計測自動制御学会論文集
Vol.32, No.1, 1/11（1995）

マルチモデルシステムのための準最適制御†

向 谷 博 明*

Near–Optimal Control for Multimodeling Systems

Hiroaki MUKAIDANI*

In this paper, a new design method which is based on the reduced–order algebraic Riccati equations is proposed to construct a near–optimal controller of multimodeling systems. First the existence of a unique and bounded solution of an algebraic Riccati equation is investigated. Furthermore, its asymptotic structure is also established. Second a new near–optimal controller is obtained which does not depend on the values of the small parameters. Then, it is proven that the near–optimal control can achieve a performance which is $O(\|\mu\|)$ close to the optimal performance. Finally, in order to evaluate the cost functional, we also propose a new algorithm which is based on the fixed point algorithm for solving the multimodeling generalized algebraic Lyapunov equation.

Key Words: multimodeling, near–optimal controller, implicit function theorem, multiparameter generalized algebraic Lyapunov equation, fixed point algorithm

1. はじめに

マルチモデルシステムに対する様々な研究が報告されている[1)〜8)]．マルチモデルシステムに類似するシステムとして, 特異摂動システム[12)〜14), 16), 17)] が存在する．通常, 境界層システムが $\varepsilon\dot{x} = f(x,t)$ の形をとるシステムを特異摂動システムという．一方, $\varepsilon_j\dot{x}_j = f_j(x,t)$, $(j = 1,\ 2,\ \cdots, N)$ の形をとるシステムをマルチモデルシステムという．マルチモデルシステムと特異摂動システムの違いとして, 特異摂動システムより, マルチモデルシステムのほうが, より広範なシステムを記述できることがあげられる．例えば, 微少質量 m と微少時定数 T が, 共に既知である場合, 微少な正のパラメータ ε を利用し, $m = \varepsilon\beta_1$, $T = \varepsilon\beta_2$ とすることによって, 特異摂動システムとして表現可能である．しかしながら, この方法は, 微少パラメータ m, T が共に既知である仮定を必要とする．したがって, 微少パラメータ m, T が, 共に未知である場合, 特異摂動システムでの表現は不可能である．一方, マルチモデルシステムの場合, そのような場合であっても, 複数の微少な未知パラメータをそのまま利用して, 状態空間表現できる特徴を有する．マルチモデルシステムは, マルチエリア電力システム[1)], 乗用車のアクティブサスペンション制御[7), 8)] 等に現れることが知られている．

マルチモデルシステムに対する主な設計手法として, 2 時間分割法 (two–time scale decomposition technique) が良く利用されている[1), 2), 4)]．文献 1) では, パレート準最適戦略が導出されている．文献 2) では, 最適制御およびナッシュ均衡について言及されている．文献 3) では, D–安定性に基づくマルチモデルシステムの漸近安定性が議論されている．Gajic[5)] は, マルチモデルシステムに関するリカッチ方程式の解の性質を明らかにしている．これらの研究では, 境界層システムの状態行列の非特異性を要求している．近年, 2 時間分割法と異なる厳密分解法 (exact decomposition technique) によって, 最適制御およびカルマンフィルタ設計問題が研究された[6), 7)]．これらの研究では, 境界層システムの状態行列の非特異性を要求しない．しかし, 制御則を得るために, 必要な行列の次元は, マルチモデルシステムと同一次元が必要となる．さらに, 摂動項の値は既知である必要があるので, 実システムの適用には制限がある．

本論文では, マルチモデルシステムに対する文献 1), 5) の結果を拡張する．まず, 境界層システムの状態行列の非特異性を仮定しないという意味で, 文献 5) で研究されているリカッチ方程式より, 広いクラスのリカッチ方程式の解の構造を明らかにする．このとき, 低次元化された退化システムのリカッチ方程式に対して, 可安定性, 可検出性の性質を新たに調べる．次に, 得られたリカッチ方程式の解の構造式を利用することによって, 新たな準最適制御則 (戦略) の構築を提案する．さらに, 提案された準最適制御則による評価関数の劣化の程度を明らかにする．その結果, 摂動項が十分小さい場合, 準最適性を保証することが示される．本論文で提案される準最適制御則に対して, 以下の有用な特徴が存在する．

---

† 第 1 回制御部門大会で一部発表（2001・5）

* 広島市立大学情報科学部　広島市安佐南区大塚東 3–4–1
* Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University, 3–4–1 Ozuka–Higasi, Asaminami–ku, Hiroshima, Japan

（Received March 8, 2001）
（Revised August 27, 2001）

i) 文献 1) では, 境界層システムの状態行列の非特異性を利用して, システムを退化システムに低次元化した後, 準最適制御則を設計しているのに対して, 本論文では, 低次元化されたリカッチ方程式の安定化解の性質(注 1)を利用して, システムを低次元化した後, 準最適制御則を設計している. したがって, 設計時に, 境界層システムの状態行列の非特異性を要求しない. ii) 新たに得られたリカッチ方程式の解の構造式より構築された最適制御則に対して, 制御則に現れる摂動項を全て恒等に 0 にすることによって, 準最適制御則を構築する. したがって, 摂動項の値は既知である必要がない. その結果, 導出された戦略は, 様々な実システムに対して, 広範囲に適用可能である.

提案されたパレート準最適戦略の有用性を示すために, コスト汎関数の値を求める必要がある. コスト汎関数の値は, リアプノフ方程式の解によって計算される. 摂動項が十分小さい場合, リアプノフ方程式を正確に解くことは, 非常に困難であることが良く知られている[12]. 従来, 特異摂動システムについては, 再帰的アルゴリズムが開発された[12),14]. しかしながら, 現在まで, 複数の摂動項を伴うマルチモデルシステムに対する数値解法は, 開発されていない. そこで, 不動点アルゴリズム (fixed point algorithm)(注 2) に基づく数値計算アルゴリズムを新たに提案する. 提案されたアルゴリズムは, 再帰的アルゴリズムと異なり, 収束解が 0–オーダ解に依存しないので, 正確に解くことが可能である. さらに, 複数の摂動項を扱うことができるので, 従来法である再帰的アルゴリズムと比較して, 幅広いクラスのリアプノフ方程式を正確に解くことが可能である. 最後に, 最適レギュレータ問題は, パレート最適戦略決定問題の特別な場合であることが知られている[1]. したがって, 得られた結果は, 容易に最適レギュレータ問題に応用することが可能である.

2. 問題設定

以下のマルチモデルシステムを考える[1].

$$\dot{x}_0 = A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2 + B_{01}u_1 + B_{02}u_2 \quad \text{(1a)}$$

$$\varepsilon_1\dot{x}_1 = A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + \varepsilon_3 A_{12}x_2 + B_{11}u_1 \quad \text{(1b)}$$

$$\varepsilon_2\dot{x}_2 = A_{20}x_0 + \varepsilon_4 A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{22}u_2 \quad \text{(1c)}$$

ここで, $x_j(0) = x_j^0,\ (j = 0,\ 1,\ 2)$ は初期値を表す. また, $x_j \in \mathbf{R}^{n_j}$ は状態ベクトル, $u_j \in \mathbf{R}^{m_j},\ (j = 1,\ 2)$ は制御入力をそれぞれあらわす. 一方, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータであり, 同じオーダの大きさ, すなわち, 関係式 (2) を満足すると仮定する[1)~7)].

$$0 < k_1 \le \alpha \le k_2 < \infty, \quad \alpha := \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2)$$

$\varepsilon_3, \varepsilon_4$ は, 境界層システムの結合を表す十分小さなパラメータである. 一方, 各意思決定者 (decision maker) は以下のコスト汎関数をもつ.

$$J_j = \frac{1}{2}\int_0^\infty [z_j^T z_j + u_j^T R_j u_j]dt,\ R_j > 0 \quad \text{(3a)}$$

$$z_j = C_{j0}x_0 + C_{jj}x_j, \quad z_j \in \mathbf{R}^{r_j} \quad (j = 1,\ 2) \quad \text{(3b)}$$

パレート解は, 以下のコスト汎関数を最小にする対 u_1, u_2 を意味する.

$$J = \gamma_1 J_1 + \gamma_2 J_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (4)$$

ここで, $\gamma_j,\ (j = 1,\ 2)$ は $0 < \gamma_j < 1$ を満たすある定数である. システム (1) に対して, 以下の仮定を導入する.

[仮定 1] 2 つの行列対 $(A_{jj},\ B_{jj}),\ (A_{jj}^T,\ C_{jj}^T),\ (j = 1,\ 2)$ はそれぞれ可安定かつ可検出である.

[仮定 2] $N = n_0 + n_1 + n_2,\ \forall s \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}[s] \ge 0$ に対して

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_{n_0} - A_{00} & -A_{01} & -A_{02} & B_{01} & B_{02} \\ -A_{10} & -A_{11} & 0 & B_{11} & 0 \\ -A_{20} & 0 & -A_{22} & 0 & B_{22} \end{bmatrix} = N$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI_{n_0} - A_{00}^T & -A_{10}^T & -A_{20}^T & C_{10}^T & C_{20}^T \\ -A_{01}^T & -A_{11}^T & 0 & C_{11}^T & 0 \\ -A_{02}^T & 0 & -A_{22}^T & 0 & C_{22}^T \end{bmatrix} = N$$

以下の補題が知られている[1].

[補題 1] マルチモデルシステム (1) およびコスト汎関数 (3a) に対して, パレート最適戦略は (5) で与えられる.

$$u_j^* = -\gamma_j^{-1}R_j^{-1}B_{j\varepsilon}^T P_\varepsilon x,\ (j = 1,\ 2) \quad (5)$$

ここで, $x = \begin{bmatrix} x_0^T & x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$, P_ε はリカッチ方程式 (6) の準正定対称安定化解である.

$$A_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon P_\varepsilon + Q = 0. \quad (6)$$

ただし, $S_\varepsilon := \gamma_1^{-1}S_{1\varepsilon} + \gamma_2^{-1}S_{2\varepsilon}, \quad Q := \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2$

$$A_\varepsilon := \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ \varepsilon_1^{-1}A_{10} & \varepsilon_1^{-1}A_{11} & \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3 A_{12} \\ \varepsilon_2^{-1}A_{20} & \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4 A_{21} & \varepsilon_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{1\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{01} \\ \varepsilon_1^{-1}B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{02} \\ 0 \\ \varepsilon_2^{-1}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ Q_2 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{21} & 0 & \bar{Q}_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{22}^T & 0 & \bar{Q}_{23} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{j1} = C_{j0}^T C_{j0},\ \bar{Q}_{j2} = C_{j0}^T C_{jj},\ \bar{Q}_{j3} = C_{jj}^T C_{jj}$$

$$S_{j\varepsilon} = B_{j\varepsilon}R_j^{-1}B_{j\varepsilon}^T, \quad (j = 1,\ 2)$$

3. マルチモデルシステムのリカッチ方程式

次の 4 章で摂動項に依存しない制御則を構築するために, リカッチ方程式 (6) の安定化解が存在するための十分条件, および解の構造式を研究する. 特に, 摂動項に依存しない低

(注 1) 例えば, A_{11} が特異であっても, リカッチ方程式 $A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11} - P_{11}S_{11}P_{11} + Q_{11} = 0$ の安定化解が存在すれば, $A_{11} - S_{11}P_{11}$ は非特異である.

(注 2) 本論文では, 連続変形法である通常の意味の不動点アルゴリズム[19] と異なり, Banach の不動点定理に基づくアルゴリズムの意味で, 不動点アルゴリズムと呼んでいる.

次元化されたリカッチ方程式を導入することにより, それらの解とリカッチ方程式 (6) の安定化解の関係を明らかにする. この章で得られたリカッチ方程式 (6) の安定化解の構造式を利用することによって, 従来の合成制御則の手法[1),13),17)]と異なる摂動項に依存しない制御則の設計が可能となる.

まず, 以下の行列を定義する.

$$S_{\mathcal{E}} := \begin{bmatrix} S_{00} & \varepsilon_1^{-1}S_{01} & \varepsilon_2^{-1}S_{02} \\ \varepsilon_1^{-1}S_{01}^T & \varepsilon_1^{-2}S_{11} & 0 \\ \varepsilon_2^{-1}S_{02}^T & 0 & \varepsilon_2^{-2}S_{22} \end{bmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{01}^T & Q_{11} & 0 \\ Q_{02}^T & 0 & Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{E}} := \mathrm{block}-\mathrm{diag}(I_{n_0},\ \varepsilon_1 I_{n_1},\ \varepsilon_2 I_{n_2})$$

このとき, リカッチ方程式 (6) は, A, S に ε_j^{-1}, $(j=1,\ 2)$ を含まない一般化リカッチ方程式[13),14)] $\mathcal{X}A + A^T\mathcal{Y} - \mathcal{X}S\mathcal{Y} + Q = 0$ に変形できる. ただし, $\mathcal{X} = P_{\mathcal{E}}\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$, $\mathcal{Y} = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}P_{\mathcal{E}}$, $A_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}A$, $S_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}S\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$. ここで, 関係式 $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{X}\Phi_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}\mathcal{Y}$, $P_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}^T$ に注意する. $\Phi_{\mathcal{E}}$ に微少パラメータ ε_j, $(j=1,\ 2)$ のみが含まれていることを考慮すれば, 未知行列 $\mathcal{Y}$ は ε_j, $(j=1,\ 2)$ で表される. 最終的に以下の構造を得ることができる.

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} Y_{00} & \varepsilon_1 Y_{10}^T & \varepsilon_2 Y_{20}^T \\ Y_{10} & Y_{11} & \sqrt{\alpha}^{-1}Y_{21}^T \\ Y_{20} & \sqrt{\alpha}Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},\ Y_{jj} = Y_{jj}^T$$

$(j=0,\ 1,\ 2)$. 以上から, 本論文では, $P_{\mathcal{E}}$ として,

$$P_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} P_{00} & \varepsilon_1 P_{10}^T & \varepsilon_2 P_{20}^T \\ \varepsilon_1 P_{10} & \varepsilon_1 P_{11} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}P_{21}^T \\ \varepsilon_2 P_{20} & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}P_{21} & \varepsilon_2 P_{22} \end{bmatrix},\ P_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}^T$$

のような構造をもつ解を求める[1),2),5)]. ただし, 行列 P_{lm}, $(l,\ m) = (0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$ は ε_j, $(j=1,\cdots,4)$ の関数である. $P_{\mathcal{E}}, A_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{E}}, Q$ をリカッチ方程式 (6) に代入し, 分割計算すれば (7) を得る.

$$\begin{aligned} f_1 = {} & A_{00}^T P_{00} + P_{00}A_{00} + A_{10}^T P_{10} + P_{10}^T A_{10} \\ & + A_{20}^T P_{20} + P_{20}^T A_{20} - P_{00}S_{00}P_{00} - P_{10}^T S_{01}^T P_{00} \\ & - P_{00}S_{01}P_{10} - P_{20}^T S_{02}^T P_{00} - P_{00}S_{02}P_{20} \\ & - P_{10}^T S_{11}P_{10} - P_{20}^T S_{22}P_{20} + Q_{00} = 0 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & P_{00}A_{01} + P_{10}^T A_{11} + \varepsilon_1 A_{00}^T P_{10}^T + A_{10}^T P_{11} \\ & + \sqrt{\alpha}A_{20}^T P_{21} + \varepsilon_4 P_{20}^T A_{21} \\ & - \varepsilon_1(P_{00}S_{00}P_{10}^T + P_{10}^T S_{01}^T P_{10}^T + P_{20}^T S_{02}^T P_{10}^T) \\ & - P_{00}S_{01}P_{11} - P_{10}^T S_{11}P_{11} \\ & - \sqrt{\alpha}(P_{00}S_{02}P_{21} + P_{20}^T S_{22}P_{21}) + Q_{01} = 0 \end{aligned} \tag{7b}$$

$$\begin{aligned} f_3 = {} & P_{00}A_{02} + P_{20}^T A_{22} + \varepsilon_2 A_{00}^T P_{20}^T + A_{20}^T P_{22} \\ & + \sqrt{\alpha}^{-1}A_{10}^T P_{21}^T + \varepsilon_3 P_{10}^T A_{12} \\ & - \varepsilon_2(P_{00}S_{00}P_{20}^T + P_{10}^T S_{01}^T P_{20}^T + P_{20}^T S_{02}^T P_{20}^T) \\ & - P_{00}S_{02}P_{22} - P_{20}^T S_{22}P_{22} \\ & - \sqrt{\alpha}^{-1}(P_{00}S_{01}P_{21}^T + P_{10}^T S_{11}P_{21}^T) + Q_{02} = 0 \end{aligned} \tag{7c}$$

$$\begin{aligned} f_4 = {} & A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11} + \varepsilon_1(A_{01}^T P_{10}^T + P_{10}A_{01}) \\ & + \varepsilon_4\sqrt{\alpha}(A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21}) \\ & - \varepsilon_1(\varepsilon_1 P_{10}S_{00}P_{10}^T + P_{11}S_{01}^T P_{10}^T + \sqrt{\alpha}P_{21}^T S_{02}^T P_{10}^T) \\ & - \varepsilon_1(P_{10}S_{01}P_{11} + \sqrt{\alpha}P_{10}S_{02}P_{21}) - P_{11}S_{11}P_{11} \\ & - \alpha P_{21}^T S_{22}P_{21} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{7d}$$

$$\begin{aligned} f_5 = {} & \varepsilon_1 P_{10}A_{02} + \varepsilon_2 A_{01}^T P_{20}^T + \varepsilon_3 P_{11}A_{12} + \varepsilon_4 A_{21}^T P_{22} \\ & - \varepsilon_2(\varepsilon_1 P_{10}S_{00}P_{20}^T + P_{11}S_{01}^T P_{20}^T + \sqrt{\alpha}P_{21}^T S_{02}^T P_{20}^T) \\ & - \varepsilon_1(P_{10}S_{02}P_{22} + \sqrt{\alpha}^{-1}P_{10}S_{01}P_{21}^T) \\ & + \sqrt{\alpha}P_{21}^T(A_{22} - S_{22}P_{22}) \\ & + \sqrt{\alpha}^{-1}(A_{11} - S_{11}P_{11})^T P_{21}^T = 0 \end{aligned} \tag{7e}$$

$$\begin{aligned} f_6 = {} & A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22} + \varepsilon_2(A_{02}^T P_{20}^T + P_{20}A_{02}) \\ & + \varepsilon_3\sqrt{\alpha}^{-1}(A_{12}^T P_{21}^T + P_{21}A_{12}) \\ & - \varepsilon_2(\varepsilon_2 P_{20}S_{00}P_{20}^T + P_{22}S_{02}^T P_{20}^T + \sqrt{\alpha}^{-1}P_{21}S_{01}^T P_{20}^T) \\ & - \varepsilon_2(P_{20}S_{02}P_{22} + \sqrt{\alpha}^{-1}P_{20}S_{01}P_{21}^T) - P_{22}S_{22}P_{22} \\ & - \alpha^{-1}P_{21}S_{11}P_{21}^T + Q_{22} = 0 \end{aligned} \tag{7f}$$

一般性を失うことなく, 以下の仮定を導入する[1)~7)].

［**仮定 3**］　不等式 (2) で表現される条件のもと, (2) 式に含まれる α に対して, 極限値 (8) が存在する.

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \alpha = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \bar{\alpha} \tag{8}$$

方程式 (7) に対して, $\varepsilon_j \to +0$, $(j=1,\ 2)$, $\varepsilon_j \to 0$, $(j=3,\ 4)$ とすれば 0–オーダ方程式 (9) を得る. このとき, 方程式 (7) の 0–オーダ解を $\bar{P}_{00}, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}, \bar{P}_{11}, \bar{P}_{21}, \bar{P}_{22}$ と定義する.

$$\begin{aligned} & A_{00}^T\bar{P}_{00} + \bar{P}_{00}A_{00} + A_{10}^T\bar{P}_{10} + \bar{P}_{10}^T A_{10} + A_{20}^T\bar{P}_{20} \\ & + \bar{P}_{20}^T A_{20} - \bar{P}_{00}S_{00}\bar{P}_{00} - \bar{P}_{10}^T S_{01}^T\bar{P}_{00} - \bar{P}_{00}S_{01}\bar{P}_{10} \\ & - \bar{P}_{20}^T S_{02}^T\bar{P}_{00} - \bar{P}_{00}S_{02}\bar{P}_{20} \\ & - \bar{P}_{10}^T S_{11}\bar{P}_{10} - \bar{P}_{20}^T S_{22}\bar{P}_{20} + Q_{00} = 0 \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{00}A_{01} + \bar{P}_{10}^T A_{11} + A_{10}^T\bar{P}_{11} + \sqrt{\bar{\alpha}}A_{20}^T\bar{P}_{21} - \bar{P}_{00}S_{01}\bar{P}_{11} \\ & - \bar{P}_{10}^T S_{11}\bar{P}_{11} - \sqrt{\bar{\alpha}}(\bar{P}_{00}S_{02}\bar{P}_{21} + \bar{P}_{20}^T S_{22}\bar{P}_{21}) \\ & + Q_{01} = 0 \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} & \bar{P}_{00}A_{02} + \bar{P}_{20}^T A_{22} + A_{20}^T\bar{P}_{22} + \sqrt{\bar{\alpha}}^{-1}A_{10}^T\bar{P}_{21}^T - \bar{P}_{00}S_{02}\bar{P}_{22} \\ & - \bar{P}_{20}^T S_{22}\bar{P}_{22} - \sqrt{\bar{\alpha}}^{-1}(\bar{P}_{00}S_{01}\bar{P}_{21}^T + \bar{P}_{10}^T S_{11}\bar{P}_{21}^T) \\ & + Q_{02} = 0 \end{aligned} \tag{9c}$$

$$\begin{aligned} & A_{11}^T\bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}A_{11} - \bar{P}_{11}S_{11}\bar{P}_{11} \\ & - \bar{\alpha}\bar{P}_{21}^T S_{22}\bar{P}_{21} + Q_{11} = 0 \end{aligned} \tag{9d}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\bar{\alpha}}\bar{P}_{21}^T(A_{22} - S_{22}\bar{P}_{22}) \\ & + \sqrt{\bar{\alpha}}^{-1}(A_{11} - S_{11}\bar{P}_{11})^T\bar{P}_{21}^T = 0 \end{aligned} \tag{9e}$$

$$A_{22}^T\bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}A_{22} - \bar{P}_{22}S_{22}\bar{P}_{22}$$

$$-\bar{\alpha}^{-1}\bar{P}_{21}S_{11}\bar{P}_{21}^T+Q_{22}=0 \tag{9f}$$

ここで, 仮定1が成立するとき, 以下のリカッチ方程式 (10)

$$A_{jj}^T\tilde{P}_{jj}+\tilde{P}_{jj}A_{jj}-\tilde{P}_{jj}S_{jj}\tilde{P}_{jj}+Q_{jj}=0 \tag{10}$$

$(j=1,\ 2)$ に対して, $A_{jj}-S_{jj}\tilde{P}_{jj}$ が安定となる準正定対称安定化解 $\tilde{P}_{jj}$ が存在する. したがって, $\bar{P}_{jj}\to\tilde{P}_{jj}$ と設定することによって, $A_{jj}-S_{jj}\bar{P}_{jj}$, $(j=1,\ 2)$ を安定にすることができる. 以上により, $A_{jj}-S_{jj}\bar{P}_{jj}$ が安定であるので, 明らかに代数方程式 (9e) は $\bar{P}_{21}=0$ なる解をもつことがわかる. 最終的に, $\bar{P}_{21}=0$ から, 方程式 (9) は $\bar{\alpha}$ に依存しないので, 方程式 (9) は, 以下の 0–オーダ方程式 (11) に書き換えることが可能である.

$$A_s^T\bar{P}_{00}+\bar{P}_{00}A_s-\bar{P}_{00}S_s\bar{P}_{00}+Q_s=0 \tag{11a}$$

$$\bar{P}_{j0}^T=\bar{P}_{00}N_{0j}-M_{0j} \tag{11b}$$

$$A_{jj}^T\bar{P}_{jj}+\bar{P}_{jj}A_{jj}-\bar{P}_{jj}S_{jj}\bar{P}_{jj}+Q_{jj}=0 \tag{11c}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
A_s&=A_{00}+N_{01}A_{10}+N_{02}A_{20}+S_{01}M_{01}^T+S_{02}M_{02}^T\\
&\quad+N_{01}S_{11}M_{01}^T+N_{02}S_{22}M_{02}^T\\
S_s&=S_{00}+N_{01}S_{01}^T+S_{01}N_{01}^T+N_{02}S_{02}^T+S_{02}N_{02}^T\\
&\quad+N_{01}S_{11}N_{01}^T+N_{02}S_{22}N_{02}^T\\
Q_s&=Q_{00}-M_{01}A_{10}-A_{10}^TM_{01}^T-M_{02}A_{20}-A_{20}^TM_{02}^T\\
&\quad-M_{01}S_{11}M_{01}^T-M_{02}S_{22}M_{02}^T\\
N_{0j}&=-D_{0j}D_{jj}^{-1},\ M_{0j}=\hat{Q}_{0j}D_{jj}^{-1},\ \hat{Q}_{0j}=A_{j0}^T\bar{P}_{jj}+Q_{0j}\\
D_{00}&=A_{00}-S_{00}\bar{P}_{00}-S_{01}\bar{P}_{10}-S_{02}\bar{P}_{20}\\
D_{j0}&=A_{j0}-S_{0j}^T\bar{P}_{00}-S_{jj}\bar{P}_{j0},\ D_{jj}=A_{jj}-S_{jj}\bar{P}_{jj}\\
D_{0j}&=A_{0j}-S_{0j}\bar{P}_{jj},\ (j=1,\ 2)
\end{aligned}$$

このとき, リカッチ方程式 (11a) に対しての可安定性, 可検出性の結果が得られる.

《定理 1》 仮定 1, 2 のもと, 以下の条件が成立する.

(i) リカッチ方程式 (11a) は, リカッチ方程式 (11c) の解 $\bar{P}_{jj}$, $(j=1,\ 2)$ に依存しない. すなわち, 行列 A_s, S_s, Q_s は, 公式 (12) によって計算できる.

$$T_s=T_{00}-\sum_{j=1}^{2}T_{0j}T_{jj}^{-1}T_{j0}=\begin{bmatrix}A_s & -S_s\\ -Q_s & -A_s^T\end{bmatrix} \tag{12}$$

ただし, T_{lm} は以下のように定義される.

$$T_{00}:=\begin{bmatrix}A_{00} & -S_{00}\\ -Q_{00} & -A_{00}^T\end{bmatrix},\ T_{0j}:=\begin{bmatrix}A_{0j} & -S_{0j}\\ -Q_{0j} & -A_{j0}^T\end{bmatrix}$$

$$T_{j0}:=\begin{bmatrix}A_{j0} & -S_{0j}^T\\ -Q_{0j}^T & -A_{0j}^T\end{bmatrix},\ T_{jj}:=\begin{bmatrix}A_{jj} & -S_{jj}\\ -Q_{jj} & -A_{jj}^T\end{bmatrix}$$

$(j=1,\ 2)$

(ii) $S_s=B_sR^{-1}B_s^T$, $Q_s=C_s^TC_s$ を満足するような行列 $B_s\in\mathbf{R}^{n_0\times M}$, $(M=m_1+m_2)$, $R\in\mathbf{R}^{M\times M}$ および行列 $C_s\in\mathbf{R}^{(r_1+r_2)\times N}$ が存在する. このとき, 行列対 $(A_s,\ B_s)$, $(A_s^T,\ C_s^T)$ はそれぞれ可安定かつ可検出である.

(証明) まず, (i) について証明を与える. T_{jj}, $(j=1,\ 2)$ について, リカッチ方程式 (11c) を利用すれば

$$T_{jj}=\begin{bmatrix}I_{n_j} & 0\\ \bar{P}_{jj}^T & I_{n_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{jj} & -S_{jj}\\ 0 & -D_{jj}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_j} & 0\\ -\bar{P}_{jj} & I_{n_j}\end{bmatrix}$$

を得る. さらに, D_{jj} の安定性を利用すれば

$$T_{jj}^{-1}=\begin{bmatrix}I_{n_j} & 0\\ \bar{P}_{jj} & I_{n_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{jj}^{-1} & -D_{jj}^{-1}S_{jj}D_{jj}^{-T}\\ 0 & -D_{jj}^{-T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_j} & 0\\ -\bar{P}_{jj}^T & I_{n_j}\end{bmatrix}$$

と計算される. したがって, 実際に T_{jj}^{-1} を $T_{00}-T_{01}T_{11}^{-1}T_{10}-T_{02}T_{22}^{-1}T_{20}$ に代入して, 計算すれば関係式 (12) を得る.

続いて, (ii) について証明を行う. S_s を変形すれば, 容易に以下の関係式を得ることができる.

$$\begin{aligned}
S_s&=\begin{bmatrix}\bar{B}_{01}+N_{01}\bar{B}_{11} & \bar{B}_{02}+N_{02}\bar{B}_{22}\end{bmatrix}\\
&\quad\cdot\begin{bmatrix}R_1^{-1} & 0\\ 0 & R_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{B}_{01}^T+\bar{B}_{11}^TN_{01}^T\\ \bar{B}_{02}^T+\bar{B}_{22}^TN_{02}^T\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\bar{B}_{0j}=\sqrt{\gamma_j}^{-1}B_{0j},\ \bar{B}_{jj}=\sqrt{\gamma_j}^{-1}B_{jj},\ (j=1,\ 2)$$

したがって, $B_s=\begin{bmatrix}\bar{B}_{01}+N_{01}\bar{B}_{11} & \bar{B}_{02}+N_{02}\bar{B}_{22}\end{bmatrix}$, $R=\mathrm{block-diag}(R_1,\ R_2)$ が得られる. 一方, Q_s から直接 C_s を表現することは困難である. この困難を克服するために, リカッチ方程式 (11c) に対する補助的なリカッチ方程式 (13) を導入する.

$$\bar{W}_{jj}A_{jj}^T+A_{jj}\bar{W}_{jj}-\bar{W}_{jj}Q_{jj}\bar{W}_{jj}+S_{jj}=0 \tag{13}$$

$(j=1,\ 2)$. 仮定 1 のもと, 準正定対称安定化解 $\bar{W}_{jj}$ が存在する. リカッチ方程式 (13) に注意して, 以下の行列を得る.

$$T_{jj}=\begin{bmatrix}I_{n_j} & -\bar{W}_{jj}\\ 0 & I_{n_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{jj} & 0\\ -Q_{jj} & -E_{jj}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_j} & \bar{W}_{jj}\\ 0 & I_{n_j}\end{bmatrix}$$

ただし, $E_{jj}=A_{jj}-\bar{W}_{jj}Q_{jj}$, $(j=1,\ 2)$. $E_{jj}=A_{jj}-\bar{W}_{jj}Q_{jj}$ は安定であるので, T_{jj}^{-1} は存在する. したがって,

$$T_{jj}^{-1}=\begin{bmatrix}I_{n_j} & -\bar{W}_{jj}\\ 0 & I_{n_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{jj}^{-1} & 0\\ -E_{jj}^{-T}Q_{jj}E_{jj}^{-1} & -E_{jj}^{-T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{n_j} & \bar{W}_{jj}\\ 0 & I_{n_j}\end{bmatrix}$$

として, $T_{00}-T_{01}T_{11}^{-1}T_{10}-T_{02}T_{22}^{-1}T_{20}$ に代入すれば以下の関係式を得る.

$$\begin{aligned}
Q_s&=Q_{00}+L_{10}^TQ_{01}^T+Q_{01}L_{10}+L_{20}^TQ_{02}^T+Q_{02}L_{20}\\
&\quad+L_{10}^TQ_{11}L_{10}+L_{20}^TQ_{22}L_{20}
\end{aligned}$$

ただし, $L_{j0}=-E_{jj}^{-1}E_{j0}$, $E_{j0}=A_{j0}-\bar{W}_{jj}Q_{0j}^T$, $(j=1,\ 2)$ である. 以上より,

$$\begin{aligned}
Q_s&=\begin{bmatrix}\bar{C}_{10}^T+L_{10}^T\bar{C}_{11}^T & \bar{C}_{20}^T+L_{20}^T\bar{C}_{22}^T\end{bmatrix}\\
&\quad\cdot\begin{bmatrix}\bar{C}_{10}+\bar{C}_{11}L_{10}\\ \bar{C}_{20}+\bar{C}_{22}L_{20}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\bar{C}_{j0}=\sqrt{\gamma_j}C_{j0},\ \bar{C}_{jj}=\sqrt{\gamma_j}C_{jj},\ (j=1,\ 2)$$

と変形できる. したがって, Q_s は $Q_s=C_s^TC_s$, $C_s^T=\begin{bmatrix}\bar{C}_{10}^T+L_{10}^T\bar{C}_{11}^T & \bar{C}_{20}^T+L_{20}^T\bar{C}_{22}^T\end{bmatrix}$ と分解できることがわ

かる. 次に, 行列対 $(A_s,\ B_s)$ の可安定性を示す. 以下の関係式に注意する.

$$\begin{bmatrix} I_{n_0} & -D_{01}D_{11}^{-1} & -D_{02}D_{22}^{-1} \\ 0 & D_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sI_{n_0}-A_{00} & -A_{01} & -A_{02} & \bar{B}_{01} & \bar{B}_{02} \\ -A_{10} & -A_{11} & 0 & \bar{B}_{11} & 0 \\ -A_{20} & 0 & -A_{22} & 0 & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_{11}^{-1}A_{10} & I_{n_1} & 0 & \Omega_{21} & 0 \\ -D_{22}^{-1}A_{20} & 0 & I_{n_2} & 0 & \Omega_{22} \\ \Omega_{11} & \Omega_{31} & 0 & \Omega_{41} & 0 \\ \Omega_{12} & 0 & \Omega_{32} & 0 & \Omega_{42} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} sI_{n_0}-A_{00}-N_{01}A_{10}-N_{02}A_{20} & 0 & 0 & \bar{B}_{01}+N_{01}\bar{B}_{11} & \bar{B}_{02}+N_{02}\bar{B}_{22} \\ 0 & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{A}(s) \quad (14)$$

ここで, $\Omega_{1j} = -R_j^{-1}\bar{B}_{jj}^T\bar{P}_{jj}D_{11}^{-1}A_{j0},\ \Omega_{2j} = D_{jj}^{-1}\bar{B}_{jj},\ \Omega_{3j} = R_j^{-1}\bar{B}_{jj}^T\bar{P}_{jj},\ \Omega_{4j} = I_{n_j} + R_j^{-1}\bar{B}_{jj}^T\bar{P}_{jj}D_{jj}^{-1}\bar{B}_{jj},\ (j=1,\ 2)$. したがって, 仮定 2 の前半の条件は $\mathrm{rank}\mathcal{A}(s) = N,\ \forall s \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}[s] \geq 0$ と等価である. 言い換えれば, 仮定 2 の前半の条件と行列対 $(A_{00}+N_{01}A_{10}+N_{02}A_{20},\ B_s)$ が可安定であることは等価である. ここで,

$$A_s = A_{00}+N_{01}A_{10}+N_{02}A_{20}+B_sR^{-1}\begin{bmatrix} \bar{B}_{11}^TM_{01}^T \\ \bar{B}_{22}^TM_{02}^T \end{bmatrix}$$
$$= A_{00}+N_{01}A_{10}+N_{02}A_{20}+B_s\mathcal{K}$$

であり, フィードバック $\mathcal{K}$ は $(A_{00}+N_{01}A_{10}+N_{02}A_{20},\ B_s)$ の可安定性を保存するので, 行列対 $(A_s,\ B_s)$ も可安定であると結論できる. 一方, 行列対 $(A_s^T,\ C_s^T)$ が可検出である証明は, 行列対 $(A_s,\ B_s)$ の可安定性の議論と双対の議論によって行われる. その詳細は省略する. 以上より定理 1 の証明が完了する. □

(注意)　文献 1), 2), 5) では, 境界層システムに関係する状態行列の非特異性の仮定に基づいて, 行列対 $(A_s,\ B_s)$, $(A_s^T,\ C_s^T)$ の可安定性, 可検出性を仮定している. また, 文献 6), 7) では, 境界層システムに関係する状態行列の非特異性は仮定していない. しかしながら, 行列対 $(A_s,\ B_s)$, $(A_s^T,\ C_s^T)$ の可安定性, 可検出性に対しては, 詳しく言及していない.

以上の準備のもとで, リカッチ方程式 (6) の解の構造に関して, 定理を得ることができる.

《定理 2》　仮定 1, 2 のもと, $\varepsilon_j \in (0,\ \varepsilon_j^*),\ (j=1,\ 2)$, $|\varepsilon_j| \in (0,\ \varepsilon_j^*),\ (j=3,\ 4)$ を満たすすべての ε_j に対して, リカッチ方程式 (6) の解が (15) で示される構造をもつような十分小さな $\varepsilon_j^* > 0,\ (j=1,\ \cdots,\ 4)$ が存在する. さらに, 解 (15) は, リカッチ方程式 (6) の準正定対称安定化解である.

$$P_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}}(\mu)$$
$$= \begin{bmatrix} P_{00}(\mu) & \varepsilon_1P_{10}(\mu)^T & \varepsilon_2P_{20}(\mu)^T \\ \varepsilon_1P_{10}(\mu) & \varepsilon_1P_{11}(\mu) & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}O(\|\mu\|) \\ \varepsilon_2P_{20}(\mu) & \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}O(\|\mu\|) & \varepsilon_2P_{22}(\mu) \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし, $P_{lm}(\mu)$ は P_{lm} が μ の関数であることを表す.

$$P_{lm}(\mu) = \bar{P}_{lm} + O(\|\mu\|),\ \mu = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$
$$(l,\ m) = (0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2)$$

(証明)　証明は, 陰関数定理 5) を利用して行う. すなわち, $\|\mu\| = 0$ の近傍におけるヤコビ行列が非特異であることを示す. 方程式 (7) に対するヤコビ行列は (16) で与えられる.

$$J = \left.\frac{\partial\mathrm{vec}(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6)}{\partial\mathrm{vec}(P_{00},\ P_{10},\ P_{20},\ P_{11},\ P_{21},\ P_{22})^T}\right|_{\mu=\mu_0,\ \mathcal{P}=\mathcal{P}_0}$$
$$= \begin{bmatrix} J_{00} & J_{01} & J_{02} & 0 & 0 & 0 \\ J_{10} & J_{11} & 0 & J_{13} & J_{14} & 0 \\ J_{20} & 0 & J_{22} & 0 & J_{24} & J_{25} \\ 0 & 0 & 0 & J_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{55} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ただし,

$$\mu_0 = [0,\ 0,\ 0,\ 0],\ \mathcal{P} = (P_{00},\ P_{10},\ P_{20},\ P_{11},\ P_{21},\ P_{22})$$
$$\mathcal{P}_0 = (\bar{P}_{00},\ \bar{P}_{10},\ \bar{P}_{20}\ \bar{P}_{11},\ 0,\ \bar{P}_{22})$$
$$J_{00} = (I_{n_0} \otimes D_{00}^T)U_{n_0n_0} + D_{00}^T \otimes I_{n_0}$$
$$J_{0j} = (I_{n_0} \otimes D_{j0}^T)U_{n_0n_1} + D_{j0}^T \otimes I_{n_0}$$
$$J_{j0} = D_{0j}^T \otimes I_{n_0},\ J_{jj} = D_{jj}^T \otimes I_{n_0}$$
$$J_{13} = I_{n_1} \otimes D_{10},\ J_{14} = \sqrt{\bar{\alpha}}(I_{n_1} \otimes D_{20})U_{n_1n_2}$$
$$J_{24} = \sqrt{\bar{\alpha}}^{-1}I_{n_2} \otimes D_{10},\ J_{25} = I_{n_2} \otimes D_{20}$$
$$J_{33} = (I_{n_1} \otimes D_{11}^T)U_{n_1n_1} + D_{11}^T \otimes I_{n_1}$$
$$J_{44} = \sqrt{\bar{\alpha}}D_{22}^T \otimes I_{n_1} + \sqrt{\bar{\alpha}}^{-1}I_{n_2} \otimes D_{11}^T$$
$$J_{55} = (I_{n_2} \otimes D_{22}^T)U_{n_2n_2} + D_{22}^T \otimes I_{n_2},\ (j=1,\ 2)$$

ここで, vec は行列の列展開, $\otimes$ はクロネッカ積, $U_{n_jn_j},\ (j=0,\ 1,\ 2)$ は置換行列をそれぞれ表す 9).

以上の準備のもと, ヤコビ行列 (16) の行列式を計算する.

$$\mathrm{det}J = \mathrm{det}J_{11} \cdot \mathrm{det}J_{22} \cdot \mathrm{det}J_{33} \cdot \mathrm{det}J_{44} \cdot \mathrm{det}J_{55}$$
$$\cdot\mathrm{det}[I_{n_0} \otimes D_0^TU_{n_0n_0} + D_0^T \otimes I_{n_0}] \quad (17)$$

ただし, $D_0 \equiv D_{00} - D_{01}D_{11}^{-1}D_{10} - D_{02}D_{22}^{-1}D_{20}$.

仮定 1 から $D_{jj} = A_{jj} - S_{jj}\bar{P}_{jj},\ (j=1,\ 2)$ は安定であるので, 明らかに $J_{jj},\ (j=1,\cdots,5)$ は非特異である. さらに, 簡単な計算から $A_s - S_s\bar{P}_{00} = D_{00} - D_{01}D_{11}^{-1}D_{10} - D_{02}D_{22}^{-1}D_{20} = D_0$ が示される. したがって, 仮定 2 から D_0 も安定である. 以上より $(\mu,\ \mathcal{P}) = (\mu_0,\ \mathcal{P}_0)$ において, ヤコビ行列 (16) は非特異である. したがって, 陰関数定理より定理 2 が示される. 後半の準正定対称安定化解の証明につ

いては, Schur complement [10], および, 文献 1) の Theorem 1 を利用すれば簡単に証明できるので, 本論文では省略する. □

(注意) 文献 5) では, 陰関数定理を利用して類似の結果を得ているが, 行列 $A_{jj}, (j=1,\ 2)$ の非特異性を必要とする. さらに, 結合パラメータ ε_3, ε_4 の値は考慮されていない. しかし, 本論文では, 行列 A_{jj} の非特異性を必要とせず, 結合パラメータを考慮しているので, より広いクラスのマルチモデルシステムに対する結果を得ている. さらに, 解の構造式も具体的に示している.

4. 近似制御則

摂動項 ε_j の値が未知であるとき, リカッチ方程式 (6) を解くことはできない. この章では, 3 章で得られたリカッチ方程式 (6) の解の構造情報 (15) を利用して, ε_j によらないパレート準最適戦略を構築する. その際, 2 時間分割法あるいは合成制御則 [1),13),17)] の手法を利用しない. ここで, 準最適戦略を構築するための重要な性質は, 解 (15) が, 摂動項に依存しない部分と, 依存する部分に分離可能であることである. この特徴を生かし, 提案される準最適戦略は, 摂動項に依存する部分を全て恒等的に 0 とすることによって構築される.

パレート最適戦略 (5) に解の構造式 (15) を代入する.

$$u_j^* = -\gamma_j^{-1} R_j^{-1} B_{j\mathcal{E}}^T P_{\mathcal{E}} x = -\gamma_j^{-1} R_j^{-1} B_j^T P x \tag{18}$$

ただし, $B_{j\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} B_j$, $P_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}} P$, $P_{21} = O(\|\mu\|)$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & \varepsilon_1 P_{10}^T & \varepsilon_2 P_{20}^T \\ P_{10} & P_{11} & \sqrt{\alpha}^{-1} P_{21}^T \\ P_{20} & \sqrt{\alpha} P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & 0 & 0 \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{20} & 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + O(\|\mu\|)$$

$$B_1^T = \begin{bmatrix} B_{01}^T & B_{11}^T & 0 \end{bmatrix},\ B_2^T = \begin{bmatrix} B_{02}^T & 0 & B_{22}^T \end{bmatrix}$$

$(j=1,\ 2)$. したがって, $O(\|\mu\|)$ を無視することによって, 近似パレート戦略 (19) が得られる.

$$u_{j\mathrm{app}} = -\gamma_j^{-1} R_j^{-1} B_j^T \begin{bmatrix} \bar{P}_{00} & 0 & 0 \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{20} & 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} x = -\gamma_j^{-1} R_j^{-1} B_j^T P_{\mathrm{app}} x, \quad (j=1,\ 2) \tag{19}$$

近似パレート戦略 (19) をシステム (1) に適用したとき, 以下の性質が示される.

《**定理 3**》 仮定 1, 2 のもと, 近似パレート戦略 (19) をシステム (1) に適用したとき, すべての $\|\mu\| \in (0,\ \sigma^*]$ に対して, 閉ループシステムが漸近安定となるような σ^* が存在する. また, システム (1) に近似パレート戦略 (19) を適用したときの評価関数を $J_{j\mathrm{app}}$, パレート最適戦略 (5) を適用したときの評価関数を J_j^* と定義すれば, 以下が成立する.

$$J_{j\mathrm{app}} = J_j^* + O(\|\mu\|),\ (j=1,\ 2) \tag{20}$$

すなわち, 未知パラメータ ε_j が十分小さいとき, 近似パレート戦略 (19) はパレート準最適戦略となる.

(**証明**) まず, 漸近安定性を示す. 近似パレート戦略 (19) をシステム (1) に適用した閉ループシステムは以下である.

$$\dot{x}_0 = D_{00} x_0 + D_{01} x_1 + D_{02} x_2,\ x_0(0) = x_0^0 \tag{21a}$$

$$\varepsilon_1 \dot{x}_1 = D_{10} x_0 + D_{11} x_1 + \varepsilon_3 A_{12} x_2,\ x_1(0) = x_1^0 \tag{21b}$$

$$\varepsilon_2 \dot{x}_2 = D_{20} x_0 + \varepsilon_4 A_{21} x_1 + D_{22} x_2,\ x_2(0) = x_2^0 \tag{21c}$$

仮定 1 から D_{jj} は安定である. さらに, 仮定 2 から $A_s - S_s \bar{P}_{00} = D_0$ も安定である. したがって, 文献 1) の Theorem 1 より, 近似パレート戦略 (19) を適用した閉ループシステム (21) が漸近安定となる十分小さな σ^* が存在する.

続いて, パレート準最適性を示す. 近似パレート戦略 (19) をシステム (1) に適用したときのコスト汎関数 (3a) の値は以下で与えられる.

$$J_{j\mathrm{app}} = \frac{1}{2} x^T(0) Y_{j\mathcal{E}} x(0),\ (j=1,\ 2) \tag{22}$$

ただし, $P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}}$

$$Y_{j\mathcal{E}}(A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}}) + (A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}})^T Y_{j\mathcal{E}} + Q_j + \gamma_j^{-2} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} = 0,\ (j=1,\ 2) \tag{23}$$

一方, パレート最適戦略 (5) をシステム (1) に適用したときのコスト汎関数 (3a) の値は以下で与えられる.

$$J_j^* = \frac{1}{2} x^T(0) X_{j\mathcal{E}} x(0),\ (j=1,\ 2) \tag{24}$$

ただし,

$$X_{j\mathcal{E}}(A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}}) + (A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}})^T X_{j\mathcal{E}} + Q_j + \gamma_j^{-2} P_{\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}} = 0,\ (j=1,\ 2) \tag{25}$$

リアプノフ方程式 (23) から (25) を引けば, $Z_{j\mathcal{E}} = Y_{j\mathcal{E}} - X_{j\mathcal{E}}$ についてのリアプノフ方程式 (26) を得る.

$$\begin{aligned} &Z_{j\mathcal{E}}(A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}}) + (A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}})^T Z_{j\mathcal{E}} \\ &\quad + \gamma_j^{-2} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} - \gamma_j^{-2} P_{\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} P_{\mathcal{E}} \\ &\quad + X_{j\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} (P_{\mathcal{E}} - P_{\mathrm{app}\mathcal{E}}) + (P_{\mathcal{E}} - P_{\mathrm{app}\mathcal{E}})^T S_{j\mathcal{E}} X_{j\mathcal{E}} \\ &\quad (j=1,\ 2) \end{aligned} \tag{26}$$

ここで, $P_{\mathcal{E}} - P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} = O(\|\mu\|)$ の関係に注意すれば, リアプノフ方程式 (26) はリアプノフ方程式 (27) に変形できる.

$$\begin{aligned} &Z_{j\mathcal{E}}(A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}}) + (A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}})^T Z_{j\mathcal{E}} \\ &\quad - \gamma_j^{-2} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} O(\|\mu\|) - \gamma_j^{-2} O(\|\mu\|) S_{j\mathcal{E}} P_{\mathrm{app}\mathcal{E}} \\ &\quad - \gamma_j^{-2} O(\|\mu\|) S_{j\mathcal{E}} O(\|\mu\|) + X_{j\mathcal{E}} S_{j\mathcal{E}} O(\|\mu\|) \\ &\quad + O(\|\mu\|) S_{j\mathcal{E}} X_{j\mathcal{E}} = 0,\ (j=1,\ 2) \end{aligned} \tag{27}$$

リアプノフ方程式 (27) において, 陰関数定理およびリアプノフ方程式の性質 [10] を利用する. D_{jj}, $(j=1,\ 2)$, D_0 の安定性より, 定理 2 の証明と同様にして, 容易に $Z_{j\mathcal{E}} = Y_{j\mathcal{E}} - X_{j\mathcal{E}} = O(\|\mu\|)$ が得られる. したがって, 関係式 (20) が得られる. □

5.　マルチモデルシステムの一般化リアプノフ方程式

提案されたパレート準最適戦略 (19) の有用性を確認するために, マルチモデルシステムに対するリアプノフ方程式 (23), (25) を解く必要がある. MATLAB のような実用的なツールを用いても, マルチモデルシステムを扱う場合, 非常に小さな摂動項 $\varepsilon_j,\ (j=1,\ \cdots,4)$ の影響のため, 十分な精度の解を得ることは難しい. 現在のところ, 特異摂動システムに対する再帰的アルゴリズムは研究されているが, マルチモデルシステムに対するリアプノフ方程式に関する数値解法は研究されていない. そこで, マルチモデルシステムに対するリアプノフ方程式を解くための数値解法を導出する.

マルチモデルシステムに対するリアプノフ方程式 (23), (25) は, 一般的なリアプノフ方程式 (28) の形で表現できる.

$$\Lambda_{\mathcal{E}}^T\Xi_{\mathcal{E}}+\Xi_{\mathcal{E}}\Lambda_{\mathcal{E}}+U=0 \tag{28}$$

ただし, $\Lambda_{\mathcal{E}}$, U は既知, $\Xi_{\mathcal{E}}$ は未知である. さらに, $\Xi_{\mathcal{E}}$ は, 3 章の一般化リカッチ方程式の議論と同様な理由から, 以下の構造をもつと仮定する.

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{00} & \varepsilon_1\Xi_{10}^T & \varepsilon_2\Xi_{20}^T\\ \Xi_{10} & \Xi_{11} & \sqrt{\alpha}^{-1}\Xi_{21}^T\\ \Xi_{20} & \sqrt{\alpha}\Xi_{21} & \Xi_{22}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{N\times N}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02}\\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \mathcal{E}\Lambda_{12}\\ \Lambda_{20} & \mathcal{E}\Lambda_{21} & \Lambda_{22}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{N\times N}$$

$$U=U^T=\begin{bmatrix}U_{00} & U_{01} & U_{02}\\ U_{01}^T & U_{11} & \mathcal{E}U_{12}\\ U_{02}^T & \mathcal{E}U_{12}^T & U_{22}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{N\times N}$$

$$\Xi_{jj}=\Xi_{jj}^T,\ \Lambda_{jj},\ U_{jj}=U_{jj}^T\in\mathbf{R}^{n_j\times n_j},\ \mathcal{E}=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$(j=0,\ 1,\ 2)$. ここで, $\Xi_{\mathcal{E}}=\Phi_{\mathcal{E}}\Xi\in\mathbf{R}^{N\times N}$, $\Lambda_{\mathcal{E}}=\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}\Lambda\in\mathbf{R}^{N\times N}$ を考慮すれば, リアプノフ方程式 (28) は, 以下の一般化リアプノフ方程式 (29) と等価であることが容易に示される [14]. したがって, 一般化リアプノフ方程式 (29) を考える.

$$\Lambda^T\Xi+\Xi^T\Lambda+U=0 \tag{29}$$

$D_{jj},\ (j=1,\ 2)$, D_0 の安定性より, 一般性を失うことなく, 以下の仮定を設けることができる.

［**仮定 4**］　$\Lambda_{jj}^{-1},\ (j=1,\ 2)$ が存在し, Λ_{jj} および $\Lambda_0\equiv\Lambda_{00}-\Lambda_{01}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{10}-\Lambda_{02}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{20}$ が共に安定行列である.

まず, 一般化リアプノフ方程式 (29) を分割計算する.

$$\Lambda_{00}^T\Xi_{00}+\Xi_{00}\Lambda_{00}+\Lambda_{10}^T\Xi_{10}+\Xi_{10}^T\Lambda_{10}+\Lambda_{20}^T\Xi_{20}+\Xi_{20}^T\Lambda_{20}+U_{00}=0 \tag{30a}$$

$$\Xi_{00}\Lambda_{01}+\Xi_{10}^T\Lambda_{11}+\mathcal{E}\Xi_{20}^T\Lambda_{21}+\varepsilon_1\Lambda_{00}^T\Xi_{10}^T+\Lambda_{10}^T\Xi_{11}+\sqrt{\alpha}\Lambda_{20}^T\Xi_{21}+U_{01}=0 \tag{30b}$$

$$\Xi_{00}\Lambda_{02}+\Xi_{20}^T\Lambda_{22}+\mathcal{E}\Xi_{10}^T\Lambda_{12}+\varepsilon_2\Lambda_{00}^T\Xi_{20}^T+\Lambda_{20}^T\Xi_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{10}^T\Xi_{21}^T+U_{02}=0 \tag{30c}$$

$$\Lambda_{11}^T\Xi_{11}+\Xi_{11}\Lambda_{11}+\varepsilon_1(\Lambda_{01}^T\Xi_{10}^T+\Xi_{10}\Lambda_{01}+\Lambda_{21}^T\Xi_{21}+\Xi_{21}^T\Lambda_{21})+U_{11}=0 \tag{30d}$$

$$\varepsilon_1\Xi_{10}\Lambda_{02}+\varepsilon_2\Lambda_{01}^T\Xi_{20}^T+\sqrt{\alpha}\Xi_{21}^T\Lambda_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{11}^T\Xi_{21}^T+\mathcal{E}(\Xi_{11}\Lambda_{12}+\Lambda_{21}^T\Xi_{22})+\mathcal{E}U_{12}=0 \tag{30e}$$

$$\Lambda_{22}^T\Xi_{22}+\Xi_{22}\Lambda_{22}+\varepsilon_2(\Lambda_{02}^T\Xi_{20}^T+\Xi_{20}\Lambda_{02}+\Lambda_{12}^T\Xi_{21}^T+\Xi_{21}\Lambda_{12})+U_{22}=0 \tag{30f}$$

方程式 (30) に対して, $\varepsilon_j\to+0,\ (j=1,\ 2)$ とすれば 0–オーダ方程式 (31) を得る. このとき, 方程式 (30) の 0–オーダ解を $\bar{\Xi}_{00}$, $\bar{\Xi}_{10}$, $\bar{\Xi}_{20}$, $\bar{\Xi}_{11}$, $\bar{\Xi}_{21}$, $\bar{\Xi}_{22}$ と定義する.

$$\Lambda_{00}^T\bar{\Xi}_{00}+\bar{\Xi}_{00}\Lambda_{00}+\Lambda_{10}^T\bar{\Xi}_{10}+\bar{\Xi}_{10}^T\Lambda_{10}+\Lambda_{20}^T\bar{\Xi}_{20}+\bar{\Xi}_{20}^T\Lambda_{20}+U_{00}=0 \tag{31a}$$

$$\bar{\Xi}_{00}\Lambda_{01}+\bar{\Xi}_{10}^T\Lambda_{11}+\Lambda_{10}^T\bar{\Xi}_{11}+\sqrt{\alpha}\Lambda_{20}^T\bar{\Xi}_{21}+U_{01}=0 \tag{31b}$$

$$\bar{\Xi}_{00}\Lambda_{02}+\bar{\Xi}_{20}^T\Lambda_{22}+\Lambda_{20}^T\bar{\Xi}_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{10}^T\bar{\Xi}_{21}^T+U_{02}=0 \tag{31c}$$

$$\Lambda_{jj}^T\bar{\Xi}_{jj}+\bar{\Xi}_{jj}\Lambda_{jj}+U_{jj}=0 \tag{31d}$$

$$\sqrt{\alpha}\bar{\Xi}_{21}^T\Lambda_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{11}^T\bar{\Xi}_{21}^T=0 \tag{31e}$$

$(j=1,\ 2)$. $\Lambda_{jj},\ (j=1,\ 2)$ が安定であるので, 明らかに代数方程式 (31e) は $\bar{\Xi}_{21}=0$ なる解をもつことがわかる. 最終的に, $\bar{\Xi}_{21}=0$ から, 方程式 (31) は $\bar{\alpha}$ に依存しない以下の 0–オーダ方程式 (32) に書き換えることが可能である.

$$\Lambda_0^T\bar{\Xi}_{00}+\bar{\Xi}_{00}\Lambda_0+U_{00}-U_{01}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{10}-\Lambda_{10}^T\Lambda_{11}^{-T}U_{01}^T-U_{02}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{20}-\Lambda_{20}^T\Lambda_{22}^{-T}U_{02}^T+\Lambda_{10}^T\Lambda_{11}^{-T}U_{11}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{10}+\Lambda_{20}^T\Lambda_{22}^{-T}U_{22}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{20}=0 \tag{32a}$$

$$\bar{\Xi}_{j0}^T=-(\bar{\Xi}_{00}\Lambda_{0j}+\Lambda_{j0}^T\bar{\Xi}_{jj}+U_{0j})\Lambda_{jj}^{-1} \tag{32b}$$

$$\Lambda_{jj}^T\bar{\Xi}_{jj}+\bar{\Xi}_{jj}\Lambda_{jj}+U_{jj}=0 \tag{32c}$$

$(j=1,\ 2)$. 以上の準備のもとで, 一般化リアプノフ方程式 (29) を解くための不動点アルゴリズム (33) を提案する.

$$\sqrt{\alpha}\Xi_{21}^{(i+1)T}\Lambda_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{11}^T\Xi_{21}^{(i+1)T}+\varepsilon_1\Xi_{10}^{(i)}\Lambda_{02}+\varepsilon_2\Lambda_{01}^T\Xi_{20}^{(i)T}+\mathcal{E}(\Xi_{11}^{(i)}\Lambda_{12}+\Lambda_{21}^T\Xi_{22}^{(i)})+\mathcal{E}U_{12}=0 \tag{33a}$$

$$\Lambda_{11}^T\Xi_{11}^{(i+1)}+\Xi_{11}^{(i+1)}\Lambda_{11}+\varepsilon_1(\Lambda_{01}^T\Xi_{10}^{(i)T}+\Xi_{10}^{(i)}\Lambda_{01}+\Lambda_{21}^T\Xi_{21}^{(i)}+\Xi_{21}^{(i)T}\Lambda_{21})+U_{11}=0 \tag{33b}$$

$$\Lambda_{22}^T\Xi_{22}^{(i+1)}+\Xi_{22}^{(i+1)}\Lambda_{22}+\varepsilon_2(\Lambda_{02}^T\Xi_{20}^{(i)T}+\Xi_{20}^{(i)}\Lambda_{02}+\Lambda_{12}^T\Xi_{21}^{(i)T}+\Xi_{21}^{(i)}\Lambda_{12})+U_{22}=0 \tag{33c}$$

$$\Lambda_0^T\Xi_{00}^{(i+1)}+\Xi_{00}^{(i+1)}\Lambda_0-\Lambda_{10}^T\Lambda_{11}^{-T}\Xi_{10}^{(i)}-\Xi_{10}^{(i)T}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{10}-\Lambda_{20}^T\Lambda_{22}^{-T}\Xi_{20}^{(i)}-\Xi_{20}^{(i)T}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{20}+U_{00}=0 \tag{33d}$$

$$\Xi_{j0}^{(i+1)}=-\Lambda_{jj}^{-T}(\Lambda_{0j}^T\Xi_{00}^{(i+1)}+\Xi_{j0}^{(i)}) \tag{33e}$$

$(j=1,\ 2)$. ただし,

$$\Xi_{10}^{(i)}=\mathcal{E}\Lambda_{21}^T\Xi_{20}^{(i)}+\varepsilon_1\Xi_{10}^{(i)}\Lambda_{00}+\Xi_{11}^{(i+1)T}\Lambda_{10}+\sqrt{\alpha}\Xi_{21}^{(i+1)T}\Lambda_{20}+U_{01}^T,$$

$$\Xi_{20}^{(i)}=\mathcal{E}\Lambda_{12}^T\Xi_{10}^{(i)}+\varepsilon_2\Xi_{20}^{(i)}\Lambda_{00}+\Xi_{22}^{(i+1)T}\Lambda_{20}$$

$$+\sqrt{\alpha}^{-1}\Xi_{21}^{(i+1)}\Lambda_{10}+U_{02}^T,$$
$$\Xi_{10}^{(0)}=\bar{\Xi}_{10},\ \ \Xi_{20}^{(0)}=\bar{\Xi}_{20},\ \ \Xi_{11}^{(0)}=\bar{\Xi}_{11}$$
$$\Xi_{22}^{(0)}=\bar{\Xi}_{22},\ \ \Xi_{21}^{(0)}=0,\ \ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(注意) 不動点アルゴリズム (33) は, Banach の不動点定理 “X を Banach 空間とし, $f:X\to X$ が任意の $x,\ y\ \in X$ に対して, 縮小性の条件 $\|f(x)-f(y)\|\le k\|x-y\|,\ 0<k<1$ を満たすとき, 点列 $x_{n+1}=f(x_n)$ は f の唯一の不動点 x^* に収束する.” [19] に基づいている. さらに, 不動点アルゴリズムという名前は, Banach の不動点定理に由来するものである. したがって, 不動点アルゴリズム (33) は, 通常の不動点アルゴリズムという意味で用いられる連続変形法に基づくアルゴリズムでないことに注意を要する.

不動点アルゴリズム (33) に関して, 以下の性質が成立する.

《**定理 4**》 仮定 4 のもと, 不動点アルゴリズム (33) は, $O(\|\mu\|^{i+1})$ オーダの速さで, 解 Ξ_{lm} に収束する. すなわち

$$\|\Xi_{lm}^{(i)}-\Xi_{lm}\|=O(\|\mu\|^{i+1}),\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{34}$$
$$(l,\ m)=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

(**証明**) 証明は数学的帰納法によって行われる. $i=0$ のとき, 不動点アルゴリズム (33) の初期条件を確認すれば, 解 $\Xi_{lm}^{(0)}$ は, 0–オーダ方程式 (32) の 0–オーダ解によって構成されている. したがって, $\|\Xi_{lm}^{(0)}-\Xi_{lm}\|=O(\|\mu\|)$ が成立する. 不動点アルゴリズム (33) に対して, $i=k\ (i\ge 1)$ のとき, $\|\Xi_{lm}^{(k)}-\Xi_{lm}\|=O(\|\mu\|^{k+1})$ が成立すると仮定する. 不動点アルゴリズム (33) から方程式 (30) を引くことによって, 以下の方程式を得ることができる.

$$\sqrt{\alpha}(\Xi_{21}^{(k+1)}-\Xi_{21})^T\Lambda_{22}+\sqrt{\alpha}^{-1}\Lambda_{11}^T(\Xi_{21}^{(k+1)}-\Xi_{21})^T$$
$$+\varepsilon_1(\Xi_{10}^{(k)}-\Xi_{10})\Lambda_{02}+\varepsilon_2\Lambda_{01}^T(\Xi_{20}^{(k)}-\Xi_{20})^T$$
$$+\mathcal{E}[(\Xi_{11}^{(k)}-\Xi_{11})\Lambda_{12}+\Lambda_{21}^T(\Xi_{22}^{(k)}-\Xi_{22})]=0$$
$$\Lambda_{11}^T(\Xi_{11}^{(k+1)}-\Xi_{11})+(\Xi_{11}^{(k+1)}-\Xi_{11})\Lambda_{11}$$
$$+\varepsilon_1[\Lambda_{01}^T(\Xi_{10}^{(k)}-\Xi_{10})^T+(\Xi_{10}^{(k)}-\Xi_{10})\Lambda_{01}$$
$$+\Lambda_{21}^T(\Xi_{21}^{(k)}-\Xi_{21})+(\Xi_{21}^{(k)}-\Xi_{21})^T\Lambda_{21}]=0$$
$$\Lambda_{22}^T(\Xi_{22}^{(k+1)}-\Xi_{22})+(\Xi_{22}^{(k+1)}-\Xi_{22})\Lambda_{22}$$
$$+\varepsilon_2[\Lambda_{02}^T(\Xi_{20}^{(k)}-\Xi_{20})^T+(\Xi_{20}^{(k)}-\Xi_{20})\Lambda_{02}$$
$$+\Lambda_{12}^T(\Xi_{21}^{(k)}-\Xi_{21})^T+(\Xi_{21}^{(k)}-\Xi_{21})\Lambda_{12}]=0$$
$$\Lambda_0^T(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})+(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})\Lambda_0$$
$$-\Lambda_{10}^T\Lambda_{11}^{-T}\Pi_{10}^{(k)}-\Pi_{10}^{(k)T}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{10}$$
$$-\Lambda_{20}^T\Lambda_{22}^{-T}\Pi_{20}^{(k)}-\Pi_{20}^{(k)T}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{20}=0$$
$$\Xi_{j0}^{(k+1)}-\Xi_{j0}=-\Lambda_{jj}^{-T}[\Lambda_{0j}^T(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})+\Pi_{j0}^{(k)}]$$

$(j=1,\ 2)$. ただし,

$$\Pi_{10}^{(k)}=\mathcal{E}\Lambda_{21}^T(\Xi_{20}^{(k)}-\Xi_{20})+\varepsilon_1(\Xi_{10}^{(k)}-\Xi_{10})\Lambda_{00}$$
$$+(\Xi_{11}^{(k+1)}-\Xi_{11})^T\Lambda_{10}+\sqrt{\alpha}(\Xi_{21}^{(k+1)}-\Xi_{21})\Lambda_{20}$$
$$\Pi_{20}^{(k)}=\mathcal{E}\Lambda_{12}^T(\Xi_{10}^{(k)}-\Xi_{10})+\varepsilon_2(\Xi_{20}^{(k)}-\Xi_{20})\Lambda_{00}$$
$$+(\Xi_{22}^{(k+1)}-\Xi_{22})^T\Lambda_{20}+\sqrt{\alpha}^{-1}(\Xi_{21}^{(k+1)}-\Xi_{21})\Lambda_{10}$$

仮定である $\|\Xi_{lm}^{(k)}-\Xi_{lm}\|=O(\|\mu\|^{k+1})$ を上式に代入する. 仮定 4 の $\Lambda_{jj},\ (j=1,\ 2)$ および Λ_0 の安定性, およびリアプノフ方程式の性質 [10] を考慮すれば, 以下の関係式を得る.

$$\Xi_{jj}^{(k+1)}-\Xi_{jj}=O(\mathcal{E}^{k+2}),\ \Xi_{21}^{(k+1)}-\Xi_{21}=O(\mathcal{E}^{k+2})$$
$$\Lambda_0^T(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})+(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})\Lambda_0=O(\mathcal{E}^{k+2})$$
$$\Xi_{j0}^{(k+1)}-\Xi_{j0}=-\Lambda_{jj}^{-T}\Lambda_{0j}^T(\Xi_{00}^{(k+1)}-\Xi_{00})+O(\mathcal{E}^{k+2})$$

$(j=1,\ 2)$. 以上より, 容易に $\|\Xi_{lm}^{(k+1)}-\Xi_{lm}\|=O(\|\mu\|^{k+2})$ が得られる. したがって, すべての $i\in\mathbf{N}$ に対して, (34) が成立する. □

(注意) 不動点アルゴリズムは, 再帰的アルゴリズム [12] と全く異なることに注意が必要である. 再帰的アルゴリズムでは, 解を 0–オーダ解と偏差に分離して, 偏差を繰り返し計算によって求めている. そのため, 要求される解は, 0–オーダ解の精度に依存する. 本論文で提案された不動点アルゴリズムは, 解を 0–オーダ解と偏差に分離しないので, そのような問題は起らない. さらに, 従来の結果 [12] と異なり. 複数の摂動項が含まれる場合でも解を得ることが可能である.

6. 数値例

提案されたパレート準最適戦略 (19), および不動点アルゴリズム (33) の有用性を確認するために, 数値シミュレーションを行う. 対象にするマルチモデルシステムは, 文献 1) の Appendix A の例題で扱われているマルチエリア電力システムである. システムの係数行列を以下に与える. ただし, $\gamma_1=\gamma_2=0.5$ であり, $0_{l\times m}\in\mathbf{R}^{l\times m}$ は零行列である.

$$A_{00}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4.5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4.5 & -1\\ 0 & 0 & -0.05 & 0 & -0.1\\ 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.1\\ 0 & 0 & 32.7 & -32.7 & 0\end{bmatrix},\ A_{jj}=\begin{bmatrix}-0.05 & 0.05\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}$$

$$A_{01}=\begin{bmatrix}0_{2\times 2}\\ A_p\\ 0_{2\times 2}\end{bmatrix},\ A_{02}=\begin{bmatrix}0_{3\times 2}\\ A_p\\ 0_{1\times 2}\end{bmatrix},\ A_p=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix}^T$$

$$A_{10}=\begin{bmatrix}0_{2\times 2} & -4A_q & 0_{2\times 2}\end{bmatrix},\ A_q=\begin{bmatrix}0 & 0.1\end{bmatrix}^T$$

$$A_{20}=\begin{bmatrix}0_{2\times 3} & -4A_q & 0_{2\times 1}\end{bmatrix},\ B_{0j}=0_{5\times 1},\ B_{jj}=A_q$$

$$Q_1=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\ R_1=20$$

$$Q_2=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1),\ R_2=20$$

$(j=1,\ 2)$. パレート準最適戦略 (19) および $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0.01$, $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0$ のときのパレート最適戦略 (5) を次ページ上段に与える. パレート準最適戦略 (19) は, 従来の方法である 2 時間分割法 [1] あるいはディスクリプタ形式の分割法 [13] による合成制御則による設計法と全く異なる手法を利用して設計されているにも関わらず, 文献 1) の Appendix A の例題で計算された合成制御則 (C–8), (C–9) に一致している. 実は, この結果に対して, 非常に最近, 著者によって一般の場合

Table 1.

ε_1	ε_2	η_1 [%]	η_2 [%]	δ_1	δ_2	$\lVert\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}^{\text{fixed}})\rVert$	$\lVert\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}^{\text{lyap2}})\rVert$
10^{-2}	10^{-2}	8.9362	8.9362	1.0458×10^{-2}	1.0458×10^{-2}	8.9060×10^{-13}	1.9642×10^{-12}
10^{-2}	5×10^{-3}	6.4548	2.0955	1.0011×10^{-2}	3.2977×10^{-3}	9.1182×10^{-12}	4.8479×10^{-12}
10^{-3}	10^{-3}	4.3513×10^{-2}	4.3513×10^{-2}	4.2792×10^{-4}	4.2792×10^{-4}	1.5017×10^{-12}	1.4629×10^{-11}
10^{-3}	5×10^{-4}	2.0219×10^{-1}	1.4916×10^{-1}	2.8028×10^{-3}	2.0692×10^{-3}	7.8161×10^{-12}	1.0342×10^{-11}
10^{-4}	10^{-4}	4.0917×10^{-4}	4.0917×10^{-4}	3.9833×10^{-5}	3.9833×10^{-5}	3.8133×10^{-12}	2.4759×10^{-11}
10^{-4}	5×10^{-5}	1.7049×10^{-2}	1.6546×10^{-2}	2.3464×10^{-3}	2.2774×10^{-3}	3.8632×10^{-12}	7.3118×10^{-11}
10^{-5}	10^{-5}	4.0671×10^{-6}	4.0671×10^{-6}	3.9556×10^{-6}	3.9556×10^{-6}	5.2460×10^{-12}	2.8575×10^{-10}
10^{-5}	5×10^{-6}	1.6741×10^{-3}	1.6691×10^{-3}	2.3026×10^{-3}	2.2957×10^{-3}	4.7145×10^{-12}	8.5766×10^{-10}
10^{-6}	10^{-6}	4.0646×10^{-8}	4.0647×10^{-8}	3.9528×10^{-7}	3.9529×10^{-7}	8.1350×10^{-13}	6.1904×10^{-9}
10^{-7}	10^{-7}	4.0556×10^{-10}	4.0726×10^{-10}	3.9440×10^{-8}	3.9606×10^{-8}	2.0742×10^{-12}	5.2063×10^{-9}
10^{-8}	10^{-8}	3.1662×10^{-12}	4.9612×10^{-12}	3.0791×10^{-9}	4.8247×10^{-9}	9.0412×10^{-13}	1.6680×10^{-6}

$$u_{1\text{app}} = -\begin{bmatrix} 3.1623\times10^{-1} & -2.3649\times10^{-13} & 4.4733 & -1.9108 & 5.0131\times10^{-2} & 1.6226\times10^{-2} & 3.2582\times10^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$u_{2\text{app}} = -\begin{bmatrix} 1.5296\times10^{-14} & 3.1623\times10^{-1} & -1.9108 & 4.4733 & -5.0131\times10^{-2} & 0 & 0 & 1.6226\times10^{-2} & 3.2582\times10^{-2} \end{bmatrix} x$$

$$u_1^* = -\left[\begin{array}{lllll} 3.1623\times10^{-1} & 4.7351\times10^{-16} & 4.5806 & -1.8694 & -5.3001\times10^{-2} \\ \quad 1.0786\times10^{-1} & 7.5897\times10^{-2} & -3.7827\times10^{-2} & -1.7579\times10^{-2} & \end{array}\right] x$$

$$u_2^* = -\left[\begin{array}{lllll} 5.3180\times10^{-16} & 3.1623\times10^{-1} & -1.8694 & 4.5806 & 5.3001\times10^{-2} \\ \quad -3.7827\times10^{-2} & -1.7579\times10^{-2} & 1.0786\times10^{-1} & 7.5897\times10^{-2} & \end{array}\right] x$$

でも成立することが示された[15)]. したがって, パレート準最適戦略 (19) は, 境界層システムの状態行列が特異性であっても構築可能という意味で, 文献 1) の合成制御則を完全に含んでいる.

パレート準最適戦略 (19) をマルチモデルシステムに適用したときのコスト汎関数の値を評価するために, コスト汎関数 (22), (24) を計算する. ただし, 初期条件は文献 1) の Appendix A の例題で扱われている初期条件を利用する. すなわち, $x(0)$ は平均 0, 共分散行列が $E[x(0)x(0)^T] = 10^{-4}\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 0.01,\ 0.01,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ で与えられる独立なベクトルであると仮定する. ただし, $E[\cdot]$ は期待値を表す. コスト汎関数の値 (22), (24) は, それぞれ $E[J_{1\text{app}}] = E[J_{2\text{app}}] = 1.2749\times10^{-3}$, $E[J_1^*] = E[J_2^*] = 1.1703\times10^{-3}$ である. したがって, コスト汎関数の損失は

$$\eta_1 := \frac{|E[J_{1\text{app}}] - E[J_1^*]|}{E[J_1^*]} \times 100 = 8.9362\ [\%]$$

$$\eta_2 := \frac{|E[J_{2\text{app}}] - E[J_2^*]|}{E[J_2^*]} \times 100 = 8.9362\ [\%]$$

である. 異なる ε_1, ε_2 に対するコスト汎関数の損失を Table 1. に示す. さらに, 評価式 (20) を確認するために

$$\delta_1 := \frac{|E[J_{1\text{app}}] - E[J_1^*]|}{\mathcal{E}},\ \delta_2 := \frac{|E[J_{2\text{app}}] - E[J_2^*]|}{\mathcal{E}}$$

の値を Table 1. に示す. Table 1. から, δ_j が有界な定数で表されるので, $|E[J_{2\text{app}}] - E[J_2^*]| = O(\|\mu\|)$ であることがわかる[(注 3)]. したがって, コスト汎関数の劣化の程度が (20) で表現されることが確認される. 以上より, 摂動項の値が十分小さい場合, パレート準最適戦略 (19) は準最適性を保証する. 数値例では示されていないが, 本論文の手法は, 境界層システムの非特異性は必要ない. したがって, より広いクラスのマルチモデルシステムに適用可能である.

最後に, 不動点アルゴリズム (33) の有用性を確認する. まず, $X_{1\mathcal{E}}$ に関する関数を以下のように定義する. $\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}) = X_{1\mathcal{E}}(A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}}) + (A_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}})^T X_{1\mathcal{E}} + Q_1 + \gamma_1^{-2}P_{\mathcal{E}}S_{1\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}}$ 解の正確さを確認するために, 異なる ε_1, ε_2 に対する残差 $\|\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}^{\text{fixed}})\|$, $\|\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}^{\text{lyap2}})\|$ を Table 1. に示す. ただし, $X_{1\mathcal{E}}^{\text{fixed}}$ は, 不動点アルゴリズム (33) を利用して得られた解, $X_{1\mathcal{E}}^{\text{lyap2}}$ は, MATLAB に付属しているリアプノフ方程式を解く関数 `lyap2` を利用して得られた解を表す. Table 1. より, MATLAB の場合, 摂動項 ε_1, ε_2 が 10^{-6} オーダより小さくなると, 解の精度がしだいに減少していることがわかる. 特に, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-8}$ の場合, $\|\mathcal{F}(X_{1\mathcal{E}}^{\text{lyap2}})\| = 1.6680\times10^{-6}$ である. このとき, 摂動項の値より残差のほうが大きいので, 得られた結果に対して, MATLAB によって得られた解の信頼性が保証されない. 一方, そのような十分小さな摂動項に対して, 不動点アルゴリズム (33) は, 一定の精度で解が求まっていることが確認される. この原因として, 通常のリアプノフ方程式 (28) は, 摂動項の影響で, 悪条件 (ill conditioned)[11)] となるのに対して, 不動点アルゴリズム (33) は, 一般化リアプノフ方程式 (29) を利用しているため, 悪条件にならないことが考えられる. 以上より, 摂動項が十分小さい場合, リアプノフ方程式 (28) に対して, 安易に MATLAB の `lyap2` を利用すべきではないことに注意が必要である.

一般化リアプノフ方程式 (29) を, 標準的な連立一次方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ に直接変形して解くことも考えられる. しかしながら, 解くべき方程式の次元 ($\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$) は, $N = n_0 + n_1 + n_2$ の増加にともない 2 乗に比例する. したがって, 連立一次方

(注 3) 本論文では, ある正の実数 $\|\mu\|$ に対する関数 $g(\|\mu\|)$ に対して, $g(\|\mu\|) = O(\|\mu\|) \Leftrightarrow \lim_{\|\mu\|\to+0} \frac{g(\|\mu\|)}{\|\mu\|} < \infty$ が成立するので, $\frac{|E[J_{1\text{app}}] - E[J_1^*]|}{\mathcal{E}}$ を評価している.

程式に直接変形して解くことは, 実用面から十分でない. 一方不動点アルゴリズム (33) は, 最大で $\max\{n_0,\ n_1,\ n_2\}$ 次元のリアプノフ方程式を繰り返し解くだけで良い. さらに, 十分小さい摂動項に対しても, アルゴリズムに含まれるリアプノフ方程式は悪条件でない. したがって, 低次元の範囲で, MATLAB の`lyap2`や, Hessenberg–Schur method [18] 等が利用できるという意味で大変有用である.

7. まとめ

本論文では, マルチモデルシステムに対する文献 1), 5) の結果を拡張した. 導出された近似制御則は, 境界層システムの状態行列の非特異性を要求しない. さらに, 摂動項の値は既知である必要がない. その結果, 広いクラスのマルチモデルシステムに対して, 近似制御則が構築可能である. その他の重要な特徴として, マルチモデルシステムのリアプノフ方程式を解くために, 新たに不動点アルゴリズムに基づく数値計算アルゴリズムを開発した. 提案されたアルゴリズムは, 再帰的アルゴリズムと異なり, 収束が 0–オーダ解に依存しないので, 正確に解くことが可能である. また, 最適レギュレータ問題は, パレート最適戦略決定問題の特別な場合であるので, 得られた結果は, 容易に最適レギュレータ問題に応用することが可能である.

最後に, 今後の課題を述べる. 非常に最近, 文献 13) で得られた結果を応用して, ε_j を無視した制御則 (19) は, 2 時間分割法, あるいはディスクリプタ形式の分割法を利用して得られる文献 1) の Appendix A の合成制御則 (C–8), (C–9) と同一であることが証明された [15]. 以上より, 最適制御問題やカルマンフィルタ設計問題に対してもフルオーダのリカッチ方程式の解によって構築された制御則に含まれている摂動項を恒等的に 0 に設定することで, 従来法によって構築される制御則と全く同一である制御則が構築可能であると予測できる. この予測が, 厳密に定式化されて, 証明が行われれば, 文献 16) で示されている以下の大変有用な結果 “特異摂動システムの退化システムと境界層システムを作る操作と, フィードバックシステムを作る操作が, ある条件のもとで順序交換可能である” に準じる以下の結果, “ある条件のもと, 特異摂動システムの退化システムと境界層システムから合成された制御則と, 全次元のフィードバック制御則の摂動項を全て無視した制御則は同一である” が得られると期待される. しかしながら, 本論文では推測に止め, 今後の課題として研究を継続していく予定である.

参 考 文 献

1) H. K. Khalil and P. V. Kokotovic : Control strategies for decision makers using different models of the same system, IEEE Trans. Automatic Control, **23**–2, 289/298 (1978)
2) H. K. Khalil and P. V. Kokotovic : Control of linear systems with multiparameter singular peturbations, Automatica, **15**, 197/207 (1979)
3) H. K. Khalil and P. V. Kokotovic : D–Stability and multi–parameter singular perturbation, SIAM J. Control and Optimization, **17**–1, 56/65 (1979)
4) Z. Gajic and H. K. Khalil : Multimodel strategies under randam disturbances and imperfect partial observations, Automatica, **22**, 121/125 (1986)
5) Z. Gajic : The existence of a unique and bounded solution of the algebraic Riccati equation of multimodel estimation and control problems, Syst. Control Lett., **10**, 185/190 (1988)
6) C. Coumarbatch and Z. Gajic : Exact decomposition of the algebraic Riccati equation of deterministic multimodeling optimal control problems, IEEE Trans. Automatic Control, **45**–4, 790/794 (2000)
7) C. Coumarbatch and Z. Gajic : Parallel optimal Kalman filtering for stochastic systems in multimodeling form, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, **122**, 542/550 (2000)
8) M. Salman, A. Lee and N. Boustany: Reduced order design of active suspension control, Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control, **112**, 604/610 (1990)
9) J. R. Magnus and H. Neudecker : Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley and Sons, New York (1999)
10) K. Zhou : Essentials of Robust Control, Prentice–Hall, New Jersey (1998)
11) J. M. Ortega: Numerical analysis, A second course, SIAM, Philadelphia (1990)
12) Z. Gajic, D. Petkovski and X. Shen : Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System–a Recursive Approach: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Springer–Verlag, Berlin (1990)
13) H. Xu, H. Mukaidani and K. Mizukami : New method for composite optimal control of singularly perturbed systems, Int. J. Systems Sciences, **28**–2, 161/172 (1997)
14) H. Mukaidani, H. Xu and K. Mizukami: Recursive approach of H_∞ control problems for singularly perturbed systems under perfect and imperfect state measurements, Int. J. Systems Science, **30**–5, 467/477 (1999)
15) H. Mukaidani : Pareto near–optimal strategy of multimodeling systems, Proc. the 27th IEEE IECON01, Colorado, November (2001) (to appear)
16) M. Corless, F. Garofal and L. Glielmo : New results on composite control of singularly perturbed uncertain linear systems Automatica, **29**–2, 121/125 (1993)
17) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly : Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design, Academic Press (1986)
18) G. H. Golub, S. Nash and C. V. Loan : A Hessenberg–Schur method for the problem $AX+XB=C$. IEEE Trans. Automatic Control, **24**–6, 909/913 (1979)
19) 渡辺ほか: 特集「不動点をめぐって」, 情報処理, **33**–4, (1992)

［著 者 紹 介］

向 谷 博 明（正会員）

1994 年 3 月広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了. 97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了. 博士 (工学). 98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手. 現在に至る. 主として, ロバスト制御, 数値解析に関する研究に従事. IEEE, 電気学会および機械学会会員.