

不確定特異摂動システムの準最適コスト保証制御†

向谷 博明*・新田 智昭*・土橋 宜典**

Suboptimal Guaranteed Cost Control of Singularly Perturbed Uncertain Systems

Hiroaki MUKAIDANI*, Tomoaki NITTA* and Yoshinori DOBASHI**

In this paper, we study the guaranteed cost control for singularly perturbed systems with uncertainties. This is an extension of the work by Mukaidani et al.¹⁶⁾ in the sense that the state and input matrices are allowed to be uncertain. A new method for decision of construction parameter in a controller is presented. We propose the ε -independent controller for the guaranteed cost control by solving the reduced-order algebraic Riccati equations and the Lyapunov equations only. Therefore, it is easy to construct the stabilizing controller for sufficient small ε because we need not solve the full-order algebraic Riccati equation or separate the slow and fast subsystems based on the existing method. On the other hand, when the parameter ε is not too small, we apply the exact decomposition technique to this problem. We newly show that the exact decomposition technique has property of quadratic convergence and that there exists a unique solution of the Riccati equation in the subset sufficiently close to the initial guess. A numerical example is given to show the potential of the proposed technique.

Key Words: guaranteed cost control, singularly perturbed uncertain systems, ε -independent controller, exact decomposition technique

1. はじめに

近年、不確定要素を含む動的システムに対して、コスト保証制御が提案されている^{1),2)}。コスト保証制御の特徴は、不確定要素を含む場合でも、評価関数の上限を最小にし、かつ2次安定性を保証するような制御則が構築できる点である。後に、不確定要素を含む特異摂動システムに対して、コスト保証制御を基礎に H_2 コスト保証制御が提案されている^{3),4)}。しかしながら、扱われている特異摂動システムには、システムの制御部分を表す行列に不確かさが含まれていないので、実システムの適用には問題点が残る。特に、文献3)で仮定されている以下の条件、“状態を表す行列のみに不確かさが存在し、かつ不確定要素は時不変である”は保守的である。さらに、 H_2 ノルムの計算には、正の微少摂動項 ε を含むリカッチ方程式を解く必要がある。この問題に対しては文献3), 4)の中では何ら検討されていない。

本論文では、著者ら¹⁶⁾の結果を拡張する。すなわち、状態

部分および制御部分を表す行列の両方に不確かさを含む特異摂動システムに対して、コスト保証制御理論¹⁾を適用する。本論文の主要な結果は以下の2つである。第一に、従来の結果¹⁶⁾と異なり、制御則の設計パラメータの決定方法を新たに提案する。詳しくは、正の微少摂動項 ε を含むリカッチ方程式の解の固有和を直接利用するかわりに、摂動項に関する解の固有和 (Trace) の近似式を利用して設計パラメータを決定する。固有和の近似式の計算として、近似の程度にあわせ、摂動項 ε に依存しない低次元化された1つのリカッチ方程式の解を利用する場合と、摂動項 ε に依存しない低次元化された2つのリカッチ方程式、1つのリアプノフ方程式、および1つの代数方程式の解を利用する場合の2つの手法を提案する。特に、前者の近似においては、摂動項が既知でない場合でも、設計パラメータが決定できる。したがって、計算手順の大幅な簡略化が期待できる。第二に、厳密分解法 (the exact decomposition technique)^{9),10)}に現れるアルゴリズムの性質を明らかにする。厳密分解法の特徴は、slow system または fast system と同次元の4つのシルベスタ方程式を繰り返し解くことによって、リカッチ方程式の正確解が得られる点である。さらに、アルゴリズムの一部はニュートン法に基づいているので、収束の度合いが速い点である。本論文では、Newton-Kantorovich Theorem²⁰⁾を利用することによって、従来の研究^{9)~11)}で示されていなかった2次収束の性質を新たに定式化する。また、解を得るための3つの行列非線形方程式の解が、初期値の近傍で唯一であることを新

† 第39回計測自動制御学会学術講演会で一部発表 (2000・7)

* 広島市立大学大学院情報科学研究科 広島市安佐南区大塚東3-4-1

** 北海道大学大学院工学研究科 札幌市北区北13条西8丁目

* Graduate School of Information Sciences, Hiroshima City University, 3-4-1 Ozuka-Higashi, Asaminami-ku, Hiroshima, Japan

** Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Kita-ku, Kita 13, Nishi 8, Sapporo, Japan
(Received June 21, 2000)

(Revised June 21, 2000)

規に示す。この性質は、非線形方程式の要求される解が唯一であることを保証するもので、理論的に重要である。数値例では、まず、固有和の近似式の有用性を実証する。続いて、本論文で得られた厳密分解法の特性を確認する。

2. コスト保証制御

以下のようなノルム有界型不確定要素を含む特異摂動システム (1) を考える¹⁾。

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} + \Delta A_{11}(t)]x_1(t) + [A_{12} + \Delta A_{12}(t)]x_2(t) + [B_1 + \Delta B_1(t)]u(t), \quad x_1(0) = x_1^0 \quad (1a)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) = [A_{21} + \Delta A_{21}(t)]x_1(t) + [A_{22} + \Delta A_{22}(t)]x_2(t) + [B_2 + \Delta B_2(t)]u(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \quad (1b)$$

$$z(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + Du(t) \quad (1c)$$

$$J = \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt = \|z(t)\|_2^2 \quad (1d)$$

ここで、システム (1b) 中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ、 $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i}$ ($i = 1, 2$) は状態ベクトル、 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ は制御入力、 $z(t) \in \mathbf{R}^l$ は制御量であり、ノルム有界型時変不確定要素は以下のマッチング条件を満足する。

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) & \Delta B_1(t) \\ \Delta A_{21}(t) & \Delta A_{22}(t) & \Delta B_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{a1} \\ H_{a2} \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} E_{a1} & E_{a2} & E_b \end{bmatrix}$$

ただし、 $\Delta(t) \in \mathbf{R}^{p \times s}$ は $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I_s$ を満たす各要素がルバーク可測である未知の時間関数行列である。また、各係数行列は適当な次元をもつと仮定する。本論文ではシステム (1) において、 A_{22} が非特異であると仮定しない。

(注意1) A_{22} が非特異であると仮定しない特異摂動システムに対して、prefeedback $u(t) = Fx_2(t) + v(t)$ を付加することによって、fast system を非特異化する手法が提案されている⁷⁾。しかしながら、不確定要素を含む特異摂動システムに対して、prefeedback の利用は困難である。その理由として、prefeedback を利用しても不確定要素 $\Delta A_{22}(t)$ 、 $\Delta B_2(t)$ の影響のため、閉ループシステム $A_{22} + B_2 F + \Delta A_{22}(t) + \Delta B_2(t) F$ が非特異にならない場合が存在するからである。そこで、システムに含まれる不確定要素に対し、 H_∞ ノルムによる上限を設定して $A_{22} + B_2 F + \Delta A_{22}(t) + \Delta B_2(t) F$ が非特異にならないように設計する手法が提案されている⁸⁾。しかしながら、不確定要素に対して新たな仮定が必要となる。prefeedback の利用が困難であるその他の理由として、コスト保証制御¹⁾を適用する場合、保証されるコストがフィードバックゲイン F に依存する。したがって、 F と無関係に、保証されるコストが決定できるという厳密な証明が必要となる。以上の考察より、prefeedback による特異摂動法の使用は、制御則が容易に構築できないので困難である。

ここで、以下の行列を定義する。

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^n, \quad n = n_1 + n_2$$

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} A_{21} & \varepsilon^{-1} A_{22} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_\varepsilon = \begin{bmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1} B_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_{11}(t) & \Delta A_{12}(t) \\ \varepsilon^{-1} \Delta A_{21}(t) & \varepsilon^{-1} \Delta A_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Delta B_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \Delta B_1(t) \\ \varepsilon^{-1} \Delta B_2(t) \end{bmatrix}$$

$$H_{a\varepsilon} = \begin{bmatrix} H_{a1} \\ \varepsilon^{-1} H_{a2} \end{bmatrix}, \quad H_a = \begin{bmatrix} H_{a1} \\ H_{a2} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times p}$$

$$E_a = \begin{bmatrix} E_{a1} & E_{a2} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{s \times n}$$

したがって、不確定特異摂動システム (1) は、以下の等価な不確定特異摂動システム (2) に書き換えることができる。

$$\dot{x}(t) = [A_\varepsilon + \Delta A_\varepsilon(t)]x(t) + [B_\varepsilon + \Delta B_\varepsilon(t)]u(t), \quad x(0) = x^0 \quad (2a)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2b)$$

ただし、 $\Delta A_\varepsilon(t) = H_{a\varepsilon} \Delta(t) E_a$ 、 $\Delta B_\varepsilon(t) = H_{a\varepsilon} \Delta(t) E_b$ 。

システム (2) に対して、以下の仮定を導入する^{1), 3)}。

- [仮定1] 1) 行列対 $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ が $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ ($\varepsilon^* > 0$) を満たすすべての ε に対して可安定となる ε^* が存在する。
2) 行列対 (A_{22}, B_2) は可安定である。
3) $C^T D = 0$, $D^T D > 0$ 。

コスト保証制御 (文献1) 参照) に対して、仮定1 が成り立つとき、以下の補題が知られている^{1), 3)}。

[補題1] 以下のリカッチ方程式を考える。

$$\begin{aligned} & [A_\varepsilon - B_\varepsilon \bar{R} E_b^T E_a]^T P_\varepsilon + P_\varepsilon [A_\varepsilon - B_\varepsilon \bar{R} E_b^T E_a] \\ & + \mu P_\varepsilon H_{a\varepsilon} H_{a\varepsilon}^T P_\varepsilon - \mu P_\varepsilon B_\varepsilon \bar{R} B_\varepsilon^T P_\varepsilon \\ & + \frac{1}{\mu} E_a^T [I_s - E_b \bar{R} E_b^T] E_a + R_1 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $R_1 = C^T C$, $R_2 = D^T D$, $\bar{R} = (\mu R_2 + E_b^T E_b)^{-1}$ 。仮定1のもと、ある正定数 μ に対して、リカッチ方程式 (3) の正定対称解

$$P_\varepsilon = P_\varepsilon(\mu) = \begin{bmatrix} P_{11}(\varepsilon, \mu) & \varepsilon P_{21}(\varepsilon, \mu)^T \\ \varepsilon P_{21}(\varepsilon, \mu) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon, \mu) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$P_{11}(\varepsilon, \mu) = P_{11}(\varepsilon, \mu)^T, \quad P_{22}(\varepsilon, \mu) = P_{22}(\varepsilon, \mu)^T$$

が存在すると仮定する。さらに制御則

$$\begin{aligned} u_{exa}(t) &= -\bar{R}[\mu B_\varepsilon^T P_\varepsilon(\mu) + E_b^T E_a]x(t) \\ &= K_{exa}x(t) \end{aligned} \quad (5)$$

を考える。このとき、ある与えられた $\delta > 0$ に対して、不確定

特異摂動システム (1) は 2 次安定かつ $J \leq x^{0T} \tilde{P}_\varepsilon x^0$ を実現させるような $P_\varepsilon < \tilde{P}_\varepsilon < P_\varepsilon + \delta I_n$ を満たす $\tilde{P}_\varepsilon$ が存在する. すなわち, 制御則 (5) は 2 次コスト保証制御則となり, 不確定特異摂動システム (1) は 2 次コスト保証制御則 (5) によって $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I_s$ を満たす不確定要素に対して 2 次安定である.

文献1), 3), 4) では設計パラメータ μ の決定に際し, $x(0)$ を $E[x(0)^T x(0)] = I_n$ (ただし $E[\cdot]$ は期待値を表す.) で表現できる平均 0 であるランダムなベクトルと仮定して, $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ が最小となる μ を設計パラメータとして選択することを提案している. したがって, 本論文で考える問題は以下のように述べるができる.

[問題 A] 拘束条件であるリカッチ方程式 (3) の正定対称安定化解 $P_\varepsilon(\mu)$ に対して, $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ が最小となる μ を決定せよ. すなわち,

$$\mu^* = \underset{\mu}{\text{Arg min}} \text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)] \quad (6a)$$

$$\rho = \underset{\mu}{\min} \text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)] \quad (6b)$$

2.1 可解条件

まず, リカッチ方程式 (3) の安定化解の存在条件を考える. 従来と全く同様な手順^{16), 18)} に基づいて, まず, (4) で定義される解 $P_\varepsilon(\mu)$ をリカッチ方程式 (3) に代入する. 次に分割計算した後, $\varepsilon = 0$ とおき, 多少の代数計算を行えば以下の 0-オーダー方程式 (7) が得られる. ただし, リカッチ方程式 (7c) は正定対称安定化解をもつと仮定する^{16), 18)}.

$$\bar{A}_0^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11} \bar{A}_0 - \bar{P}_{11} \bar{S}_0 \bar{P}_{11} + \bar{Q}_0 = 0 \quad (7a)$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \quad (7b)$$

$$\bar{A}_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22} \bar{A}_{22} - \bar{P}_{22} \bar{S}_{22} \bar{P}_{22} + \bar{Q}_{22} = 0 \quad (7c)$$

ただし

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_{11} + N_1 \bar{A}_{21} + \bar{S}_{12} N_2^T + N_1 \bar{S}_{22} N_2^T$$

$$\bar{S}_0 = \bar{S}_{11} + N_1 \bar{S}_{12}^T + \bar{S}_{12} N_1^T + N_1 \bar{S}_{22} N_1^T$$

$$\bar{Q}_0 = \bar{Q}_{11} - N_2 \bar{A}_{21} - \bar{A}_{21}^T N_2^T - N_2 \bar{S}_{22} N_2^T$$

$$N_2^T = \Lambda_4^{-T} \bar{q}_{12}^T, N_1^T = -\Lambda_4^{-T} \Lambda_2^T$$

$$\Lambda_1 = \bar{A}_{11} - \bar{S}_{11} \bar{P}_{11} - \bar{S}_{12} \bar{P}_{21}$$

$$\Lambda_3 = \bar{A}_{21} - \bar{S}_{12}^T \bar{P}_{11} - \bar{S}_{22} \bar{P}_{21}$$

$$\Lambda_2 = \bar{A}_{12} - \bar{S}_{12} \bar{P}_{22}, \Lambda_4 = \bar{A}_{22} - \bar{S}_{22} \bar{P}_{22}$$

$$\bar{q}_{12} = \bar{Q}_{12} + \bar{A}_{21}^T \bar{P}_{22}, \Lambda_0 = \Lambda_1 - \Lambda_2 \Lambda_4^{-1} \Lambda_3$$

$$\bar{A} = A_\varepsilon - B_\varepsilon \bar{R} E_b^T E_a = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \varepsilon^{-1} \bar{A}_{21} & \varepsilon^{-1} \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \mu(B_\varepsilon \bar{R} B_\varepsilon^T - H_{a\varepsilon} H_{a\varepsilon}^T) = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \varepsilon^{-1} \bar{S}_{12} \\ \varepsilon^{-1} \bar{S}_{12}^T & \varepsilon^{-2} \bar{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\mu} E_a^T [I_s - E_b \bar{R} E_b^T] E_a + R_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

リカッチ方程式 (7c) の正定対称安定化解が存在するとき, リ

カッチ方程式 (3) の解の存在条件および構造に関して定理が得られる. ただし, 以下の 2 つの集合を定義する.

(i) $\bar{\mu}_f = \sup\{\mu > 0 \mid \text{リカッチ方程式 (7c) が正定対称安定化解 } \bar{P}_{22} \text{ をもつ.}\}$

(ii) $\bar{\mu}_s = \sup\{\mu > 0 \mid \text{リカッチ方程式 (7a) が正定対称安定化解 } \bar{P}_{11} \text{ をもつ.}\}$

《定理 1》 ε は十分小さいと仮定する. $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\bar{\mu}_s, \bar{\mu}_f\}$ となる μ を選択するとき, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ を満たす十分小さな ε に対して, リカッチ方程式 (3) が正定対称安定化解 P_ε をもつような正定数 $\bar{\varepsilon}(\leq \varepsilon^*)$ が存在する. このとき, 正定対称安定化解 P_ε は以下の構造をもつ.

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \varepsilon \bar{P}_{21}^T \\ \varepsilon \bar{P}_{21} & \varepsilon \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon E_{11} & \varepsilon^2 E_{21}^T \\ \varepsilon^2 E_{21} & \varepsilon^2 E_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

(証明) 正定対称安定化解 P_ε の存在性および行列の構造に対する証明は, 文献14), 16) と同様に陰関数定理および Schur Complement 補題によって行われる. したがって, 本論文では省略する. $\square$

2.2 近似制御則の設計

問題 A を解く前に, この節では, 近似制御則の設計およびその性質について考える. 本論文では, 文献16) の結果を拡張する. まず, ε に依存しない近似制御則を以下に与える.

$$u_{app}(t) = -\bar{R} \left\{ \mu \begin{bmatrix} B_1^T \bar{P}_{11} + B_2^T \bar{P}_{21} & B_2^T \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + E_b^T E_a \right\} x(t) = K_{app} x(t) \quad (9)$$

《定理 2》 ε は十分小さいと仮定する. $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\bar{\mu}_s, \bar{\mu}_f\}$ となる μ を選択するとき, 近似制御則 (9) は, $J \leq x^{0T} \tilde{X}_\varepsilon x^0$ (ただし, ある正定数 $\delta > 0$ に対して, $X_\varepsilon < \tilde{X}_\varepsilon < X_\varepsilon + \delta I_n$ を満たす.) を実現させるようなコスト $\tilde{X}_\varepsilon$ を伴う 2 次コスト保証制御則である. ここで, X_ε は, リカッチ方程式

$$(A_\varepsilon + B_\varepsilon K_{app})^T X_\varepsilon + X_\varepsilon (A_\varepsilon + B_\varepsilon K_{app}) + \mu X_\varepsilon H_{a\varepsilon} H_{a\varepsilon}^T X_\varepsilon + \frac{1}{\mu} (E_a + E_b K_{app})^T (E_a + E_b K_{app}) + R_1 + K_{app}^T R_2 K_{app} = 0 \quad (10)$$

の正定対称解であり, $\|P_\varepsilon - X_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$ である関係が成立する.

(証明) 定理 2 の証明は, 以下の補題¹⁾ に基づいて, 著者ら¹⁶⁾ の手法と同様にして行うことが出来る. したがって証明は省略する. $\square$

[補題 2] システム (2) を考える. ある制御ゲイン $\tilde{K}$ に対して, 行列 $\tilde{A}_\varepsilon := A_\varepsilon + B_\varepsilon \tilde{K}$, $\tilde{E} := E_a + E_b \tilde{K}$ および $\tilde{Q} := R_1 + \tilde{K}^T R_2 \tilde{K}$ を定義する. ある正定数 $\lambda > 0$ に対して, リカッチ方程式 (11a) の正定対称解 $X_\varepsilon > 0$ が存在するならば, 閉ループシステム (11b) は $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I_s$ を満たす不確定要素に対して 2 次安定である.

$$\tilde{A}_\varepsilon^T X_\varepsilon + X_\varepsilon \tilde{A}_\varepsilon + \lambda X_\varepsilon H_{a\varepsilon} H_{a\varepsilon}^T X_\varepsilon$$

$$+\frac{1}{\lambda}\tilde{E}^T\tilde{E}+\tilde{Q}=0 \quad (11a)$$

$$\dot{x}(t)=[A_\varepsilon+H_{a\varepsilon}\Delta(t)(E_a+E_b\tilde{K})+B_\varepsilon\tilde{K}]x(t) \quad (11b)$$

$$x(0)=x^0\neq 0$$

2.3 コスト最小化問題

コスト $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を計算するとき、問題となるのは、何らかの手法を利用してリカッチ方程式 (3) の安定化解を求めなければならないことである。良く知られているように、特異摂動システムを扱う場合、微小な摂動項 $\varepsilon > 0$ の影響でリカッチ方程式 (3) の安定化解を求めることは通常困難である¹⁹⁾。しかし、近年文献15)～18)等で、リカッチ方程式の安定化解を求めるための数値解法が次々に提案され、リカッチ方程式の安定化解を求める難しさはかなり低減されている。しかし、文献15), 16)で提案されている再帰的アルゴリズムを使用するときは、摂動項 ε を含まない低次元化したリカッチ方程式の安定化解を高精度に求めなければ、アルゴリズムが収束しないという欠点があるので注意が必要である¹⁷⁾。さらに、収束の程度は1次収束であるので、収束が遅い欠点を伴う。一方、文献17), 18)で提案されているリアプノフ型再帰的数値解法、あるいはニュートン法に基づく繰り返しアルゴリズムを使用するときは、摂動項 ε を含む全次元のリアプノフ方程式を解く必要があり、システムの次数が大きくなった場合、物理的に解を求めることが不可能となるので、やはり注意が必要である。

文献3), 4)では、特異摂動法¹⁹⁾を利用して制御則を構築している。しかし、設計パラメータ μ の決定に関して、摂動項 ε を含む全次元のリカッチ方程式の処理については一切言及されていない。そこで、本論文ではコストの新規な計算方法を提案する。すなわち、コスト $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を近似することによって、リカッチ方程式を低次元化して計算することを考える。計算のポイントは、全次元のリカッチ方程式 (3) の安定化解を使用しないで、摂動項 ε を含まない低次元化したリカッチ方程式の安定化解を利用してコストの計算を行うことである。以上の手法を詳しく説明する。まず、コスト $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を $\varepsilon = 0$ の周りでマクローリン展開して $O(\varepsilon^2)$ 以上の項を無視すれば以下の近似式を得る。

$$\begin{aligned} & \text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)] \\ &= \text{Trace}[P_{11}(\mu)] + \varepsilon \text{Trace}[P_{22}(\mu)] \\ &= \text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)] + \text{Trace}\left[\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} P_{11}(\mu)\right]_{\varepsilon=0} \\ & \quad + \varepsilon \text{Trace}[\bar{P}_{22}(\mu)] + O(\varepsilon^2) \\ &\approx \text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)] \\ & \quad + \varepsilon \{\text{Trace}[\bar{P}_{22}(\mu)] + \text{Trace}[\bar{E}_{11}]\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{ただし } \bar{E}_{11} = \frac{d}{d\varepsilon} P_{11}(\mu)\Big|_{\varepsilon=0} = E_{11}(0).$$

ここで、 ε が十分小さければ $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ の最適化は、 ε に関して、第0近似である $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ の最適化、あるいは第1近似である (12) の最適化と準最適の関係が成り立

つと考えられる。この理由を述べる。まず、構造式 (4) の $P_{11}(\varepsilon, \mu)$, $P_{22}(\varepsilon, \mu)$ に対して、 $\forall \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$ を満たすすべての ε で $P_{11}(\varepsilon, \mu) \leq c_1 < \infty$, $P_{22}(\varepsilon, \mu) \leq c_2 < \infty$ となる $\hat{\varepsilon}$ が存在することが示されている¹⁴⁾。したがって

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varepsilon, \mu) &= \text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)] \\ &= \text{Trace}[P_{11}(\varepsilon, \mu)] + \varepsilon \text{Trace}[P_{22}(\varepsilon, \mu)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \varepsilon^k, \quad |\mathcal{R}(0, \mu)^{(k)}| = |m_k| < \infty \end{aligned}$$

となる μ の有界関数 $|m_k| = |m_k(\mu)| \leq M_k$ が存在する。ただし、 M_k は定数である。そのような定数 M_k に対して

$\max_{k=2, 3, \dots, \infty} \{M_k\} \equiv \mathcal{M}$ を定義する。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varepsilon, \mu) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{k!} \varepsilon^k \\ &\leq M_0 + M_1 \varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathcal{M}}{k!} \varepsilon^k < M_0 + M_1 \varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathcal{M}}{2^{k-1}} \varepsilon^k \\ &\quad \frac{\mathcal{M} \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} < M_0 + M_1 \varepsilon + \frac{\mathcal{M} \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

が成立する。このとき、 $\mathcal{M} \varepsilon^2 \ll M_0 + M_1 \varepsilon$ を満たす十分小さな ε が存在するので、そのような ε の上限値を $\hat{\varepsilon}$ と新たに定義すれば、 $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}$ の範囲で第1近似である $M_0 + M_1 \varepsilon \approx \text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)] + \varepsilon \{\text{Trace}[\bar{P}_{22}(\mu)] + \text{Trace}[\bar{E}_{11}]\}$ を最適化しても ε^2 の項が μ の関数として最適化に対して主要項になることはないので第0近似、あるいは第1近似の最適化と $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ の最適化は準最適の関係が成り立つ。

$\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ を最適化する最大のメリットは、摂動項 ε を含まない1つの低次元化したリカッチ方程式の解を求めるだけで ε に無関係に最適化が行えること、および摂動項 ε が未知な場合でも、設計パラメータ μ が摂動項 ε に無関係に決定でき、制御則を構築することが可能である有用性をもつことである。一方、(12) を最適化することの最大のメリットは、全次元のリカッチ方程式 (3) を解く必要がない。言換えれば摂動項 ε を含まない低次元化した2つのリカッチ方程式の解および1つの代数方程式の解を利用してコストの計算が可能になることである。さらに、第0近似 $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ の最適化より、(6a) の μ^* が精度良く求めることができると期待されるためである。

(注意2) 本来、コスト保証制御の定義より、リカッチ方程式 (10) の正定対称安定化解 X_ε を用いて $\text{Trace}[X_\varepsilon]$ を最適化するべきであるが、定理2の関係式 $\|P_\varepsilon - X_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$ および簡単な計算から

$$\begin{aligned} |\text{Trace}[P_\varepsilon] - \text{Trace}[X_\varepsilon]| &= O(\varepsilon) \\ \text{Trace}[X_\varepsilon] &\approx \text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)] + \varepsilon \{\text{Trace}[\bar{P}_{22}(\mu)] \\ &\quad + \text{Trace}[\bar{E}_{11}]\} \end{aligned}$$

が示されるので (12) を最適化しても良いことがわかる。

(注意3) 本論文で提案されるコストの計算を行う際、摂動パラメータ ε の値を先に与える必要がある。しかし、従来の研究で扱われた特異摂動システムにおいて、摂動パラメータは、既知で与えられる場合^{5),6)}や、物理定数から直接 ε の値を計算して得られる場合^{15),19)}があり、摂動パラメータの値を前もって知ることは可能である。

以下では、それぞれの手法について説明する。

2.4 最適化-1

まず、ある適当な大きさの正の定数 μ に対して、以下で与えられる(13)および(7)の関係式 $\bar{A}$, $\bar{S}$, $\bar{Q}$ を利用して、 $\bar{A}_0$, $\bar{S}_0$ および $\bar{Q}_0$ を計算する¹³⁾。

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & -\bar{S}_0 \\ -\bar{Q}_0 & -\bar{A}_0^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし

$$T_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & -\bar{S}_{11} \\ -\bar{Q}_{11} & -\bar{A}_{11}^T \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & -\bar{S}_{12} \\ -\bar{Q}_{12} & -\bar{A}_{21}^T \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} & -\bar{S}_{12}^T \\ -\bar{Q}_{12}^T & -\bar{A}_{12}^T \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & -\bar{S}_{22} \\ -\bar{Q}_{22} & -\bar{A}_{22}^T \end{bmatrix}$$

(注意4) ハミルトン行列 T_4 は、リカッチ方程式(7c)が安定化解をもつと仮定されているので非特異である。したがって、 T_4^{-1} は存在する^{9),10)}。

次に、低次元リカッチ方程式(7a)および(7c)が、共に正定対称安定化解を持つような $\bar{\mu} = \min\{\bar{\mu}_s, \bar{\mu}_f\}$ を2分法を用いて探索した後、 $0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲で μ を設定して、低次元リカッチ方程式(7a)の正定対称安定化解 $\bar{P}_{11}$ を求める。最後に、 $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して、 $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ を最小にする $\mu = \mu_{app}$ を探索して、 $\mu = \mu_{app}$ としたときの ε に依存しない近似制御則(9)を計算する。

第0近似である $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ を最小にする最大のメリットは、摂動項 ε を含まない1つの低次元リカッチ方程式の解を求めるだけで ε に無関係に最適化が行うことが可能である点である。また、摂動項 ε を具体的に求めることが出来ない場合でも、設計パラメータが摂動項 ε に無関係に決定でき、制御則を構築することが可能である点である。しかしながら、 ε が十分小さくないときには、 $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ を最小にする μ_{app} と $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を最適にする μ^* は十分近くないことに注意する必要がある(4. 数値例を参照)。

2.5 最適化-2

次に、 ε に関して、第1近似である(12)の最適化手法について考える。まず、(12)式に含まれる $\bar{E}_{11}$ を求めるための代数方程式を導出する。構造式(8)をリカッチ方程式(3)に代入して、再帰的アルゴリズムの手法^{15),16)}を応用すれば以下の代数方程式(14)を得ることができる。

$$E_{11}\Lambda_0 + \Lambda_0^T E_{11} + \Theta^T \Xi_1^T + \Xi_1 \Theta - \Theta^T \Xi_3 \Theta - \varepsilon \Xi_2 = 0, \quad (14a)$$

$$E_{11}\Lambda_2 + E_{21}^T \Lambda_4 + \Lambda_3^T E_{22} - \Xi_1 = 0, \quad (14b)$$

$$E_{22}\Lambda_4 + \Lambda_4^T E_{22} - \Xi_3 = 0, \quad (14c)$$

ただし

$$\Xi_1 = -\bar{A}_{11}^T P_{21}^T + P_{11} \bar{S}_{11} P_{21}^T + P_{21}^T \bar{S}_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon(E_{11} \bar{S}_{12} E_{22} + E_{21}^T \bar{S}_{22} E_{22})$$

$$\Xi_2 = E_{11} \bar{S}_{11} E_{11} + E_{21}^T \bar{S}_{22} E_{21} + E_{11} \bar{S}_{12} E_{21} + E_{21}^T \bar{S}_{12}^T E_{11}$$

$$\Xi_3 = -\bar{A}_{12}^T P_{21}^T - P_{21} \bar{A}_{12} + \varepsilon P_{21} \bar{S}_{11} P_{21}^T + \varepsilon E_{22} \bar{S}_{22} E_{22} + P_{21} \bar{S}_{12} P_{22} + P_{22} \bar{S}_{12}^T P_{21}^T$$

$$\Theta = \Lambda_4^{-1} \Lambda_3$$

$\bar{E}_{11} = \frac{d}{d\varepsilon} P_{11}(\mu) \Big|_{\varepsilon=0} = E_{11}(0)$ に注意すれば、方程式(14)に対して $\varepsilon = 0$ として $\bar{E}_{11}$ に関するリアプノフ方程式(15)を得る。

$$\bar{E}_{11}\Lambda_0 + \Lambda_0^T \bar{E}_{11} + \Theta^T \Xi_1^T + \Xi_1 \Theta - \Theta^T \Xi_3 \Theta = 0 \quad (15)$$

ただし

$$\Xi_1 = -\bar{A}_{11}^T \bar{P}_{21}^T + \bar{P}_{11} \bar{S}_{11} \bar{P}_{21}^T + \bar{P}_{21}^T \bar{S}_{12}^T \bar{P}_{21}^T$$

$$\Xi_3 = -\bar{A}_{12}^T \bar{P}_{21}^T - \bar{P}_{21} \bar{A}_{12} + \bar{P}_{21} \bar{S}_{12} \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22} \bar{S}_{12}^T \bar{P}_{21}^T$$

ここで、 $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすので $\Lambda_0 = \Lambda_1 - \Lambda_2 \Lambda_4^{-1} \Lambda_3$ は(ii)の定義から安定である。したがって、リアプノフ方程式(15)は必ず対称解をもつ。以上より、近似コスト(12)が計算可能となる。

最後に具体的な設計方法を説明する。

Step 1. ある適当な大きさの正の定数 μ に対して、(13)および(7)の関係式 $\bar{A}$, $\bar{S}$, $\bar{Q}$ を利用して、 $\bar{A}_0$, $\bar{S}_0$ および $\bar{Q}_0$ を計算する。次に、方程式(7)の Λ_i , ($i = 0, 1, 2, 3, 4$)を計算する。

Step 2. 低次元リカッチ方程式(7a)および(7c)が、共に正定対称安定化解を持つような $\bar{\mu} = \min\{\bar{\mu}_s, \bar{\mu}_f\}$ を2分法を用いて探索する。

Step 3. $0 < \mu < \bar{\mu}$ の範囲で μ を設定する。次に、低次元リカッチ方程式(7a)および(7c)の正定対称安定化解 $\bar{P}_{11}$ および $\bar{P}_{22}$ を求める。さらに代数方程式(7b)を利用して $\bar{P}_{21}$ を求めた後、リアプノフ方程式(15)の対称解 $\bar{E}_{11}$ を求める。

Step 4. $O(\varepsilon^2)$ の項を無視した近似コスト(12)を計算する。

Step 5. $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して、コスト(12)を最小にする $\mu = \mu_{sub}$ を求める。

Step 6. $\mu = \mu_{sub}$ としたときの ε に依存しない近似制御則(9)を計算する。

(注意5) リカッチ方程式(3)は μ に対して凸なので、Step 5. の μ の探索には一次探索を利用すればよい^{1),3)}。

しかしながら、最適化-1と同様に ε が十分小さくないときには、(12)を最小にする μ_{sub} と(6a)の μ^* は十分近くないことに注意する必要がある。

3. 厳密分解法

近年、Gajic ら^{9),10)}は厳密分解法を利用した設計手法を提

案している。厳密分解法は, slow system または fast system と同次元のシルベスタ方程式を繰り返し解くことによって制御則が構築可能であり, アルゴリズムの一部はニュートン法に基づいているので, 再帰的アルゴリズムと比較して収束が速い特徴を有する。しかしながら, 上記の報告には, 2 次収束に関する厳密な定式化がなされていない。本論文では, Newton–Kantorovich Theorem²⁰⁾ を利用することによって 2 次収束の性質を新たに定式化する。さらに, 解を得るための 3 つの行列非線形方程式の解が, 初期値の近傍で唯一であることを新たに示す。

まず, リカッチ方程式 (16)

$$\bar{A}^T P_\varepsilon + P_\varepsilon \bar{A} - P_\varepsilon \bar{S} P_\varepsilon + \bar{Q} = 0 \quad (16)$$

に関する厳密分解法のアロリズムを以下に示す¹⁰⁾。

Step 1. ハミルトン行列 (13) より代数方程式 (17) を導出して, 解 $L \in \mathbf{R}^{2n_2 \times 2n_1}$, $H \in \mathbf{R}^{2n_1 \times 2n_2}$ を求める。

$$T_4 L - T_3 - \varepsilon L(T_1 - T_2 L) = 0 \quad (17a)$$

$$-H(T_4 + \varepsilon L T_2) + T_2 + \varepsilon(T_1 - T_2 L)H = 0 \quad (17b)$$

Step 2. 係数行列 Ω_i , a_i , b_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) を以下の公式から求める。

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} I_{2n_1} & \varepsilon H \\ -L & I_{2n_2} - \varepsilon L H \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = T_1 - T_2 L \quad (18b)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = T_4 + \varepsilon L T_2 \quad (18c)$$

Step 3. 低次元リカッチ方程式 (7a) および (7c) の正定対称安定化解 $\bar{P}_{11}$ および $\bar{P}_{22}$ を求める。

Step 4. 初期値を $P_1^{(0)} = \bar{P}_{11}$, $P_2^{(0)} = \bar{P}_{22}$ に設定する。次に以下のニュートン法に基づくアルゴリズム (19) を利用して収束条件を満足するまで繰り返し計算を行う。

$$\begin{aligned} P_1^{(i+1)}(a_1 + a_2 P_1^{(i)}) - (a_4 - P_1^{(i)} a_2) P_1^{(i+1)} \\ = a_3 + P_1^{(i)} a_2 P_1^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (19a)$$

$$P_2^{(i+1)}(b_1 + b_2 P_2^{(i)}) - (b_4 - P_2^{(i)} b_2) P_2^{(i+1)}$$

$$= b_3 + P_2^{(i)} b_2 P_2^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (19b)$$

Step 5. Step 4. の収束解を $P_1^{(\infty)} = P_1$, $P_2^{(\infty)} = P_2$ と定義したとき, 以下の公式 (20) によって, 解 P_ε を計算する。

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &= \left(\Omega_3 + \Omega_4 \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \cdot \left(\Omega_1 + \Omega_2 \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

文献10), 11) には, 行列非線形方程式 (17a) を解くアルゴリズムとして, 以下の2つのアルゴリズムが提案されている。

$$\begin{aligned} (T_4 + \varepsilon L^{(i)} T_2) L^{(i+1)} - \varepsilon L^{(i+1)} (T_1 - T_2 L^{(i)}) \\ = T_3 + \varepsilon L^{(i)} T_2 L^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} L^{(i+1)} &= T_4^{-1} [T_3 + \varepsilon L^{(i)} (T_1 - T_2 L^{(i)})], \\ (i &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (21b)$$

ただし, $L^{(0)} = T_4^{-1} T_3$ 。さらに, シルベスタ方程式 (17b) を解くアルゴリズムとして, 以下のアルゴリズムが提案されている。

$$\begin{aligned} H^{(i+1)} &= [T_2 + \varepsilon (T_1 - T_2 L) H^{(i)}] (T_4 + \varepsilon L T_2)^{-1}, \\ (i &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし, $H^{(0)} = T_2 T_4^{-1}$ 。ここで, アルゴリズム (21b), (22) に関して, 文献12) の結果を応用すれば直ちに以下の定理を得ることができる。

《**定理3**》 ε は十分小さいと仮定する。リカッチ方程式 (7a) および (7c) が正定対称安定化解をもつとき, アルゴリズム (21b), (22) は, $O(\varepsilon^{i+1})$ の高精度で収束する。すなわち,

$$\|L - L^{(i)}\| = O(\varepsilon^{i+1}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (23a)$$

$$\|H - H^{(i)}\| = O(\varepsilon^{i+1}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (23b)$$

(証明) 文献12) と同様に証明は行われる。したがって, 本論文では省略する。□

ここで, 注意しなければならない点として, 文献9) には, アルゴリズム (19a), (19b), (21a) の収束の性質に関して, 特に言及されていないことがあげられる。また, 文献10) には, 上記のアルゴリズムの収束の性質に関して, 2 次収束であるから少ない繰り返し計算で解を得ることができると言及されているが, 2 次収束を特徴づける定式化は行われていない。一方, 文献11) には, アルゴリズム (21a) が 2 次収束であることは言及されているが, 証明は行われていない。さらに, 上記のいずれの文献にも解の唯一性は全く言及されていない。

Newton–Kantorovich Theorem²⁰⁾ を利用する準備として, まず, 以下の定理を紹介する。

《**定理4**》 ε は十分小さいと仮定する。リカッチ方程式 (7a) および (7c) が正定対称安定化解をもつとき, 以下の2つの行

列非線形方程式 (24a) および (24b)

$$P_1 a_1 - a_4 P_1 - a_3 + P_1 a_2 P_1 = 0 \quad (24a)$$

$$P_2 b_1 - b_4 P_2 - b_3 + P_2 b_2 P_2 = 0 \quad (24b)$$

さらに, 行列非線形方程式 (17a) に関して, 関係式 (25) が成立する.

$$L = L(\varepsilon) = T_4^{-1} T_3 + O(\varepsilon) \quad (25a)$$

$$P_1 = P_1(\varepsilon) = \bar{P}_{11} + O(\varepsilon) \quad (25b)$$

$$P_2 = P_2(\varepsilon) = \bar{P}_{22} + O(\varepsilon) \quad (25c)$$

(証明) 解の構造 (25) に対する証明は, 文献14), 16) と同様に陰関数定理によって行われる. (25a), (25b) の証明は, (25c) の証明と同一なので, (25c) に関してのみ証明を行う. まず, P_2 に関する以下の関数 $\mathcal{F}$ を定義する.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(P_2) = P_2 b_1 - b_4 P_2 - b_3 + P_2 b_2 P_2 \quad (26)$$

P_2 に関して, $\varepsilon = 0$ の回りのヤコビ行列を計算すれば (27) を得る.

$$\nabla \mathcal{F}_{P_2}(\varepsilon = 0, P_2 = \bar{P}_{22}) = I_{n_2} \otimes \Lambda_4^T + \Lambda_4^T \otimes I_{n_2} \quad (27)$$

ここで, 行列 Λ_4 は, (注意2) より安定であるから, 陰関数定理より (25c) で表される構造をもつ. $\square$

最終的に, 定理4の性質から, アルゴリズム (19a), (19b), (21a) に Newton-Kantorovich Theorem²⁰⁾ を適用することによって以下の主要結果を得ることができる.

《定理5》 ε は十分小さいと仮定する. リカッチ方程式 (7a) および (7c) が正定対称安定化解をもつとき, アルゴリズム (19a), (19b), (21a) は2次収束する. すなわち関係式 (28) を満たす.

$$\|L^{(i)} - L\| = O(\varepsilon^{2^i}) \quad (28a)$$

$$\|P_1^{(i)} - P_1\| = O(\varepsilon^{2^i}) \quad (28b)$$

$$\|P_2^{(i)} - P_2\| = O(\varepsilon^{2^i}) \quad (28c)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

さらに, 行列非線形方程式 (17a), (24a), (24b) は, 初期値の近傍で唯一解をもつ.

(証明) (28a), (28b) の証明は, (28c) の証明と同一なので, (28c) に関してのみ証明を行う. 証明は Newton-Kantorovich Theorem²⁰⁾ に基づいて行う. まず, 簡単な計算から以下の関係式を得る.

$$\nabla \mathcal{F}_{P_2} = I_{n_2} \otimes (b_1 + b_2 P_2)^T - (b_4 - b_2 P_2)^T \otimes I_{n_2} \quad (29)$$

したがって, 任意の行列 P_u, P_v に対して

$$\|\nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = P_u) - \nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = P_v)\| \leq \mathcal{L} \|P_u - P_v\| \quad (30)$$

が得られる. ただし, $\mathcal{L} = 2\|b_2\|$ である. 一方, 関係式 (25c) を利用すれば $\|P_2^{(0)} - P_2\| = O(\varepsilon)$ を得る (ここで, アルゴリズム (19b) より $P_2^{(0)} = \bar{P}_{22}$ と設定されていることに注意). したがって, 以下を得る.

$$\nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = \bar{P}_{22}) = I_{n_2} \otimes \Lambda_4^T + \Lambda_4^T \otimes I_{n_2} + O(\varepsilon) \quad (31)$$

ここで, 行列 Λ_4 は (注意2) より安定である. したがって小さな ε に対して $\nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = P_2^{(0)})$ は非特異であることが示される. 以上より, $\alpha = \left\| \left[\nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = P_2^{(0)}) \right]^{-1} \right\| < \infty$ を満たす有界な定数 α が存在する. 続いて, $\mathcal{F}(P_2 = P_2^{(0)}) = O(\varepsilon)$ であることに注意すれば, $\left\| \left[\nabla \mathcal{F}_{P_2}(P_2 = P_2^{(0)}) \right]^{-1} \right\| \cdot \|\mathcal{F}(P_2 = P_2^{(0)})\| \leq O(\varepsilon)$ となるので $\beta = O(\varepsilon)$ とおける. したがって, $0 < \alpha\beta\mathcal{L} \leq O(\varepsilon)$ を満足するので, $\theta = \alpha\beta\mathcal{L} \leq O(\varepsilon) < 2^{-1}$ となる小さな ε 及び正定数 θ が存在する. 一方, 集合

$$\{P_2 \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2} : \|P_2 - P_2^{(0)}\| \leq \frac{1}{\alpha\mathcal{L}} [1 - \sqrt{1 - 2\theta}]\} \quad (32)$$

は, 明らかに P_2 に関する凸集合に含まれるので, Newton-Kantorovich Theorem を利用すれば初期値の近傍に唯一解が存在する. さらに, 各繰返し計算の偏差は, 同じく Newton-Kantorovich Theorem を利用して以下の (33) で表現される.

$$\|P_2^{(i)} - P_2\| \leq \frac{(2\theta)^{2^i}}{2^i \alpha \mathcal{L}}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (33)$$

最後に, $\theta \leq O(\varepsilon)$ として (33) に代入すれば (28c) が得られる. $\square$

4. 数 値 例

不確定特異摂動システム (1) に対して, 以下の係数行列を設定したとき, コスト保証制御に基づくロバスト安定化問題を考える.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -0.2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -5.2e - 02 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{a1} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad H_{a2} = \begin{bmatrix} 0.2 \end{bmatrix}$$

$$E_b = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad E_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

低次元リカッチ方程式 (7a) および (7c) は, $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\bar{\mu}_f, \bar{\mu}_s\} = 2.1085$ を満たすすべての μ に対して正定対称安定化解をもつことが簡単な計算によって示される. したがって, 定理1より $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して全次元のリカッチ方程式 (3) は正定対称安定化解をもつ

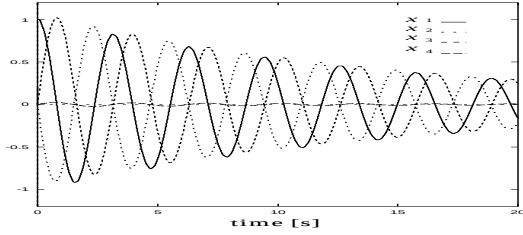


Fig. 1 Time histories of the open-loop system without any control.

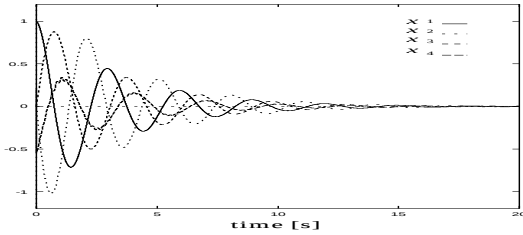


Fig. 2 Time histories of the closed-loop system with the robust feedback controller (34a).

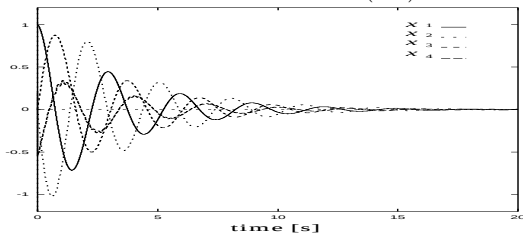


Fig. 3 Time histories of the closed-loop system with the robust feedback controller (34b).

ことがわかる。異なる ε に対して、コスト $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を最小にする $\mu = \mu^*$ (定義式 (6a) で与えられる)、 $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ を最小にする $\mu = \mu_{app}$ 、およびコスト (12) を最小にする $\mu = \mu_{sub}$ を Table 1. に掲載する。

Table 1.

ε	μ^*	μ_{app}	μ_{sub}
$1.0e-01$	$2.9440e-01$	$2.5112e-01$	$2.8992e-01$
$1.0e-02$	$2.5560e-01$		$2.5554e-01$
$1.0e-03$	$2.5157e-01$		$2.5157e-01$
$1.0e-04$	$2.5116e-01$		$2.5116e-01$

ここで、 $\mu = \mu^*$ の探索には文献¹⁷⁾の結果を応用した方法を利用している。すなわち、ニュートン法に基づく繰り返しアルゴリズムを使用して、摂動項 ε を含む全次元のリカッチ方程式 (3) を直接解くことによって $\mu = \mu^*$ の探索を行っている。Table 1. から、十分小さな ε に対して、近似コスト $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ 、および (12) が数値的にみても十分有用であることが確認される。特に、 ε が $\varepsilon = 1.0e-04$ であるような十分小さな ε である場合、近似コスト $\text{Trace}[\bar{P}_{11}(\mu)]$ の最小化は、 μ_{app} が μ^* に近いことから非常に有用である。

一方、厳密分解法による反復アルゴリズム (19), (21a) の収束の程度、および関係式 (25), (28) を確認する。シミュレーションを行う ε および μ の値はそれぞれ $\varepsilon = 1.0e-02$, $\mu = 0.2556$ である。各繰り返し計算に対する誤差のノルムの値を Table 2. に与える。

Table 2. Error propagation per iteration

i	$\ \mathcal{G}(P_1^{(i)})\ $	$\ \mathcal{F}(P_2^{(i)})\ $	$\ \mathcal{H}(L^{(i)})\ $
0	$2.8456e-02$	$1.8402e-04$	$2.4804e-02$
1	$1.8733e-05$	$3.9191e-10$	$7.7138e-07$
2	$1.2171e-11$	0	$1.8986e-15$
3	$1.2058e-14$	—	—

ただし、

$$\mathcal{G}(P_1) = P_1 a_1 - a_4 P_1 - a_3 + P_1 a_2 P_1$$

$$\mathcal{H}(L) = T_4 L - T_3 - \varepsilon L(T_1 - T_2 L)$$

Table 2. より提案された反復アルゴリズム (19), (21a) は、シミュレーションの結果、2 次収束であり、関係式 (25), (28) が成り立つことが確認される。さらに、初期値の選択が非常に良いことが確認される。また、厳密分解法によるリカッチ方程式の解は (20) によって計算されるが、得られた解はニュートン法に基づく繰り返しアルゴリズム¹⁷⁾を使用した場合と同程度の精度をもつことを確認している。その結果、厳密分解法によるコスト $\text{Trace}[P_\varepsilon(\mu)]$ を最小にする $\mu = \mu_{exa}$ は $1.0e-04$ の精度で μ^* に一致している^(注1)。

最後に $\varepsilon = 1.0e-04$ のときの 2 次コスト保証制御則を求める。 $\varepsilon = 1.0e-04$ のときの μ は Table 1. よりそれぞれ $\mu = \mu^* = 2.5116e-01$ および $\mu = \mu_{sub} = 2.5116e-01$ である。したがって、 μ^* および μ_{sub} は $1.0e-05$ オーダまで完全に一致しており、提案された近似最適化アルゴリズムは実際的に十分有用であることがわかる。この結果は、 $\varepsilon = 1.0e-03$ のときも同様に成立する。2 次コスト保証制御則 (5) および近似制御則 (9) はそれぞれ以下のように与えられる。

$$u_{exa}(t) = K_{exa}x(t) \quad (34a)$$

$$u_{app}(t) = K_{app}x(t) \quad (34b)$$

ただし

$$K_{exa} = \begin{bmatrix} -1.129693 & -1.087893 \\ -7.983119e-01 & -4.962887e-02 \end{bmatrix}$$

$$K_{app} = \begin{bmatrix} -1.129703 & -1.087877 \\ -7.983284e-01 & -4.960114e-02 \end{bmatrix}$$

以上から、 ε が十分小さいとき、近似制御則 (34b) は 2 次コスト保証制御則として機能すると考えられる。実際に、初期値

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 \end{bmatrix}^T$$

不確定要素 $\Delta(t) = \sin(10\pi t)$ と設定したときの開ループシステムの時応答、および 2 次コスト保証制御則 (34a), 近似制御則 (34b) をそれぞれ入力したときの閉ループシステムの時応答を Fig. 1 ~ Fig. 3 にそれぞれ示す。Fig. 3 より近似制御則 (34b) を利用しても不確定特異摂動システム (1) はロバスト安定であることが確認される。

(注1) 厳密分解法によるコストを最小にする $\mu = \mu_{exa}$ は Table 1. の μ^* を参照。

5. ま と め

本論文では、状態部分および制御部分を表す行列の両方に不確かさを含む不確定特異摂動システムに対して、ロバスト安定化問題を考えた。従来の研究^{16)~18)}では、制御則の設計パラメータをどのように決定するか考慮されていなかった。そこで、コスト保証制御理論に基づく設計パラメータの決定方法を新たに提案した。設計パラメータは、リカッチ方程式の解の固有和の近似式を利用することによって決定できる。したがって、従来の結果^{3), 15)}と比較して、計算手順が大幅に簡略化された。一方、摂動項 ε が十分小さくないとき、厳密分解法の適用を考えた。アルゴリズムにNewton-Kantorovich Theoremを適用することによって、従来示されていなかった2次収束の性質、および行列非線形方程式の解が初期値の近傍で唯一であることを新たに明らかにした。

参 考 文 献

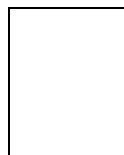
- 1) I.R.Petersen and D.C.McFarlane : Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems, IEEE Trans. Automatic Control, **39**-9, 1971/1977 (1994)
- 2) G.Garcia, S.Tarbouriech, R.Suarez and J.Alvarez-Ramirez : Nonlinear bounded control for norm-bounded uncertain systems, IEEE Trans. Automatic Control, **44**-6, 1254/1258 (1999)
- 3) G.Garcia, J.Daafouz, and J.Bernussou : H_2 guaranteed cost control for singularly perturbed uncertain systems, IEEE Trans. Automatic Control, **43**-3, 1323/1329 (1998)
- 4) J.Daafouz, G.Garcia, and J.Bernussou : H_2 guaranteed cost control by dynamic output feedback for uncertain singularly perturbed systems, IFAC World Congress, **G** 325/330, Beijing, July (1999)
- 5) P.Shi, S.P.Shue, and R.K.Agarwal : Robust disturbance attenuation with stability for a class of uncertain singularly perturbed systems, Uncertainty, Int. J. Control, **70**-6, 873/891 (1998)
- 6) 鈴木, 小林, 安藤 : 特異摂動システムの二次安定化, 計測自動制御学会論文集, **32**-11, 1493/1500 (1996)
- 7) H.K.Khalil : Feedback control of nonstandard singularly perturbed systems, IEEE Trans. Automatic Control, **34**-10, 1052/1060 (1989)
- 8) Z.H.Shao and M.E.Sawan : Robust stability of singularly perturbed systems, Int. J. Control, **58**-6 1469/1476 (1993)
- 9) T.H.Hsieh and Z.Gajic : An algorithm for solving the singularly perturbed H_∞ algebraic Riccati equation, Computers Math. Applic., **36**-5, 69/77 (1998)
- 10) M.T.Lim and Z.Gajic : Reduced-Order H_∞ optimal filtering for systems with slow and fast modes, IEEE Trans. Circuits and Systems I, **47**-6, 250/254 (2000)
- 11) X.Shen and L.Deng : Decomposition solution of H_∞ filter gain in singularly perturbed systems, Signal Processing, **55**-3, 313/320 (1996)
- 12) C.Coumarbatch and Z.Gajic : Exact decomposition of the algebraic Riccati equation of deterministic multimodeling optimal control problems, IEEE Trans. Automatic Control, **45**-4, 790/794 (2000)
- 13) W.Tan, T.Leung, and Q.Tu : H_∞ control for singularly perturbed systems, Automatica, **34**-2, 255/260 (1998).
- 14) V.Dragan : Asymptotic expansions for game-theoretic Riccati equations and stabilization with disturbance attenuation for singularly perturbed systems, Systems & Control

Letters, **20**, 455/463 (1993)

- 15) Z.Gajic, D.Petkovski and X.Shen : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System - A Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Springer-Verlag (1990)
- 16) H.Mukaidani, H.Xu, and T.Okita : Robust stabilization of non-standard singularly perturbed systems with uncertainties, IFAC World Congress, **G** 151/156, Beijing, July (1999)
- 17) 向谷, 新田, 小林, 沖田 : リカッチ方程式の手法を利用した非標準特異摂動システムの2次安定化, 電気学会論文誌 **C** **120**-7, 967/976 (2000)
- 18) 向谷, 小林, 沖田 : 出力フィードバックを利用した非標準特異摂動システムのためのロバスト H_∞ 制御問題, 計測自動制御学会論文集, **35**-10, 1273/1282 (1999)
- 19) P.V.Kokotovic, H.K.Khalil and J.O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design, Academic Press (1986)
- 20) 広中編 : 現代数理科学辞典, 大阪書籍 (1991)

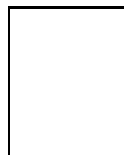
[著 者 紹 介]

向 谷 博 明 (正会員)



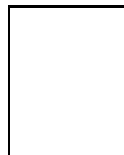
1994年3月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97年10月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士(工学)。98年4月広島市立大学情報科学部助手。現在に至る。主として、ロバスト制御、数値解析に関する研究に従事。電気学会および機械学会会員。

新 田 智 昭



1999年3月広島市立大学情報科学部情報機械システム工学科卒業。2001年3月広島市立大学大学院情報科学研究科修了。2001年4月株式会社FFC入社。現在に至る。在学中は、ロバスト制御、数値解析に関する研究に従事。電気学会学生会員。

土 橋 宜 典



1994年3月広島大学大学院工学研究科システム工学専攻博士課程前期修了。97年3月同大学大学院工学研究科システム工学専攻博士課程後期修了。博士(工学)。97年4月広島市立大学情報科学部助手。2000年5月北海道大学大学院工学研究科助教授。現在に至る。主として、コンピュータグラフィックス、最適化に関する研究に従事。情報処理学会および映像情報メディア学会会員。