

-超スマート社会構築の数理モデルの構築- 確率システムにおける制御の特徴と理解

向谷 博明

広島大学
広島大学大学院先進理工系科学研究科 情報科学プログラム
情報科学部
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/~mukaida>

2020/1/28・電気通信大学

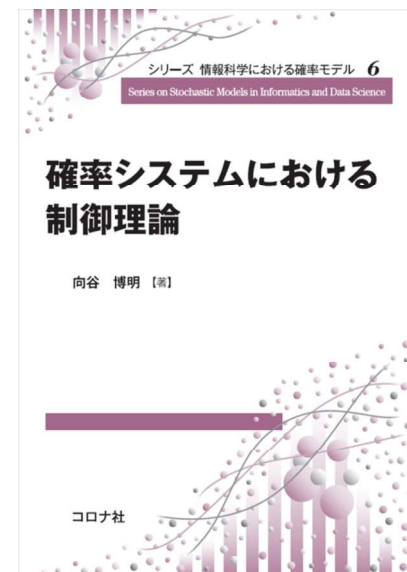
自己紹介

昭和 44 年 11 月 14 日生。
平成 4 年 3 月広島大学総合科学部数理情報学専攻卒業。
平成 6 年 3 月 広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。
平成 9 年 10 月同博士課程後期修了。博士 (工学)。
平成 10 年 4 月広島市立大学情報科学部助手。
平成 14 年 4 月広島大学大学院教育学研究科講師。
平成 17 年 4 月同大学大学院教育学研究科助教授, 准教授。
平成 24 年 4 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻教授となり現在に至る。
平成 19 年 11 月より 10ヶ月間, **JSPS** 特定国派遣研究員としてカナダの **Waterloo** 大学に在籍。
平成 30 年 4 月より広島大学情報科学部専任
令和 2 年 4 月**広島大学大学院先進理工系科学研究科 情報科学プログラム**
主として, 動的ゲームに関する研究に従事。IEEE, 計測自動制御学会等の会員。

目次

- 1 自己紹介
- 2 確率システム
 - 確率過程論
 - ブラウン運動
 - 確率微分方程式
 - 伊藤の公式
 - 確率安定論
 - シミュレーション技法
- 3 確率最適制御問題
 - 有限時間最適レギュレータ問題
 - 確率動的計画法
 - 確率最大原理
 - 4 ステップスキーム
- 4 例題
- 5 まとめ
- 6 今後の課題

確率システムにおける制御理論
(シリーズ 情報科学における確率モデル 6)
コロナ社, 2019.
向谷 博明 (著)



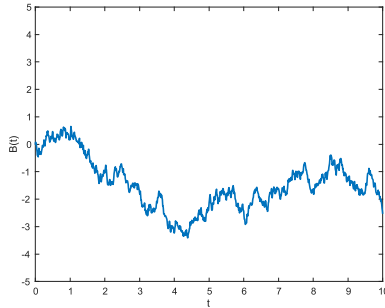


Figure: ブラウン運動の状態軌道

- ブラウン運動とは、水面上に浮かべた花粉の微粒子が、熱運動する水の分子の衝突によって、不規則な動きをすることを指し、1827年、英国の植物学者ロバート・ブラウンによって発見された。
- 微小時間 Δt における微粒子の変位 $\Delta w(t)$ は、 $\sqrt{\Delta t}$ に比例する。すなわち、 $\Delta w(t) \propto \sqrt{\Delta t}$ が成立することを1905年、アルベルト・アインシュタインによって発見された。

- 1 物理現象における観測状態は、 n 個の要素をもつベクトルで表現され、このような点を標本点 (sample points)。
- 2 全ての標本点を含む空間を標本空間といい、通常 Ω と表記。
- 3 標本空間 Ω の部分集合で、いろいろな事象の集まりを F で表記。

σ -加法族 (σ -algebra : σ -集合代数)

標本空間 Ω の部分集合からなる集合族 F が Ω の σ -加法族であるとは、以下の3つの条件を F が満足することをいう。

- 1 $\Omega \in F$
- 2 $A \in F$ ならば、 $A^c = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\} \in F$
- 3 $A_1, A_2, \dots, A_n \in F$ ならば、 $\cup_{k=1}^n A_k \in F$

確率測度 P

以下の3つの公理によって定義された確率という1つの集合関数を確率測度 P という。

- 1 事象集合の中にある集合 A に対して、 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。
- 2 標本空間 Ω , 空集合 ϕ に対して、 $P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$ 。
- 3 2つの事象 A_1 および A_2 が互いに排反である。

(Ω, F, P) 確率空間

標本空間 Ω , σ -加法族 F , その上の確率測度 P をあわせて確率空間と言い、 (Ω, F, P) で表す。一方、コイントス, ルーレット, 競馬, 競艇, 株式市場, 為替等, 多くの場合, 将来予測できないことが時間と共に遷移する。現在までの結果を利用して, 今後を予測し, 戦略を考える。数学的にはこれを時間と共に増大する情報の族 (σ -加法族の増大列) を考慮することによって戦略を構築する。このような F の部分 σ -加法族の増大列をフィルトレーション (filtration) という。すなわち,

$$F_s \subset F_t \subset F, \quad 0 \leq s < t$$

このとき, (Ω, F, F_t, P) をフィルター付き確率空間という。

確率空間 (Ω, F, P) 上で定義された連続時間の確率過程 $w(t)$ に対して, 以下の4つの条件を満足するとき, 一次元ブラウン運動 (one-dimensional Brownian motion) または一次元ウィナー過程 (one-dimensional Wiener process) とよばれる。

一次元ブラウン運動

- 1 $w(0) = 0$ a.s. あるいは、 $P(w(0) = 0) = 1$ 。
- 2 ある自然数 n および、時刻 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対して、 n 個の確率変数

$$w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$$

は独立である。すなわち、定常増分および独立増分を持つ。

- 3 各時刻 $0 \leq s < t$ に対して、確率変数 $w(t) - w(s)$ の分布は、 $w(t) - w(s) \sim N(0, t - s)$ 。特に、 $t > 0$ に対し、 $w(t) \sim N(0, t)$ 。ただし、 $N(\mu, \sigma^2)$ は、平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布を表す。
- 4 確率1で、標本路は連続である。

一次元ブラウン運動の性質：マルコフ性

確率変数 $w(t, \omega)$ は、一次元ブラウン運動であると仮定する。このとき、 $\{w(t, \omega) - w(s, \omega)\}$ は、実数値増分かつ正規分布であり、以下を満足する。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[w(t, \omega) - w(s, \omega)] &= 0 \\ \mathbb{E}[(w(t, \omega) - w(s, \omega))^2] &= \sigma^2 |t - s|\end{aligned}$$

ただし、 σ は正の定数である。特に、分散 $\sigma^2 = 1$ であるとき、**標準ブラウン運動** または **標準ウィナー過程** という。

これは、ブラウン運動の増分 $\{w(t, \omega) - w(s, \omega)\}$ は、実数値でその確率密度関数 $f(x) = f(w_t - w_s)$ が

$$f(w_t - w_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma} \exp\left[-\frac{(w_t - w_s)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right]$$

で表されることを示す。さらに、以下が成立する。

$$P(w(0, \omega) = 0) = 1$$

$$\mathbb{E}[(w(t_3, \omega) - w(t_2, \omega))(w(t_2, \omega) - w(t_1, \omega))] = 0, \quad t_1 < t_2 < t_3$$

微分不可能性

ブラウン運動の標本路は連続であるが、至る所で微分不可能。

【証明】

$$\mathbb{E}[(B_{t+h} - B_t)^2] = \sigma^2 h$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}\{X(t)\}^2\right] = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{B_{t+h} - B(t)}{h}\right)^2\right] = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2 h}{h^2}\right] = \infty$$

を得る。以上より、微分は存在しない。 ■

注意

$$\frac{dB(t)}{dt}$$

という表現は許されない。しかしながら、パワースペクトル密度関数が周波数に対して、一定値をとる正規白色雑音 (**white noise**) を $v(t)$ とおくと、

$$dB(t) = v(t)dt$$

確率システムの実例：その 1-ブラックショールズモデル

株式、為替レート等、価格が確率的に変動する資産のモデル化を考える。

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{S_{t+dt} - S(t)}{S(t)}$$

ただし、資産の時刻 t における価格を $S(t)$ とする。ブラウン運動の性質より、 $B_t - B_s$ は正規分布 $N(0, t - s)$ に従う。

$$dB(t) = B(t + dt) - B(t) \sim N(0, dt)$$

が成立。したがって、確率的な部分からの収益率は $N(0, \sigma^2 dt)$ に従う確率変数となる。これらを合わせて $S(t)$ の時間変化は

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

μ は、ドリフトとよばれ、 μdt で平均成長率を表す。 σ は、標準偏差の単位を持ち、確率的な変動の激しさを表す量。

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, x(u))du + \int_{t_0}^t g(u, x(u))dw(u)$$

ただし、 $w(t) \in \mathbb{R}^1$, ($t \geq 0$) を $w(0) = 0$ を満たす連続時間標準ブラウン運動、 $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態を表す。

第一項は通常のリーマン積分であり、第二項は確率積分 (**stochastic integral**) である。

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)$$

- 関数 $f(t, x(t))$ は、**ドリフト係数 (drift coefficient)**。
- 関数 $g(t, x(t))$ は、**拡散係数 (diffusion coefficient)**。
- 確率微分方程式の解として得られる確率過程 $x(t)$ は、**拡散過程 (diffusion process)** とよばれており、通常はマルコフ過程。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

注意

$\sigma dB(t)$ は、予期せぬ微小変動をブラウン運動として表しており、この項を **ボラティリティ (Volatility)** あるいは、**変動率**という。ボラティリティとは、具体的に価格変動の度合いを示す言葉で、「ボラティリティが大きい」場合は、その資産の変動が大きいことを意味し、「ボラティリティが小さい」場合は、その資産の変動が小さいことを意味する。具体的には、安定した会社の株価はドリフトは低いボラティリティも小さいため暴落等のリスクが小さく、ベンチャー企業の株価はドリフトは高いが、ボラティリティも大きいためリスクが大きいことが知られている。

注意

ブラック-ショールズモデルは、1973年にフィッシャー・ブラックとマイロン・ショールズによって提唱。この功績によって、1997年にノーベル経済学賞を受賞。

確率システムの実例：その2-台車モデル-

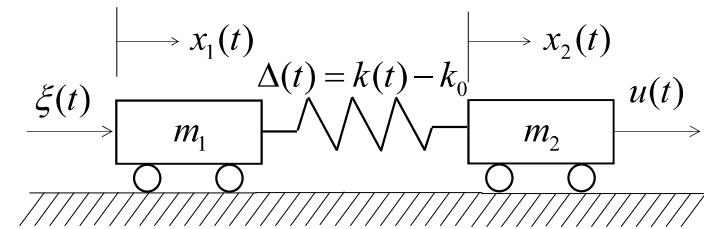


Figure: Two-mass spring system ¹.

$$\dot{x}(t) = [A + H(k(t) - k_0)S]x(t) + Bu(t) + D\xi(t)$$

$$dx(t) = [Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t)]dt + \sigma H S x(t)dw(t)$$

¹ V. A. Ugrinovskii, Robust H_∞ control in the presence of stochastic uncertainty, *Int. J. Control*, vol. 71, no. 2, pp. 219-237, 1998.

確率システムの実例：その3-マルチエリア電力システム-

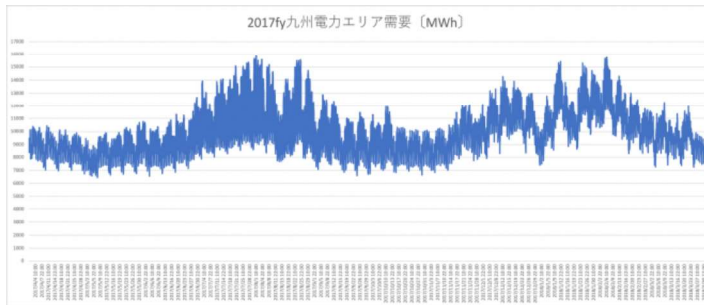


Figure: 九州電力管内の1時間あたりの電力需要 (MWh)

九州電力管内の1時間あたりの電力需要 (MWh) を折れ線グラフで表示したもの。最小需要は2017年5月8日0:00の6,453MWh, 最大需要は2017年8月1日14:00の15,854MWh. 平均需要は10,034MWh, 標準偏差は1,804MWh².

² 九州の電力需給事情 <http://agora-web.jp/archives/2033656.html>

i. エリア i における電力平衡方程式

$$\frac{2H_i}{f^*} \frac{d}{dt} \Delta f_i + D_i \Delta f_i + \Delta P_{tie\ i} = \Delta P_{gi} - \Delta P_{di}$$

ii. エリア i における連係送電線内電力の逐次変化

$$\Delta P_{tie\ i} = \sum_v T_{iv}^* \left(\int \Delta f_i dt - \int \Delta f_v dt \right)$$

$$\text{ただし, } T_{iv}^* = 2\pi \frac{|V_i||V_v|}{X_{iv}P_{ri}} \cos(\delta_i^* - \delta_v^*).$$

iii. 逐次発電方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta P_g &= -\frac{1}{T_t} \Delta P_g + \frac{1}{T_t} \Delta X_{gv} \\ \frac{d}{dt} \Delta X_{gv} &= -\frac{1}{T_{gv}} \Delta X_{gv} - \frac{1}{T_{gv}R} \Delta f + \frac{1}{T_{gv}} \Delta P_c \end{aligned}$$

エリア i における電力平衡, 逐次的な連係送電線内流動, 発電および調速装置の位置変化を考慮することにより, 以下の方程式を得ることができる³.

$$\begin{aligned} \Delta P_{gi} - \Delta P_{di} &= \frac{2H_i}{f^*} \frac{d}{dt} \Delta f_i + D_i \Delta f_i \\ &\quad + \sum_v T_{iv}^* \left(\int \Delta f_i dt - \int \Delta f_v dt \right) \\ \frac{d}{dt} \Delta P_{gi} &= -\frac{1}{T_{ti}} \Delta P_{gi} + \frac{1}{T_{ti}} \Delta X_{gvi} \\ \frac{d}{dt} \Delta X_{gvi} &= -\frac{1}{T_{gvi}} \Delta X_{gvi} - \frac{1}{T_{gvi} R_i} \Delta f_i + \frac{1}{T_{gvi}} \Delta P_{ci} \end{aligned}$$

$$x(t) := \left[\int \Delta P_{tie1} dt \quad \int \Delta f_1 dt \quad \Delta f_1 \quad \Delta P_{g1} \quad \Delta X_{gv1} \quad \int \Delta f_2 dt \quad \Delta f_2 \quad \Delta P_{g2} \quad \Delta X_{gv2} \right]^T, u_i := \Delta P_{ci}$$

$$dx(t) = [Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t)]dt + A_p x(t)dw(t)$$

公称周波数により評価されるシステム負荷変化率 D_i は, 電力需要者側の時間変化にシビア⁴ であるためこの部分が不確定要素としてシステム中に存在すると仮定. したがって, この項を状態に依存するノイズとして考えることにより, システムを確率微分方程式として表現することが可能.

$$\frac{2H_i}{f^*} \frac{d}{dt} \Delta f_i + D_i \Delta f_i + \Delta P_{tie i} = \Delta P_{gi} - \Delta P_{di}$$

³ O. I. Elgerd and C. E. Fosha, Jr. : Optimum megawatt-frequency control of multiarea electric energy systems, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, No.4, pp.556-563, 1970.

⁴ 松田 健 : 電力・社会システム, 東芝レビュー, Vol.59, No.3, pp.58-75, 2004.

伊藤の公式

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), x(0) = x^0$$

伊藤の公式

$$\begin{aligned} dV(t, x) &= \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} g^T(t, x(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) dt \\ &\quad + g^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dw(t) \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} dV(t, x) &= \left[\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) g^T(t, x(t)) \right] dt \\ &\quad + g^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dw(t) \end{aligned}$$

【証明】

$$dV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt + dx^T \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} dx^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T dx$$

$$+ dx^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \right) dt^2 + \dots$$

$$dV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt + [f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)]^T \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{2} [f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)]^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T$$

$$\times [f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)]$$

$$+ [f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t)]^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) dt$$

$\sigma = 1$ として、以下のように計算.

$$\mathbb{E}[(dw(t))^2] = \mathbb{E}[(w(t+dt) - w(t))^2] = dt$$

$$\mathbb{E}[dw(t)dt] = dt\sqrt{dt} \approx 0, dt^2 \approx 0$$

$$dV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} dt + f^T(t, x(t)) \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) dt$$

$$+ \frac{1}{2} g^T(t, x(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) dt$$

$$+ g^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} dw(t)$$

を得る. ■

【例題 1】 $\mu, \sigma > 0$ を与えられた定数とする.

$$dx(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$$

を解け.

【解答】 両辺を積分すれば,

$$\int_0^t dx(t) = \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dB(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t dx(t) = \mu \int_0^t dt + \sigma \int_0^t dB(t)$$

$$\Rightarrow x(t) - x(0) = \mu t + \sigma (B(t) - B(0))$$

ここで, $B(0) = 0$ に注意して,

$$x(t) = x(0) + \mu t + \sigma B(t)$$

【例題 2】 ブラック-ショールズモデルの解析解を求めよ .

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

【誤った解答：偏微分方程式を意識しなかった積分】

$S > 0$ で割って, 両辺を積分すれば,

$$\int_{S^0}^S \frac{dS}{S} = \int_0^t \mu dt + \sigma \int_0^t dB$$

$$\Rightarrow \log S(t) - \log S^0 = \mu t + \sigma B$$

$$\Rightarrow S(t) = S^0 \exp[\mu t + \sigma B]$$

【正解】 まず値関数 $V(t, S) = \log S$ を定義する。このとき、伊藤の公式において、
 $x(t) = S(t) = S$, $f(t, x(t)) = f(t, S) = \mu S$, $g(t, x(t)) = g(t, S) = \sigma S$
 と考えることにより、以下を得る。

$$\begin{aligned} dV(t, S) &= \left(\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2(t)} dt + \sigma S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dB \\ &= \left(\frac{\partial \log S}{\partial t} + \mu S \frac{\partial \log S}{\partial S} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \log S}{\partial S^2} dt + \sigma S \frac{\partial \log S}{\partial S} dB \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB \end{aligned}$$

したがって、 $V = V(t)$ は、以下で与えられる定数係数の確率微分方程式を満足する。

$$dV(t, S) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t)$$

したがって、例題 1 の解答と同様にして、

$$\begin{aligned} V(t, S) &= V(0, S(0)) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \\ \Rightarrow S(t) &= S(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right] \end{aligned}$$

確率安定性の定義

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dw(t), \quad x(0) = x^0$$

仮定

$$\begin{aligned} \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| + \|g(t, x(t)) - g(t, y(t))\| &\leq L(\|x(t) - y(t)\|) \\ \|f(t, x(t))\|^2 + \|g(t, x(t))\|^2 &\leq M(1 + \|x(t)\|^2) \end{aligned}$$

ただし、 L をリプシッツ定数 (Lipschitz constant), M は正の適切な定数である。

上記の仮定は、任意の時刻までの解の存在と一意性を保証する。これらは、それぞれ局所的リプシッツ条件 (local Lipschitz condition), 線形増大条件 (linear growth condition) とよばれる。

定義

任意の $\rho > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して、ある $\delta = \delta(\rho, \varepsilon) > 0$ が存在し、 $\|x(0)\| \leq \delta$ を満たす任意の初期状態に対して、

$$P \left(\sup_{t \geq 0} \|x(t, x^0)\| < \rho \right) \geq 1 - \varepsilon$$

が成立するとき、確率システムの平衡解は、**確率安定 (stochastically stable)** であるという。

さらに、任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して、ある $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ が存在し、 $\|x(0)\| \leq \delta_0$ を満たす任意の初期状態に対して、

$$P \left(\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T} \|x(t, x^0)\| = 0 \right) \geq 1 - \varepsilon$$

が成立するとき、確率システムの平衡解は、**確率漸近安定 (stochastically asymptotically stable)** であるという。

定義

任意の $x(0)$ に対して,

$$\lim_{x^0 \rightarrow 0} P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^0)\| = 0 \right) = 1$$

が成立するとき, 確率システムの平衡解は, **局所的確率漸近安定 (locally asymptotically stable in probability)** であるという.

最後に, 任意の $x(0)$ に対して,

$$P \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^0)\| = 0 \right) = 1$$

が成立するとき, 確率システムの平衡解は, **大域的確率漸近安定 (globally asymptotically stable in probability)** であるという.

定義

以下の不等式

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|x(t, x^0)\|^p] &\leq \alpha \|x(0)\|^p e^{-\beta t} \\ \forall t \geq 0, \forall x(0) &\in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \end{aligned}$$

を満足する正定数 α, β, r が存在するなら, 確率システムの平衡解は, **p 乗モーメント指数安定** という. 特に, $p = 2$ の場合を **平均二乗指数安定 (mean square exponentially stable)** という.

定義

以下の不等式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|x(t, x^0)\|^p] = 0$$

を満足するなら, 確率システムの平衡解は, **p 乗モーメント大域的漸近安定** という.

確率リアプノフ関数

定理

確率システムを考える. 原点を含むある開近傍 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で, $V(0) = 0$ かつ $LV(x) < 0$ を満たす正定関数 $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するならば, 確率システムの原点は確率安定である. さらに, $V(x)$ が $x \in D \setminus \{0\}$ において $LV < 0$ を満たすならば, 原点は**確率漸近安定 (asymptotically stable in probability)** という. ここで,

$$\begin{aligned} LV(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[V(t, x(t + \Delta t)) | x(t) = x] - V(t, x)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^T(t, x(t)) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^T(t, x(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T g(t, x(t)) \end{aligned}$$

定理

- (1) 確率リアプノフ関数 $V(t, x(t))$ が存在し, かつ $LV(t, x(t))$ が準負定ならば, 確率システムの平衡解は確率安定である.
- (2) スカラ関数 $V(t, x(t))$ が正定で, かつ $LV(t, x(t))$ が負定ならば, 確率システムの平衡解は確率漸近安定である.
- (3) 以下の不等式を満足するスカラ関数 $V(t, x(t))$, 正定数 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, r > 0$ および定数 $p \geq 1$ が存在するなら, 確率システムの平衡解は指数 p 次確率安定である.

$$\begin{aligned} \alpha \|x(t)\|^p &\leq V(t, x(t)) \leq \beta \|x(t)\|^p \\ \forall x(t) &\in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x(t)\| \leq r\}, x(t) \neq 0 \\ LV(t, x(t)) &\leq -\gamma \|x(t)\|^p \\ \forall x(t) &\in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x(t)\| \leq r\}, x(t) \neq 0 \end{aligned}$$

1次元標準ブラウン運動のシミュレーション

区間 $[0, T]$ を n 等分し, サンプル間隔を $h = T/n$ と定義.

$$t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_i = \frac{Ti}{n}, \dots, t_n = T$$

ブラウン運動の性質より, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, n 個の確率変数

$$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

は独立. 各時刻 $0 \leq s < t$ に対して, 確率変数 $B(t) - B(s)$ の分布は, $N(0, t - s)$ の正規分布に従う.

$$\mathbb{E}[w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega)] = 0$$

$$\mathbb{E}[(w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega))^2] = \sigma^2 |t_i - t_{i-1}| = h$$

$$\frac{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - 0}{\sqrt{h}} \sim N(0, 1) \Rightarrow B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \sqrt{h}N(0, 1)$$

$B(t)$ の差分アルゴリズムは以下によって与えられる.

$$B_0 = 0, B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + \sqrt{h}N(0, 1)$$

ただし, $N(0, 1)$ は, 標準正規分布である. シミュレーションでは, $N(0, 1)$ を標準正規乱数で置き換える.

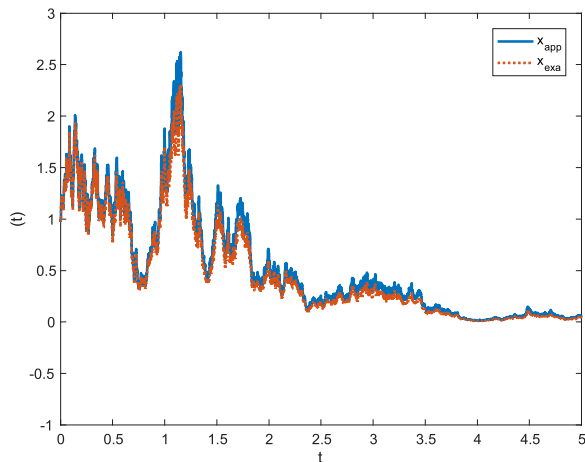


Figure: ブラック-ショールズモデルの状態軌道

$$h = 0.001, T = 5, \mu = 0.3, \sigma = 1.5.$$

オイラー・丸山近似 (Euler-Maruyama approximation)

解 $x(t)$ に対して, ある時間の分割 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対して,

$$X(n+1) = X(n) + hf(nh, X(n)) + g(nh, X(n))\sqrt{h}N(0, 1), h = \frac{T}{n}$$

ブラック-ショールズモデル

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), S(0) = 1$$

の解析解

$$S(t) = \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right]$$

オイラー・丸山近似による差分方程式

$$S(n+1) = S(n) + h\mu S(n) + \sigma S(n)\sqrt{h}N(0, 1), h = \frac{T}{n}$$

ただし, $N(0, 1)$ は, 標準正規乱数である.

非線形有限時間最適レギュレータ問題

$$dx(t) = [f(x(t)) + g(x(t))u(t)]dt + h(x(t))dw, x(0) = x^0$$

$$J(u) = \mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} [\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2]dt\right]$$

$$f(0) = 0, g(0) = 0, h(0) = 0,$$

$$\|x(t)\|_{Q(t)}^2 := x^T(t)Q(t)x(t), \|u(t)\|_{R(t)}^2 := u^T(t)R(t)u(t).$$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態ベクトル.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力.
- $w(t) \in \mathbb{R}^1$ は一次元標準ウィナー過程.

問題

確率フィードバック制御則 $u(t) = u^*(t)$ によって閉ループシステムが, 確率漸近安定であるような F_t -適合である許容制御確率フィードバック制御則 $u(t) = u^*(t)$ を求めよ.

$$dx(t) = F(x(t), u(t))dt + G(x(t), u(t))dw, \quad x(0) = x^0$$

$$J(u) = \mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} \ell(x(t), u(t))dt\right]$$

確率動的計画法

以下の関数を定義する。

$$V(t, x) = \min_u \left[\mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E}\left[\int_t^{t_f} \ell(x(t), u(t))dt\right] \middle| x = x(t) \right]$$

確率ハミルトン-ヤコビ-ベルマン方程式 (SHJBEs) は以下で与えられる。

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\ell(x(t), u(t)) + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x(t), u(t)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} G^T(x(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x(t), u(t)) \right]$$

$$V(t_f, x(t_f)) = U(x(t_f))$$

【証明】

$$V(t, x) = \min_u \left[\mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E}\left[\int_t^{t_f} \ell(x(t), u(t))dt\right] \middle| x = x(t) \right]$$

動的計画法を利用するために、最適な軌道を以下のように2分割する。

$$V(t, x) = \min_u \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\delta t} \ell(x(t), u(t))dt \middle| x = x(t)\right] \\ + \min_u \mathbb{E}\left[U(x(t_f)) + \int_{t+\delta t}^{t_f} \ell(x(t), u(t))dt \middle| x = x(t)\right] \\ = \min_u \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\delta t} \ell(x(t), u(t))dt \middle| x = x(t)\right] + V(t + \delta t, x + \delta x)$$

ただし、 $\delta t > 0$ である。ここで、2変数のテーラー展開を利用すれば

$$\int_t^{t+\delta t} \ell(x(t), u(t))dt = \ell(x(t), u(t))\delta t + O(\delta t^2)$$

【証明の続き】

$$V(t + \delta t, x + \delta x) = V(t, x) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \delta t + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x(t), u(t)) \delta t \\ + \frac{1}{2} G^T(x(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x(t), u(t)) \delta t \\ + O\left(\sqrt{\delta x^2 + \delta t^2}\right)$$

$$V(t, x) = \min_u \left[\ell(x(t), u(t)) \delta t + V(t, x) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x(t), u(t)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} G^T(x(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x(t), u(t)) \right\} \delta t \right. \\ \left. + O\left(\sqrt{\delta x^2 + \delta t^2}\right) \right]$$

【証明の続き】ここで、 δt で割って、 $\delta t \rightarrow +0$, $\delta x \rightarrow +0$ とすれば、

$$0 = \min_u \left[\ell(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x(t), u(t)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} G^T(x(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x(t), u(t)) \right]$$

すなわち、

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\ell(x(t), u(t)) + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x(t), u(t)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} G^T(x(t), u(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x(t), u(t)) \right]$$

を得る。 ■

注意

確率動的計画法による方法では、状態フィードバックしか考慮できない。

定理

以下の SHJBE を考える.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T f(x) + \|x(t)\|_{Q(t)}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T g(x)[R(t)]^{-1}g^T(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{1}{2}h^T(x)\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T h(x) \\
 V(t_f, x(t_f)) &= U(x(t_f))
 \end{aligned}$$

SHJBE の解 $V^*(x)$ が存在するとき, 制御則は以下で与えられる.

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}[R(t)]^{-1}g^T(x)\frac{\partial V^*}{\partial x}$$

【確率動的計画法による証明】

$$\begin{aligned}
 V(t, x) &= \min_{u(s)} \left[\mathbb{E}[U(x(t_f))] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\int_t^{t_f} [\|x(s)\|_{Q(t)}^2 + \|u(s)\|_{R(t)}^2] ds \right] \middle| x(t) = x \right]
 \end{aligned}$$

ここで, 以下の SHJBEs を得る.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} &= \min_u \left[\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T [f(x) + g(x)u(t)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}h^T(x)\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T h(x) \right]
 \end{aligned}$$

ただし, 初期条件は $V(t_f, x(t_f)) = U(x(t_f))$ である.

【確率動的計画法による証明：続き】 このとき, 右辺を u に関して平方完成すれば,

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} &= \min_u \left[\left(u(t) + \frac{1}{2}[R(t)]^{-1}g^T(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T R(t) \right. \\
 &\quad \times \left(u(t) + \frac{1}{2}[R(t)]^{-1}g^T(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T f(x) + \|x(t)\|_{Q(t)}^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T g(x)[R(t)]^{-1}g^T(x)\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}h^T(x)\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)^T h(x) \right]
 \end{aligned}$$

となり, 制御則 $u = u^*$ を適用するとき, 最小値を達成する. ■

確率最大原理

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= F(x(t), u(t))dt + G(x(t), u(t))dw(t), \quad x(0) = x^0 \\
 J(u) &= \mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t_f} \ell(x(t), u(t))dt \right]
 \end{aligned}$$

確率最大原理

$$H(x, u, p, q) = \ell(x, u) + p^T(t)F(x, u) + q^T(t)G(x, u)$$

を定義する. このとき, 確率最大原理により以下が成立する.

$$\begin{aligned}
 dx^*(t) &= \frac{\partial H^*(x^*, u^*, p, q)}{\partial p} dt + G(x^*(t), u^*(t))dw(t) \\
 dp(t) &= -\frac{\partial H^*(x^*, u^*, p, q)}{\partial x} dt + q(t)dw(t) \\
 H^*(x^*, u^*, p, q) &= \min_u H(x^*, u, p, q) \\
 x(0) = x^0, \quad p(t_f) &= \frac{\partial U(x^*(t_f))}{\partial x}
 \end{aligned}$$

【証明】 先に示した以下の SHJBEs 方程式を利用して証明を行う。

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\ell(x, u) + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T F(x, u) + \frac{1}{2} G^T(x, u) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(x, u) \right]$$

ハミルトニアン H を以下のように定義する。

$$H \left(x, u, p, \frac{\partial p^T}{\partial x} \right) = \ell(x, u) + \sum_{i=1}^n p_i^T(t) F_i(x, u) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} G_j(x, u) \left(\frac{\partial p_i^T(t)}{\partial x_j} \right) G_i(x, u)$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}, F(x, u) = \begin{bmatrix} F_1(x, u) \\ \vdots \\ F_n(x, u) \end{bmatrix}, G(x, u) = \begin{bmatrix} G_1(x, u) \\ \vdots \\ G_n(x, u) \end{bmatrix}$$

$$H(x, u, p, q) = \ell(x, u) + p^T(t) F(x, u) + q^T(t) G(x, u)$$

【証明の続き】 $-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u H(x^*, u, p, q) = H^*(x^*, u^*, p, q)$

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} H(x^*, u, p, q) \right|_{u=u^*} = 0$$

x で偏微分

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p_k(t)}{\partial t} = \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(t)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial p_i(t)} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial [\partial p_i(t) / \partial x_j]}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial [\partial p_i(t) / \partial x_j]}$$

$$= \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(t)}{\partial x_k} F_i(x, u^*) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n G_j(x, u^*) \frac{\partial [\partial p_i(t) / \partial x_j]}{\partial x_k} G_i(x, u^*)$$

$$-\frac{\partial p_k(t)}{\partial t} = \frac{\partial H^*}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T F(x, u^*) + \frac{1}{2} G^T(x, u^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T G(x, u^*) \Leftarrow \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

一方, $p_k(t) \in \mathbb{R}^1$ に伊藤の公式を利用

$$dp_k(t) = \left[\frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T F(x, u^*) + \frac{1}{2} G^T(x, u^*) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T G(x, u^*) \right] dt + \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T G(x, u^*) dw(t)$$

$$= -\frac{\partial H^*}{\partial x_k} dt + \left(\frac{\partial p_k(t)}{\partial x} \right)^T G(x, u) dw(t)$$

$$\Rightarrow dp(t) = -\frac{\partial H^* \left(x^*, u^*, p, \frac{\partial p^T}{\partial x} \right)}{\partial x} dt + \frac{\partial p^T}{\partial x} G(x, u^*) dw(t)$$

以上より, 結果を得る. ■

定理

以下の FBSDEs を考える。

$$dp(t) = b(t, p(t), x(t)) dt + \sigma(t, p(t), x(t)) dw(t)$$

$$dx(t) = F(t, p(t), x(t)) dt + h(x(t)) dw(t)$$

ただし, $p = p(t) \in \mathbb{R}^n$

$$b(t, p(t), x(t)) := -\nabla_x \left(p^T(t) \left[f(x) + g(x)u(t) \right] \right) - 2Q(t)x(t) - \nabla_x \left(h^T(x) [\nabla_x p(t)] h(x) \right)$$

$$\sigma(t, p(t), x(t)) := [\nabla_x p(t)]^T h(x)$$

$$F(t, p(t), x(t)) := f(x) - \frac{1}{2} g(x) [R(t)]^{-1} g^T(x) p(t)$$

$$x(0) = x^0, p(t_f) = \frac{\partial}{\partial x} U(x(t_f))$$

このとき, FBSDEs が解を持てば, 制御則は以下によって与えられる。

$$u^*(t) = -\frac{1}{2} [R(t)]^{-1} g^T(x) p(t)$$

【確率最大原理による証明】

ハミルトニアン H を以下のように定義する.

$$H = p^T(t) \left[f(x) + g(x)u(t) \right] + x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) + q^T(t)h(x)$$

ここで, 確率最大原理により以下を得る.

$$dp(t) = \left[-\nabla_x \left(p^T(t) \left[f(x) + g(x)u(t) \right] \right) - 2Q(t)x(t) - \nabla_x [q^T(t)h(x)] \right] dt + q(t)dw(t)$$

$$q(t) = [\nabla_x p(t)]^T h(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g^T(x)p(t) + 2R(t)u(t) = 0$$

したがって,

$$u(t) = u^*(t) = -\frac{1}{2}[R(t)]^{-1}g^T(x)p(t)$$

が得られる. 最後に, 制御則を非線形確率システムに代入して, 結果を得る. ■

4 ステップスキーム

仮定

$$p(t) = \theta(t, x) = \left[\theta^1(t, x) \quad \dots \quad \theta^n(t, x) \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

ただし, $\theta(t, x)$ は, スカラ関数 $\theta^k(t, x) \in \mathbb{R}^1$ であるベクトル値関数.

$\theta^k(t, x)$ に伊藤の公式を利用.

$$d\theta^k(t, x) = \left[\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T F(t, \theta, x) + \frac{1}{2} h^T(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T h(x) \right] dt + \left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T g(x) dw(t), \quad k = 1, \dots, n$$

$p(t) = \theta(t, x)$ で, 係数比較.

非線形有限時間最適レギュレータ問題

$$dx(t) = \left[f(x(t)) + g(x(t))u(t) \right] dt + h(x(t))dw, \quad x(0) = x^0$$

$$J(u) = \mathbb{E}[U(x(t_f))] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t_f} \left[\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right] dt \right]$$

$$dp(t) = b(t, p(t), x(t))dt + \sigma(t, p(t), x(t))d\mathbf{w}(t), \quad x(0) = x^0$$

$$dx(t) = F(t, p(t), x(t))dt + h(x(t))\mathbf{w}(t), \quad p(t_f) = \frac{\partial}{\partial x} U(x(t_f))$$

$$u(t) = u^*(t) = -\frac{1}{2}[R(t)]^{-1}g^T(x)p(t)$$

ただし, $p = p(t) \in \mathbb{R}^n$

$$b(t, p(t), x(t)) := -\nabla_x \left(p^T(t) \left[f(x) + g(x)u(t) \right] \right) - 2Q(t)x(t) - \nabla_x \left(h^T(x) [\nabla_x p(t)] h(x) \right)$$

$$\sigma(t, p(t), x(t)) := [\nabla_x p(t)]^T h(x)$$

$$F(t, p(t), x(t)) := f(x) - \frac{1}{2}g(x)[R(t)]^{-1}g^T(x)p(t)$$

$$-\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial t} = \left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T F(t, \theta, x) + \frac{1}{2} h^T(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T h(x) - b^k(t, \theta, x)$$

$$\left(\frac{\partial \theta^k(t, x)}{\partial x} \right)^T g(x) = \sigma^k(t, \theta, x)$$

ただし,

$$F(t, \theta, x) := f(x) - \frac{1}{2}g(x)R^{-1}(t)g^T(x)\theta(t)$$

$$-b^k(t, \theta, x) := + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\theta^T(t) \left(f(x) - \frac{1}{2}g(x)R^{-1}(t)g^T(x)\theta(t) \right) + x^T(t)Qx(t) + h^T(x)[\nabla_x \theta(t)]g(x) \right], \quad k = 1, \dots, n$$

$$x(t) = \left[x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t) \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$b(t, \theta, x) = \left[b^1(t, \theta, x) \quad \dots \quad b^n(t, \theta, x) \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t, \theta, x) = \left[\sigma^1(t, \theta, x) \quad \dots \quad \sigma^n(t, \theta, x) \right]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\theta^k(t_f, x(t_f)) = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x(t_f)), \quad k = 1, \dots, n.$$

例題：線形有限時間最適レギュレータ問題-状態依存ノイズ-

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t, x)]dt + A_p(t)x(t)dw(t), x(0) = x^0$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[x^T(t_f)Lx(t_f)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt\right]$$

仮定

$$p(t) = P(t)x(t)$$

$$dp(t) = \dot{P}(t)x(t)dt + P(t)[A(t) - S(t)P(t)]x(t)dt + P(t)A_p(t)x(t)dw$$

ただし、下記の伊藤の公式を利用。

$$dp_i(t) = \frac{\partial p_i(t)}{\partial t}dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_i(t)}{\partial x_k}dx_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 p_i(t)}{\partial x_k \partial x_\ell} dx_k(t)dx_\ell(t)$$

$$dp(t) = - \left[A^T(t)P(t) + Q(t) + A_p^T(t)P(t)A_p(t) \right] x(t)dt + P(t)A_p(t)x(t)dw$$

例題：線形有限時間最適レギュレータ問題-状態依存ノイズ無し-

動的計画法による解法⁵。

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + G(t)dw(t), x(0) = x^0$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[x^T(t_f)Lx(t_f)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt\right]$$

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\|x(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x(t) + B(t)u(t)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G^T(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(t) \right]$$

⁵ 大住 晃：確率システム入門，朝倉書店 (2002)

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + A_p(t)x(t)dw(t), x(0) = x^0$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[x^T(t_f)Lx(t_f)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt\right]$$

確率系：制御則

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)p(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)P(t)x(t)$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)\bar{A}(t) + A^T(t)P(t) + A_p^T(t)P(t)A_p(t) - P(t)S(t)P(t) + Q(t)$$

ただし、 $P(t_f) = L$. $J(u^*) \geq \mathbb{E}[x^T(0)P(0)x(0)]$.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x^0$$

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Lx(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt$$

確定系：制御則

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)p(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)P(t)x(t)$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)\bar{A}(t) + A^T(t)P(t) - P(t)S(t)P(t) + Q(t)$$

ただし、 $P(t_f) = L$. $J(u^*) \geq x^T(0)P(0)x(0)$.

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u \left[\left(u(t) + \frac{1}{2}[R(t)]^{-1}B^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T R(t) \right. \\ \times \left(u(t) + \frac{1}{2}[R(t)]^{-1}B^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) \\ \left. + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T A(t)x(t) + x^T(t)Q(t)x(t) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T B(t)[R(t)]^{-1}B^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G^T(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(t) \right] \\ = \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T A(t)x(t) + x^T(t)Q(t)x(t) \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T B(t)[R(t)]^{-1}B^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \\ + \frac{1}{2}G^T(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T G(t)$$

仮定

$$V(t, x) = x^T(t)P(t)x(t) + \beta(t)$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)\bar{A}(t) + A^T(t)P(t) - P(t)S(t)P(t) + Q(t)$$

$$-\dot{\beta}(t) = G^T(t)P(t)G(t)$$

ただし, $P(t_f) = L, \beta(t_f) = 0$.

制御則

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)p(t) = -\frac{1}{2}B^T(t)P(t)x(t)$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)\bar{A}(t) + A^T(t)P(t) - P(t)S(t)P(t) + Q(t)$$

ただし, $P(t_f) = L$.

$$J(u^*) \geq \mathbb{E}[x^T(0)P(0)x(0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{t_f} G^T(t)P(t)G(t)dt\right].$$

確率ナッシュ均衡戦略対

以下の不等式を満足するような集合 $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ を求めよ.

$$J_1(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq J_1(u_1(t), u_2^*(t))$$

$$J_2(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq J_2(u_1^*(t), u_2(t))$$

定理

$$dp_1(t) = b_1(t, p, x)dt + \sigma_1(t, p, x)dw(t)$$

$$dp_2(t) = b_2(t, p, x)dt + \sigma_2(t, p, x)dw(t)$$

$$dx(t) = F(t, p, x)dt + h(x)dw(t)$$

ただし, $p(t) = [p_1(t) \ p_2(t)]^T, p_i(t) \in \mathbb{R}^n$,

$$b_i(t, p, x) := -\nabla_x \left(p_i^T(t) \left[\tilde{f}_j(x) + g_j(x)u_j(t) \right] \right)$$

$$- 2Q_i x(t) - \nabla_x \left(h^T(x) [\nabla_x p_i(t)] h(x) \right), \quad i \neq j,$$

$$\tilde{f}_j(x) := f(x) + g_j(x)u_j(x)$$

$$dx(t) = \left[-m_P x(t) - \frac{f_P x(t)}{H_P + x(t)} + \frac{1}{2}u_1(t) + \frac{1}{2}u_2(t) \right] dt$$

$$+ \frac{\mu_m N}{H_N + N} x(t) dw(t)$$

$$x(0) = 1.0$$

$$J_i(u_i) = \mathbb{E} \left[\int_0^2 \left(Q_i x^2(t) + R_i u_i^2(t) \right) dt \right]$$

Table 1. Parameters of model.

パラメータ	意味	値	単位
μ_m	藍藻類の最大成長率	0.3	day ⁻¹
N	栄養塩濃度	8.0	mmol·m ⁻³
H_N	栄養塩濃度に対する半飽和定数	0.2	mmol·m ⁻³
f_P	動物プランクトンによる藍藻類の最大捕食率	2.0	g·m ⁻³ ·day ⁻¹
H_P	藍藻類生物量に対する半飽和定数	4.0	g·m ⁻³
m_P	藍藻類の除去率	0.1	day ⁻¹

定理の続き

$$\sigma_i(t, p, x) := [\nabla_x p_i(t)]^T h(x)$$

$$F(t, p, x) := f(x) - \frac{1}{2}g_1(x)R_1^{-1}g_1^T(x)p_1(t) - \frac{1}{2}g_2(x)R_2^{-1}g_2^T(x)p_2(t)$$

である。また、初期条件及び終端条件は以下で与えられるものとする。

$$x(0) = x_0, p_i(t_f) = \frac{\partial}{\partial x} U_i(x(t_f)), \quad i = 1, 2$$

このとき、連立型 FBSDEs が解を持てば、戦略対は以下によって与えられる。

$$u_i^*(t) = -\frac{1}{2}R_i^{-1}g_i^T(x)p_i(t), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \left(-m_P x - \frac{f_P x}{H_P + x} - \frac{1}{8R_1} \theta_1 - \frac{1}{8R_2} \theta_2 \right) + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} \\ + \left(-m_P - \frac{f_P H_P}{(H_P + x)^2} - \frac{1}{8R_j} \cdot \frac{\partial \theta_j}{\partial x} \right) \theta_i \\ + 2Q_i x + \alpha^2 x \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

ただし, $\theta_i(2, x) = 0, (i = 1, 2), \alpha := \frac{\mu_m N}{H_N + N}$.

$$u_i(t, x) = u_i^f(t, x) = -\frac{1}{4R_i} \theta_i(t, x), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \left(-m_P x - \frac{f_P x}{H_P + x} - \frac{1}{8R_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial x} \right) + Q_i x^2 \\ - \frac{1}{16R_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

ただし, $V_1(1, x(2)) = V_2(1, x(2)) = 0$.

$$u_i(t, x) = u_i^d(t, x) = -\frac{1}{4R_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_i(t, x), \quad i = 1, 2$$

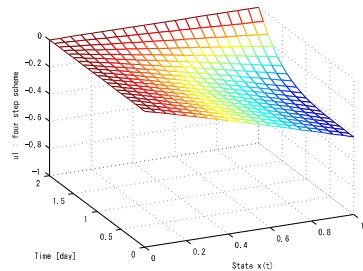


Fig. 1: Simulation result for $u_1(t, x) = u_1^f(t, x) = -1/(4R_1)\theta_1(t, x)$ via four step scheme.

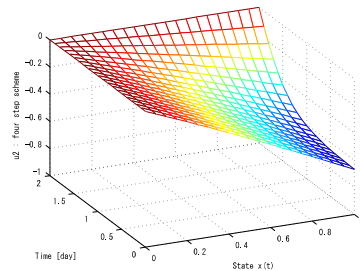


Fig 2: Simulation result for $u_2(t, x) = u_2^f(t, x) = -1/(4R_2)\theta_2(t, x)$ via four step scheme.

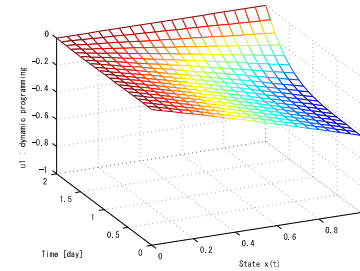


Fig. 3: Simulation result for $u_1(t, x) = u_1^d(t, x) = -1/(4R_1)\partial V_1(t, x)/\partial x$ via dynamic programming.

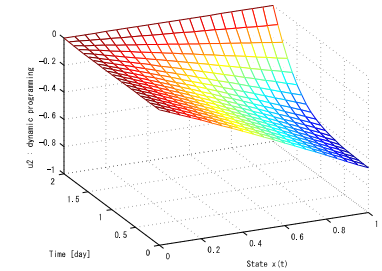


Fig 4: Simulation result for $u_2(t, x) = u_2^d(t, x) = -1/(4R_2)\partial V_2(t, x)/\partial x$ via dynamic programming.

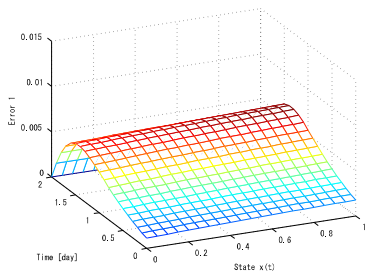


Fig. 5: Simulation result for error of $|u_1^f(t, x) - u_1^d(t, x)|$.

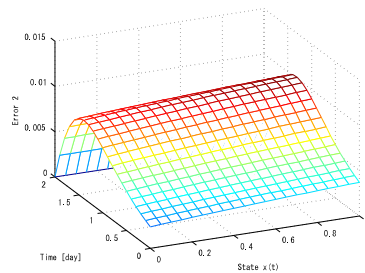


Fig 6: Simulation result for error of $|u_2^f(t, x) - u_2^d(t, x)|$.

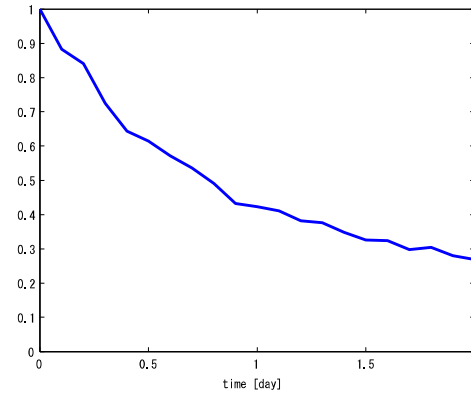


Fig. 7: Simulation result for state.

主要結果：

- ① 確率動的計画法・確率最大原理を利用して、戦略対が存在するための必要条件を連立型確率偏微分方程式で表現された境界値問題の可解条件によって導出。
- ② アオコの抑制制御問題を用いて検証。

問題点：

- ① 確率偏微分 2 階方程式の数値解法が確立されていない。
- ② 長いスパンでのシミュレーションの実行ができない。解が発散する。

今後の課題

- ① 電気・機械システムでの確率制御の有効性の検証-どの程度ウィナー過程の影響があるのか-
- ② 確率偏微分 2 階方程式の数値解法および収束性・精度の評価-スパースモデリングの利用-

ご清聴誠に有難うございました

連絡先

mukaida@hiroshima-u.ac.jp