of singularly perturbed uncertain linear systems, Automatica, **29**–2, 387/400 (1993).
13) H.Z.Shao and M.E.Sawan: Robust Stability of Singularly Perturbed Systems, Int. J. Control, **58**–6, 1469/1476 (1993)
14) W.Tan, T.Leung, and Q.Tu: H_∞ Control for Singularly Perturbed Systems, Automatica, **34**–2, 255/260 (1998).
15) V.Dragan: Asympotic Expansions for Game–Theoretic Riccati Equations and Stabilization with Disturbance Attenuation for Singularly Perturbed Systems, Systems & Control Letters, **20**, 455/463 (1993)
16) Z.Pan and T.Basar: H_∞–Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part II. Imperfect State Measurements, IEEE Trans. Automatic Control, **39**–2, 230/299 (1994)
17) H.Mukaidani, H.Xu, and T.Okita: Robust Stabilization of Non–Standard Singularly Perturbed Systems with Uncertainties, IFAC World Congress, **G** 151/156 Beijing, (1999).
18) H.Mukaidani, H.Xu and K.Mizukami: Recursive Approach of H_∞ Control Problems for Singularly Perturbed Systems Under Perfect and Imperfect State Measurements, Int. J. Systems Science, **30**–5, 467/477 (1999)
19) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly: Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design ; Academic Press (1986)
20) H.K.Khalil: Feedback Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **34**–10, 1052/1060 (1989)
21) Z.Gajic and M.T.J Qureshi : Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control, Mathematics in Science and Engineering, Vol.195, Academic Press (1995)
22) T.Li and Z.Gajic : Lyapunov Iterations for Solving Coupled Algebraic Lyapunov Equations of Nash Differential Games and Algebraic Riccati Equations of Zero–Sum Games, Proc. 6th Int. Symp. on Dynamic Games and Application, Canada, 489/494 (1994)
23) 安藤，田沼：数値解析手法による制御系設計，計測自動制御学会 (1993)

［著 者 紹 介］

向 谷 博 明（正会員）

1994 年 4 月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了．97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了．博士(工学)．98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手．現在に至る．主として，ロバスト制御，アルゴリズムに関する研究に従事．電気学会および機械学会会員．

小 林 康 秀（正会員）

1979 年 3 月九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程前期修了．同年 4 月山口大学工学部助手．1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部助教授となり現在に至る．工学博士．主として，システム同定の研究に従事．電子情報通信学会および電気学会会員．

沖 田 豪（正会員）

1964 年 3 月東北大学大学院工学研究科修士課程修了．同年 4 月広島大学工学部助手．同講師，助教授を経て，1978 年 4 月山口大学工学部教授．1995 年 4 月から広島市立大学情報科学部教授となり現在に至る．工学博士．主として，システム同定の研究に従事．電気学会およびシステム制御情報学会会員．