大学入試問題に表れる数列の収束とプログラミングによる実装

向谷　博明

広島大学情報科学部
http://home.hiroshima-u.ac.jp/~mukaida

2021 年 8 月 17 日

目次

1. 数列の極限
2. 不動点アルゴリズム
3. ニュートン法
4. 漸化式以外の数列の極限 (「機械学習における再急降下法」から変更)

自己紹介

学歴

- 1988 年 3 月国立呉工業高等専門学校 (3 年次中退)
- 1992 年 3 月広島大学総合科学部卒業
- 1994 年 3 月広島大学工学研究科情報工学専攻博士課程前期終了
- 1997 年 10 月同専攻博士課程後期終了ー博士 (工学)

職歴

- 1998 年 4 月広島市立大学情報科学部情報機械システム工学科助手
- 2002 年 4 月広島大学教育学研究科技術・情報教育学講座，講師，助教授 (2005)，准教授 (2007)
- 2012 年 4 月同大学院工学研究院，総合科学部，教授
- 2018 年 4 月同大学院工学研究科，情報科学部，教授
- 2020 年 4 月同大学院先進理工系科学研究科，情報科学部　教授，現在に至る

アルバイト歴

- 1992 年 4 月〜1993 年 3 月　代々木ゼミナール数学科講師
- 1993 年 4 月〜1998 年 3 月　河合塾数学科講師

担当科目

- 微分積分通論，微分積分学 I，微分積分学 II，微分方程式，システム最適化

数列の極限

任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_{n+1} \leq a_n)$ をみたす数列 $\{a_n\}$ は単調非減少 (単調非増加) であるという．任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq c$ $(c \leq a_n)$ をみたす $c \in \mathbb{R}$ が存在するような数列 $\{a_n\}$ は上に有界 (下に有界) であるという．

定理

1. 単調非減少かつ上に有界な数列は収束する．

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq c$$

2. 単調非増加かつ下に有界な数列は収束する．

$$c \leq \cdots \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_1$$

縮小写像の原理

方程式

$$f(x) = 0$$

を考える．ここで，関数 $f(x)$ は $f(x) \in \mathbb{R}^m$ のベクトル値関数と仮定する．したがって，$x \in \mathbb{R}^m$ もベクトルである．このとき，その解を零点 **(zero point)** という．
零点を差分方程式を利用して求める場合，一般的には以下の形をとる．

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = \bar{x}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

ここで，関数 $g(x)$ は $g(x) \in \mathbb{R}^m$ のベクトル値関数であり，$x_n \in \mathbb{R}^m$ はベクトルである．ここで，g の不動点 **(fixed point)** とは，

$$g(\alpha) = \alpha$$

を満足する α を意味する．ベクトル値関数 $g(x)$ は，ある定数 L に対して

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$$

を満足するとき，リプシッツ連続 **(Lipschitz continuity)**，さらに，$L < 1$ のとき，縮小写像 **(contraction mapping)** とよばれる．ここで，L をリプシッツ定数 **(Lipschitz constant)** とよばれる．

Theorem

関数 $g(x)$ が閉集合 D で定義された縮小写像で, $x \in D$ に対して $g(x) \in D$ であると仮定する. このとき, 関数 g の不動点が D に唯一存在し, 任意の初期値 $x_0 \in D$ に対して, 差分方程式

$$x_{n+1} = g(x_n),\ x_0 = \bar{x}$$

によって生じる近似解の数列 $\{x_n\}$ は不動点 $x = \alpha$ に収束率 L で 1 次収束する.

【 証明 】まず, 数列 $\{x_n\}$ が定義されることに注意する.

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|g(x_n) - g(x_{n-1})\| \le L\|x_n - x_{n-1}\| \le \cdots \le L^n\|x_1 - x_0\|$$

したがって, $k < \ell$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\|x_\ell - x_k\| = \|(x_\ell - x_{\ell-1}) + (x_{\ell-1} - x_{\ell-2}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)\| \\
&\le \|x_\ell - x_{\ell-1}\| + \|x_{\ell-1} - x_{\ell-2}\| + \cdots + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\le (L^{\ell-1} + L^{\ell-2} + \cdots + L^k)\|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{L^k(1 - L^{\ell-k})}{1 - L}\|x_1 - x_0\| = \frac{L^k - L^\ell}{1 - L}\|x_1 - x_0\| \le \frac{L^k}{1 - L}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

となるので, 数列 $\{x_n\}$ は, コーシー列 **(Cauchy sequence)** であり, ある極限値 $\alpha \in D$ に収束する.

Definition

コーシー列数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $m,\ n \geq N$ なる任意の $m,\ n$ に対して $|a_m - a_n| < \varepsilon$ が成り立つ. 」
あるいは, 記号で記述すれば,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathrm{N},\ \forall m,\ n \in \mathrm{N}:\quad m,\ n \geq N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon$$

なお, 重要な結果として, 「数列 $\{a_n\}$ が収束するならばコーシー列である」, 「実数の範囲でコーシー列は収束列」が知られている.
したがって, 差分方程式で, $n \to \infty$ とすれば,

$$\alpha = g(\alpha)$$

一方, 唯一性については,

$$\beta = g(\beta)$$

を満足する新たな変数 β を用意して,

$$\|g(\alpha) - g(\beta)\| = \|\alpha - \beta\| \leq L\|\alpha - \beta\|$$

このとき, $\|\alpha - \beta\| \neq 0$ であれば, 両辺 $\|\alpha - \beta\|$ で割れば, $1 \leq L$ を得る. しかし, これは, 縮小写像の条件 $L < 1$ に矛盾する. したがって,

$$\|\alpha - \beta\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \beta$$

となり, 唯一性が示される.

Example

x に関する方程式

$$x = f(x)$$

について, 解が $x = \alpha$ 唯一であり, さらに, $|f'(x)| \leq L < 1$ を満足する定数 L が存在するなら, 以下の不動点アルゴリズムは, その解に収束することを示せ.

$$x_{n+1} = f(x_n), x_0 = \bar{x}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

【 証明 】 $\alpha = f(\alpha)$ である. このとき, 平均値の定理より,

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \cdot |x_n - \alpha| \leq L|x_n - \alpha|$$
$$(x_n < c < \alpha,\ \text{or}\ \alpha < c < x_n)$$

以上より,

$$0 \leq |x_n - \alpha| \leq L^n |x_0 - \alpha|, \quad (0 < L < 1)$$

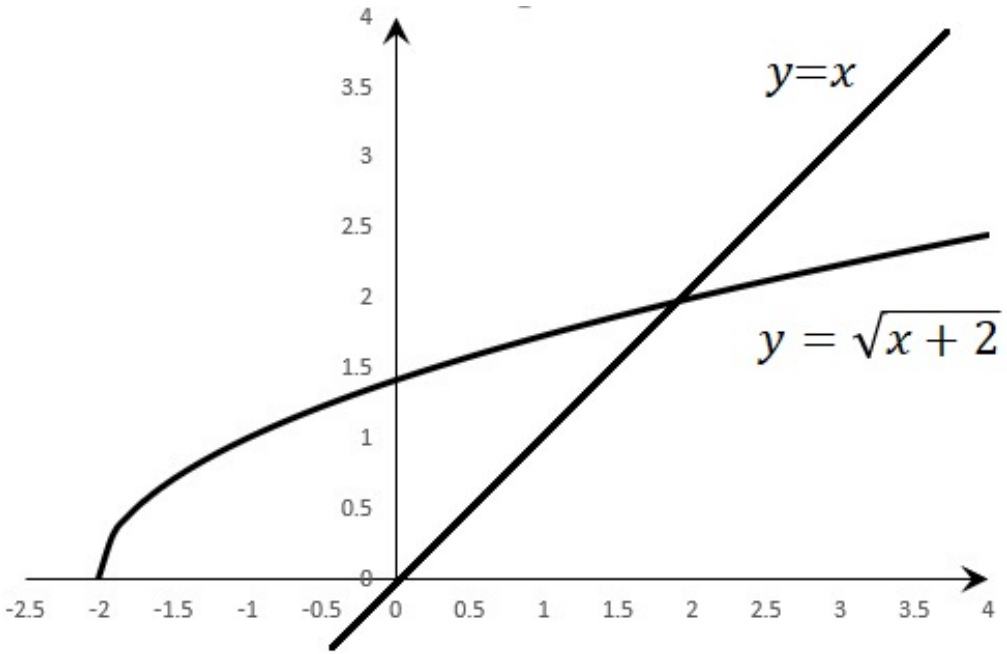
が成立するので, $n \to \infty$ のとき, $x_n \to \alpha$ に収束する. □

Example (Ex.1)

以下の差分方程式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad a_0 = \alpha, \ (-2 \leq \alpha), \quad n = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots$$

によって定義される $\{a_n\}$ について, 以下の問いに答えよ.
(1) $-2 \leq a_0 = \alpha < 2$ のとき, $0 \leq a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < 2$ であり,
$2 < a_0 = \alpha$ のとき, $2 < a_{n+1} < a_n$ であることを示せ.
(2) $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.



《 解答 》**(1)** 数学的帰納法により証明を行う．まず，以下の不等式を用意する．

$$a_{n+1} - 2 = \sqrt{a_n + 2} - 2 = \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 2} - a_n = \frac{a_n + 2 - {a_n}^2}{\sqrt{a_n + 2} + a_n} = \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{a_n + 2} + a_n}$$

(i) $-2 \leq \alpha < 2$ の場合を考える．まず $0 \leq a_0 < 2$ のとき，全ての $n \geq 0$ に対して，$0 \leq a_n < 2$ を示す．
$n = 1$ のとき，$a_1 = \sqrt{a_0 + 2}$ より $a_1 \geq 0$ が成立する．$n = k$ のとき，$0 \leq a_k < 2$ が成立すると仮定すれば，$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2}$ より $0 < a_{k+1}$ が成立する．さらに，$n = k + 1$ のときも $a_{k+1} < 2$ が成立する．
さらに，$0 \leq a_n < 2$ を利用して，全ての $n \geq 0$ に対して，$a_n < a_{n+1}$ が示される．
次に，$-2 \leq a_0 < 0$ のとき，$a_1 = \sqrt{a_0 + 2} > 0$ となり，$1 \leq n$ の範囲で，先の議論と同様にして，全ての $n \geq 1$ に対して，$0 \leq a_n < 2$, $a_n < a_{n+1}$ が示される．
(ii) 同様に，$2 < \alpha$ の場合を考える．まず，全ての $n \geq 0$ に対して，$2 < a_n$ を示す．
$n = 0$ のとき，$2 \leq a_0 = \alpha$ より成立する．$n = k$ のとき，$2 \leq a_k$ が成立すると仮定すれば $n = k + 1$ のときも成立する．
次に，$2 < a_n$ を利用して，

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 2} - a_n = \frac{a_n + 2 - {a_n}^2}{\sqrt{a_n + 2} + a_n} = \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{a_n + 2} + a_n}$$

より，全ての $n \geq 0$ に対して，$a_{n+1} < a_n$ が示される．

(2) $f(x) = \sqrt{x+2}$ とおく．このとき，$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ となる．ここで，$1 \leq n$ で考えれば，$0 < a_n$ が成立するので，$0 < x$ の範囲で考える．このとき，
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = r < 1$ となるので，平均値の定理より，

$$|a_{n+1} - 2| = |f(a_n) - f(2)| = |f'(c)| \cdot |a_n - 2| < r|a_n - 2| \ \ (0 < a_n < c < 2,$$

以上より，

$$|a_n - 2| < r^{n-1}|a_1 - 2|, \quad (0 < r < 1)$$

が成立するので，$a_n \to 2$ に収束する．一方，別解として，平均値の定理を利用せず，以下のように極限を求めることが可能である．

$$|a_{n+1} - 2| = |\sqrt{a_n + 2} - 2| = \left| \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| < \frac{1}{2}|a_n - 2|$$

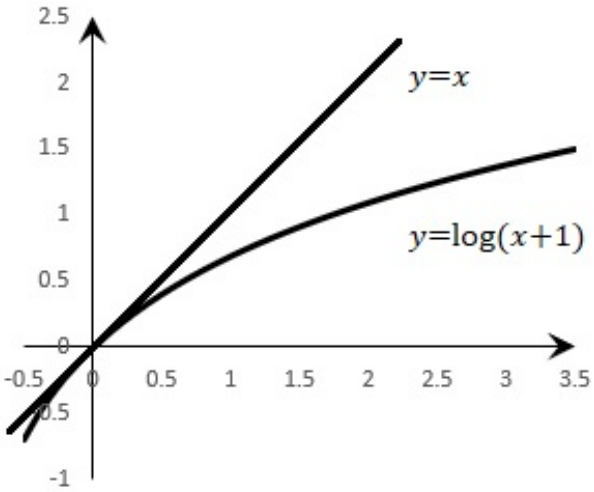
以上より，

$$|a_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - 2|$$

が成立するので，$a_n \to 2$, $(n \to \infty)$ に収束する． □

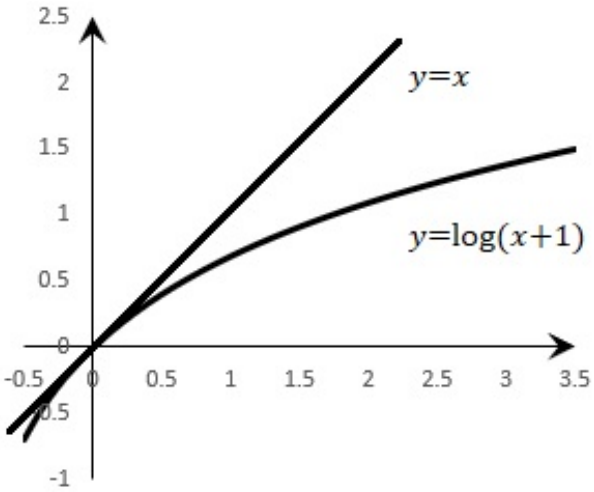
【 演習 】 **(Practice 1)** x に関する方程式 $x = \log_e(x+1)$ について, 解が一つであることを示し, さらに, 以下の不動点アルゴリズムは, その解に収束することを示せ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \log_e(a_n + 1)$$



【 演習 】 **(Practice 1)** x に関する方程式 $x = \log_e(x+1)$ について, 解が一つであることを示し, さらに, 以下の不動点アルゴリズムは, その解に収束することを示せ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \log_e(a_n + 1)$$



【解答】 $f(x) = x - \log_e(x+1)$ とおく. このとき, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$ であり, $x = 0$ のとき, 最小値をとることが容易に分かる. また, このとき, $f(0) =$ より, 解は $x = 0$ のみである.

(2) 数学的帰納法により, $a_n > 0$ であることが示される. ここで, $g(x) = \log_e(x+1)$ とおく.

$$\begin{aligned} 0 < |a_{n+1} - 0| &= |g(a_n) - g(0)| \\ &= |g'(c)| \cdot |a_n - 0| < r|a_n - 0| \end{aligned}$$

ただし, $0 < c < a_n$. $g'(c) = \dfrac{1}{c+1} = r < 1$ を満足する. この関係式を続けて使用すれば,

$$0 < |a_{n+1} - 0| < r|a_n - 0| < \cdots < r^{n-1}|a_1 - 0|$$

したがって, $\{a_n\}$ は 0 に収束する.

Example

$\alpha > 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $a_n > 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\sqrt{x} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(x - 1)$ (ただし，$x \geq 0$ とする．)

(3) $a_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2014 年 広島大学 文・理系)

まず，不動点を求める．$x \geq 0$ の範囲に存在することが分かる．さらに，

$$x = f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ 1$$

したがって，これらの不動点 $x = 0$, $x = 1$ を除く範囲で，初期値 $a_1 = \alpha$ を設定する．

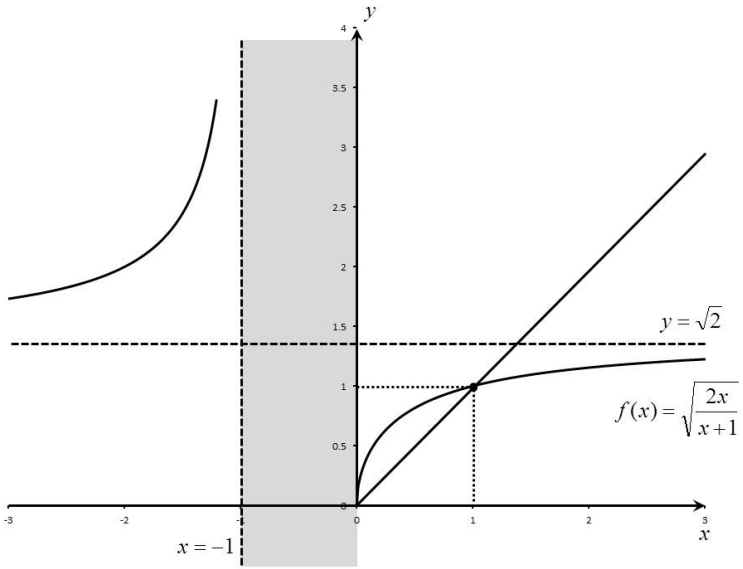


Fig. 1.1

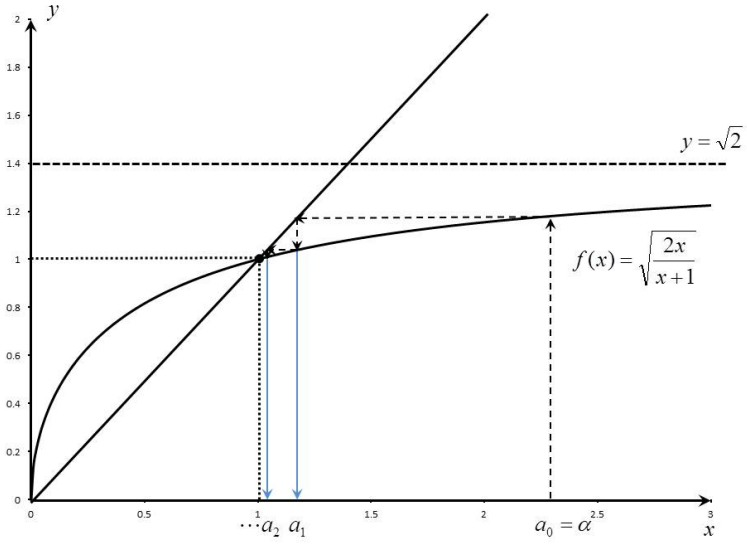


Fig. 1.2

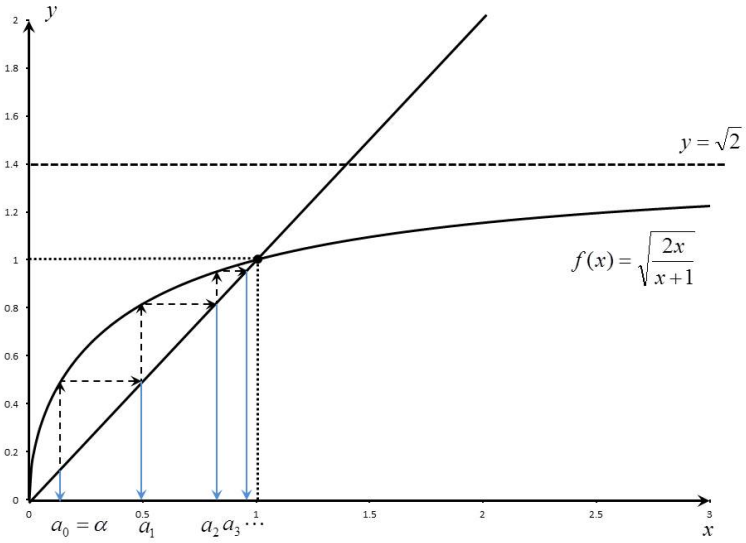


Fig. 1.3

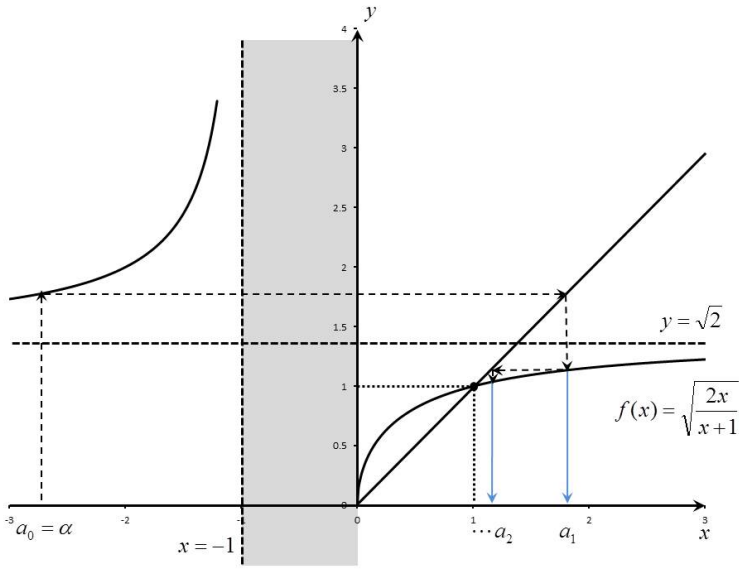


Fig. 1.4

例えば, $1 < a_1 = \alpha$ の場合を考える. **Fig.1.2** より,

$$1 < \cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$$

であることが分かる. 実際に,

$$a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1 = \frac{\sqrt{2a_n} - \sqrt{a_n+1}}{\sqrt{a_n+1}} = \frac{a_n - 1}{\sqrt{a_n+1}(\sqrt{2a_n} + \sqrt{a_n+1})}$$

となるので, 帰納法により, $a_1 = \alpha > 1$ であれば, 全ての n に対して, $a_n > 1$ が示される. さらに, $\sqrt{a_n} > 1$ かつ $\sqrt{\dfrac{2}{a_n+1}} < 1$ に注意すれば,

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\frac{2}{a_n+1}}\right) > 0$$

なので, 数列 $\{a_n\}$ は単調減少かつ下に有界であることが示される. 以上により, $a_n \to 1$ に収束することが容易に分かる. この結果は, グラフからの考察に一致する.
Fig.1.3, **Fig.1.4** からも, それぞれ初期値が $0 < a_1 = \alpha < 1$, $a_1 = \alpha < -1$ の場合でも, グラフ的考察によって, これらの場合でも, $a_n \to 1$ に収束することが容易に分かる. とくに, $a_1 = \alpha < -1$ の場合は, $a_2 > 1$ となり, 以降は $a_1 = \alpha > 1$ の場合が利用できることに注意されたい.
【 解答 **(3)** 】

$$0 < a_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} - 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1} - 1\right) = \frac{1}{2(a_n+1)}(a_n - 1) < \frac{1}{4}(a_n - 1)$$

$$\to a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1 - 1)$$

【 参考 1 】 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{2a_n + 3} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定める.
(1) $a_{n+1} < a_n$, $0 < a_n \leq 1$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を示せ.
(2) 数学的帰納法によって

$$a_n \leq \frac{1}{5^{n-1}} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を証明せよ.
(1989 年 広島大学 文系)

【 参考 2 】 a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく. 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.
(1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき, a を求めよ.
(2) $a < 1$ のとき, $x_n < 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ.
(3) $0 < a < 1$ のとき, $x_n < x_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ.
(2012 年 広島大学 理系)

https://www.wolframalpha.com/

【 演習 】 **(Practice 2)** 関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}x\left\{1 + e^{-2(x-1)}\right\}$ とする．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $x > \dfrac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n = 0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ を $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める．$x_0 > \dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ であることを示せ． **(2005 年 東京大学)**

《 解答 》 x について微分を行えば，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^{-2(x-1)} - 2xe^{-2(x-1)}}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

を得る．ここで，増減表を作成すれば，

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \frac{e^2+1}{2} \approx 4.2$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{1}{2}$．

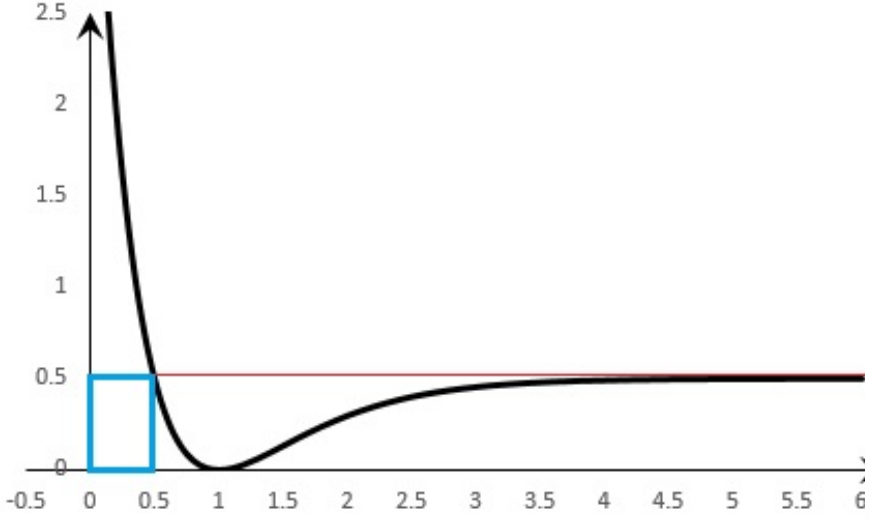


Fig. 2.1 $y = f'(x)$

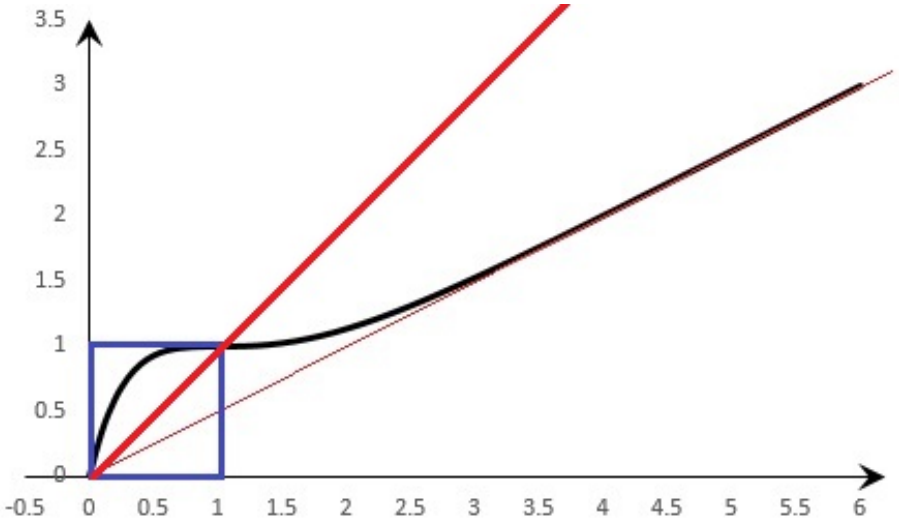


Fig. 2.2 $y = f(x)$

$\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で，$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ である．また，$f(1) = 1$ かつ，$0 < x$ の範囲で解は $x = 1$ のみである．

$$0 < |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| = |f'(c)| \cdot |x_n - 1| < \frac{1}{2}|x_n - 1|$$

この関係式を続けて使用すれば，

$$0 < |x_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|x_n - 1| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - 1|$$

$$\Rightarrow 0 < |x_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - 1| \to 0, \quad (n \to 0)$$

したがって，$\{x_n\}$ は 1 に収束する．

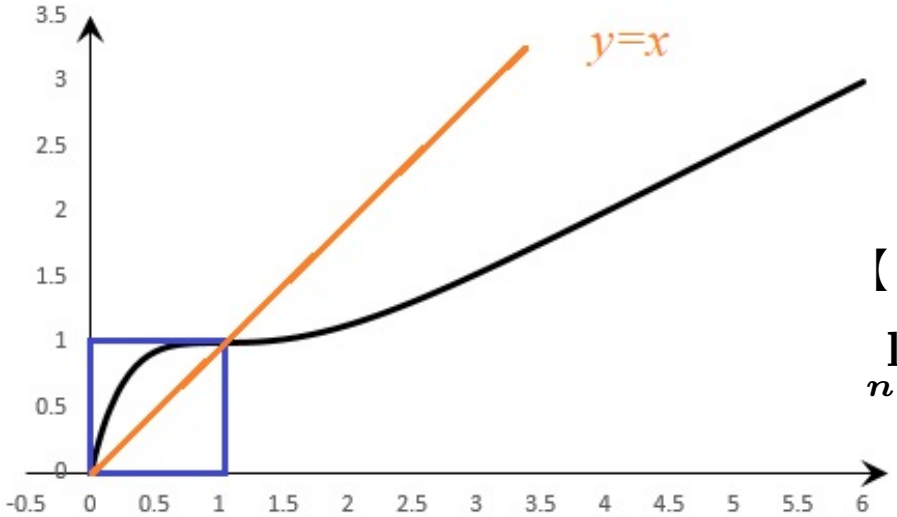


Fig. 2.1 $x_{n+1} = f(x_n)$

【 補足 】 $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$ であっても $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$ であることが分かる．

Example

関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする.

(1) $0 < x < 1$ ならば, $0 < f(x) < 1$ となることを示せ.

(2) $f(x) - x = 0$ となる x をすべて求めよ.

(3) $0 < \alpha < 1$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \ \ (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

とする. α の値に応じて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ. (2008 年 北海道大学)

《 解答 》 **(1)** まず, $f(x)$ を以下のように変形する.

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x^2+1}$$

ここで, $0 < x < 1$ なので, $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2x^2+1} < 1$. したがって,

$$0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} < f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x^2+1} < \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

(2) 不動点を求める.

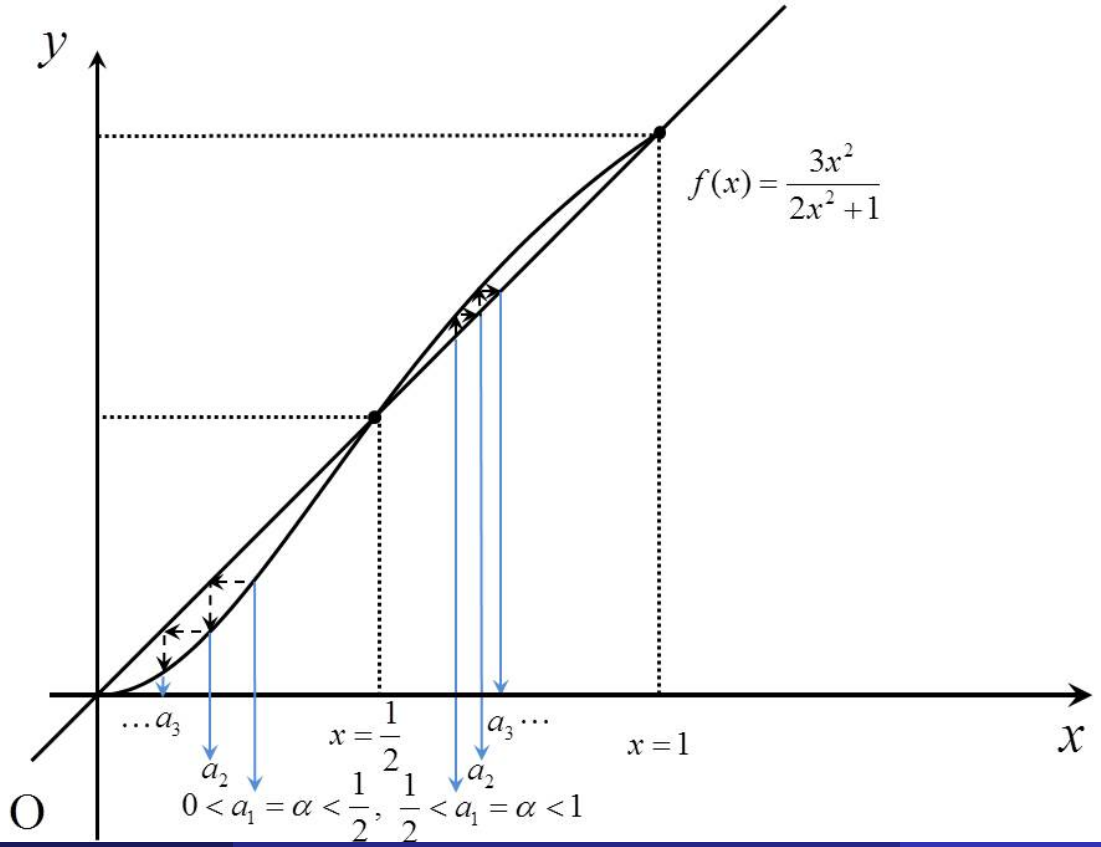
$$\frac{3x^2}{2x^2+1} = x \quad \Leftrightarrow \quad x(2x-1)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$$

(3) 例題 **3.3** で紹介したように, グラフ的な考察によって,

(i) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ であるとき, $0 < \cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots < \alpha = a_1 < \frac{1}{2}$.

(ii) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ であるとき, $\frac{1}{2} < \alpha = a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 1$.

と推測される.



以下では，これらの推測が正しいことを帰納法によって示す．

(i) $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ であるとき，$n = 1$ のとき成立．さらに，$0 < a_k < \dfrac{1}{2}$ が成立すると仮定する．このとき，

$$\frac{1}{2} - a_{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{3a_k^2}{2a_k^2 + 1} = \frac{(1 + 2a_k)(1 - 2a_k)}{2(2a_k^2 + 1)} > 0$$

$$a_{k+1} = \frac{3a_k^2}{2a_k^2 + 1} > 0$$

となり，$n = k + 1$ のときも成立する．

(ii) $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ であるとき，$n = 1$ のとき成立．さらに，$\dfrac{1}{2} < a_k < 1$ が成立すると仮定する．このとき，

$$1 - a_{k+1} = 1 - \frac{3a_k^2}{2a_k^2 + 1} = \frac{(1 + a_k)(1 - a_k)}{2a_k^2 + 1} > 0$$

$$a_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{3a_k^2}{2a_k^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{(2a_k + 1)(2a_k - 1)}{2(2a_k^2 + 1)} > 0$$

となり，$n = k + 1$ のときも成立する．

次に, 増減について示す.

(i) $0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ であるとき,

$$a_n - a_{n+1} = a_n - f(a_n) = a_n - \frac{3\ {a_n}^2}{2\ {a_n}^2 + 1} = \frac{a_n(2a_n - 1)(a_n - 1)}{2\ {a_n}^2 + 1} > 0$$

であるので, $a_{n+1} < a_n$ が成立する.

(ii) $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$ であるとき,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n(2a_n - 1)(1 - a_n)}{2\ {a_n}^2 + 1} > 0$$

であるので, $a_n < a_{n+1}$ が成立する.

以上から, 単調かつ有界であることが示されたので,

(i) $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ であるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ であるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(iii) $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ であるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

《 別解 》 不等式の評価を基に，「はさみうちの原理」によって極限を求める．

(i) $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ であるとき．

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{2\,{a_n}^2 + 1} a_n$$

ここで，$g(p) = \dfrac{3p}{2p^2+1}$，$\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$ を定義する．$g'(p) = \dfrac{3(1-2p^2)}{(2p^2+1)^2} > 0$ であるので，$0 < a_n < \dfrac{1}{2}$ であれば，$g(p)$ が単調増加であることから，

$$0 < \frac{3a_n}{2\,{a_n}^2 + 1} < \gamma < g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

を満足する γ が存在する．以上から，$0 < \gamma < 1$ を考慮して

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{2\,{a_n}^2 + 1} a_n < \gamma a_n \quad \Rightarrow \quad 0 < a_n < \gamma^{n-1} a_1 = \gamma^{n-1}\alpha \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ．

(ii) $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ であるとき.

$$1 - a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2\,{a_n}^2 + 1}(1 - a_n)$$

ここで, $h(p) = \dfrac{p+1}{2p^2+1}$, $\left(\dfrac{1}{2} < p < 1\right)$ を定義する. $h'(p) = \dfrac{1 - 4p - 2p^2}{(2p^2+1)^2} < 0$ であるので, $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$ であれば, $h(p)$ が単調減少であることから,

$$0 < \frac{1 + a_n}{2\,{a_n}^2 + 1} < \frac{1 + a_1}{2a_1^2 + 1} = \frac{1 + \alpha}{2\alpha^2 + 1} = \delta < h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

を満足する δ が存在する. 以上から, $0 < \delta < 1$ を考慮して

$$1 - a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2\,{a_n}^2 + 1}(1 - a_n) < \delta(1 - a_n)$$
$$\Rightarrow 0 < 1 - a_n < \delta^{n-1}(1 - a_1) = \delta^{n-1}(1 - \alpha) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

同様に, はさみうちの原理により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(iii) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ であるとき. (略)

【参考 3】 α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし, $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする.
数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義されるとき, 次の問いに答えよ.
(1) すべての自然数 n に対して, $0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ.
(2) $b_n = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき, すべての自然数 n に対して, $b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ, (2020 年 北海道大学)

《略解》 (2) $g(x) = \dfrac{1 - f(x)}{1 - x}$ とおく. $g(a_n) = \dfrac{1 - f(a_n)}{1 - a_n} = \dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} = b_n$ である. したがって, $b_{n+1} < b_n$ であることは, $g(a_n) > g(a_{n+1})$ を示すことに同値. さらに, (1) より $a_n < a_{n+1}$ なので, $0 < x < 1$ の範囲で, $y = g(x)$ が減少関数であることを示せばよい.

$$g'(x) = \frac{-(1-x)f'(x) + 1 - f(x)}{(1-x)^2}$$

ここで, $h(x) = -(1-x)f'(x) + 1 - f(x)$ とおくと,

$$h'(x) = -(x-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{2} > 0, \quad (0 < x < 1)$$

$h(1) = 0$ なので, $h(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ となり, $y = g(x)$ は減少関数.
(3) $\dfrac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n} = b_n < b_1 = \dfrac{1 - a_2}{1 - a_1} < \dfrac{1 - a_1}{1 - a_1} < 1.$
$0 < 1 - a_{n+1} < b_1(1 - a_n) \Rightarrow 0 < 1 - a_n < b_1^{n-1}(1 - a_1)$. 以上より, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. さらに,
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{a_n\to 1} \dfrac{1 - f(a_n)}{1 - a_n} = f'(1) = 0.$

Example (Ex.2)

数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = \frac{1}{m}, \quad a_{n+1} = 2|a_n| - 4 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する。ただし, m は自然数である。
また, ある自然数 k に対して, $k \leqq n$ を満たすすべての n に対して,
$a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots$ であるとき, 数列 $\{a_n\}$ は定数列という。

(1) 方程式 $x = 2|x| - 4$ を解け。

(2) $m = 1$ であるとき, 数列 $\{a_n\}$ は定数列であることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が定数列にならない最小の m を求めよ。また, そのときの一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2019 県立広島大学 (オリジナル))

《 解答 》 **(1)** $x = \pm 2x - 4$ と変形できるので, $x = 4,\ -\dfrac{4}{3}$.
(2) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 0,\ a_4 = -4,\ a_5 = 4,\ a_6 = 4,\ a_7 = 4,\ \ldots$ であることが分かる. また, **(1)** の結果より, $4 \leqq n$ を満たすすべての n に対して,
$a_5 = a_6 = a_7 = \cdots = 4$ となるので, 定数列である.
(3) $m = 2$ のとき, $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = -3,\ a_3 = 2,\ a_4 = 0,\ a_5 = -4,\ a_6 = 4,\ \ldots$
で, **(2)** と同様に定数列である.

$m=3$ のとき, $a_1=\dfrac{1}{3},\ a_2=-\dfrac{10}{3},\ a_3=\dfrac{8}{3},\ a_4=\dfrac{4}{3},\ a_5=-\dfrac{4}{3},\ a_6=-\dfrac{4}{3},\ \ldots$ で, 定数列である.

$m=4$ のとき,

$a_1=\dfrac{1}{4},\ a_2=-\dfrac{7}{2},\ a_3=3,\ a_4=2,\ a_5=0,\ a_6=-4,\ a_7=4, a_8=4,\ \ldots$ で, 定数列である.

$m=5$ のとき, $a_1=\dfrac{1}{5},\ a_2=-\dfrac{18}{5},\ a_3=\dfrac{16}{5},\ a_4=\dfrac{12}{5},\ a_5=\dfrac{4}{5},\ a_6=-\dfrac{12}{5},\ a_7=\dfrac{4}{5}, a_8=-\dfrac{12}{5},\ \ldots$ であり, 定数列でない. これを数学的帰納法によって示す.

$5\leqq n$ のとき, $n=2\ell,\ n=2\ell+1$ のとき, $a_{2\ell}=-\dfrac{12}{5}, a_{2\ell+1}=\dfrac{4}{5}$ と仮定する. このとき,

$a_{2(\ell+1)}=2|a_{2\ell+1}|-4=-\dfrac{12}{5}, a_{2(\ell+1)+1}=2|a_{2\ell}|-4=\dfrac{4}{5}$. したがって成立. 以上により,

$a_1=\dfrac{1}{5},\ a_2=-\dfrac{18}{5},\ a_3=\dfrac{16}{5},\ a_4=\dfrac{12}{5}, 5\leqq n$ のとき, $n=2\ell,\ n=2\ell+1$ のとき, $a_{2\ell}=-\dfrac{12}{5}, a_{2\ell+1}=\dfrac{4}{5}$.

【 参考 4 】a は $9 < a < 10$ を満たす実数とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = |a_n| - 1 \quad (n \geq 1)$$

で定め，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく，このとき，(1), (2) に答えよ．

(1) S_n を n と a で表せ．

(2) $S_n = 0$ が成り立つ n が存在するような a の最大値を求めよ．　(1986 年 九州大学)

《 略解 》 (1) $1 \leq n \leq 10$ のとき，$S_n = na - \dfrac{n(n-1)}{2}$，

$11 \leq n$ のとき，

n が奇数であれば，　$S_n = 11a - \dfrac{n+99}{2}$.

n が偶数であれば，　$S_n = 10a - \dfrac{n+80}{2}$.

(2) $a = \dfrac{109}{11}$.

ニュートン法

方程式 $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ を考える．ここで，関数 $f(x)$ は $f(x) \in \mathbb{R}$.

Definition (ニュートン法)

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad a_0 = \beta$$

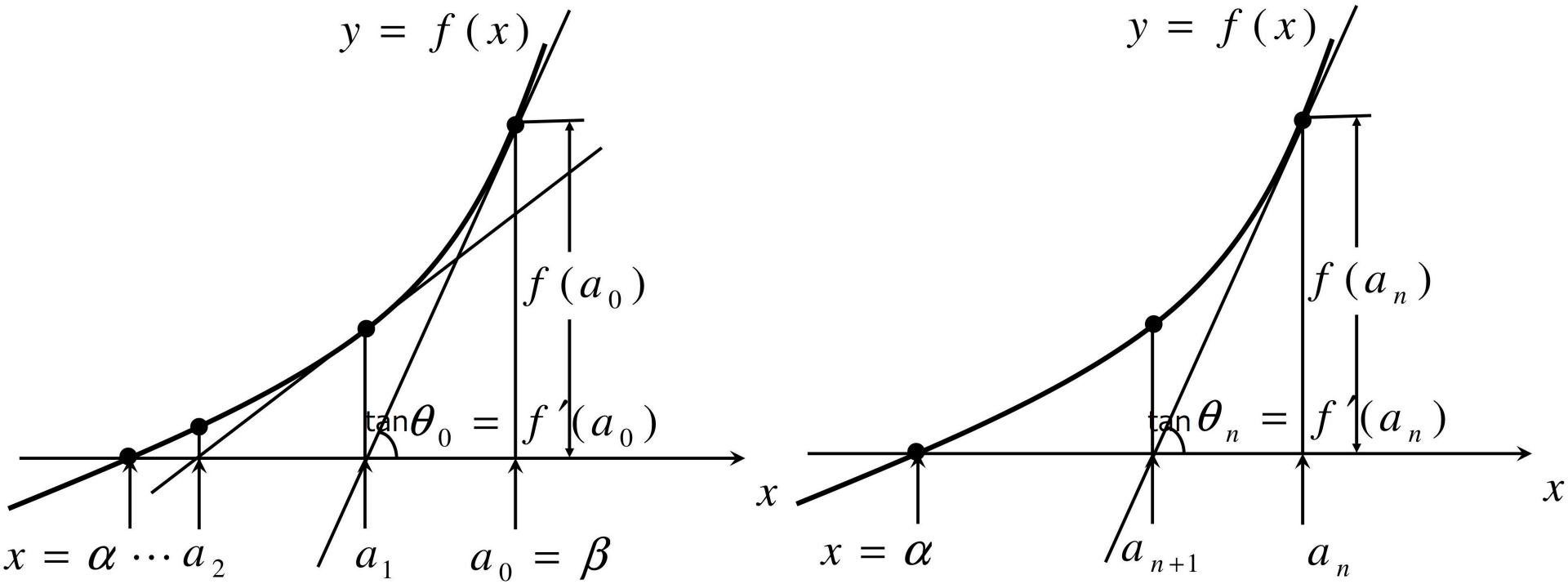


Fig. 7.1

Theorem (The Newton-Kantorovich Theorem)

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n (\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n)$ はある凸集合 $\mathcal{D}_0 (\subset \mathcal{D})$ の上でフレシェ(Fréchet) 微分可能で,

$$\|\nabla f(\mathrm{x}) - \nabla f(\mathrm{y})\| \leq L\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \ \mathrm{x}, \ \mathrm{y} \in \mathcal{D}_0, \ \nabla f(\mathrm{x}) = \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}$$

とする. ある $\mathrm{x}^{(0)} \in \mathcal{D}_0$ において

$$\|\nabla f(\mathrm{x}^{(0)})^{-1}\| \leq a, \quad \|\nabla f(\mathrm{x}^{(0)})^{-1} f(\mathrm{x}^{(0)})\| \leq b, \quad \theta = abL \leq \frac{1}{2}$$

が成り立ち,

$$\bar{S}_1 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(0)}\| \leq \frac{1}{aL}[1 - \sqrt{1 - 2\theta}]\}$$

が $\mathcal{D}_0$ に含まれるならば, 方程式 $f(\mathrm{x}) = 0$ は $\alpha \in S_2 \cap \mathcal{D}_0$ なる唯一の根 α をもつ.

$$S_2 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(0)}\| \leq \frac{1}{aL}[1 + \sqrt{1 - 2\theta}]\}$$

である. そして $\mathrm{x}^{(0)}$ を初期値とするニュートン法は $\mathrm{x}^{(k)} \in \bar{S}_1$ なる列 $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ を生成し, $\mathrm{x}^{(k)}$ は α に収束する. さらに

$$\|\mathrm{x}^{(k)} - \alpha\| \leq \frac{(2\theta)^{2^k}}{2^k aL}, \quad (k = 1, \ 2, \ \cdots)$$

Example

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を示せ．

《 解答 》 $f(x) = x^2 - 2$ とおく．このとき，$f'(x) = 2x$ となるので，ニュートン法を利用して，以下となる．

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{{a_n}^2 - 2}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{2})^2$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 - {a_n}^2}{2a_n}$$

数学的帰納法により，$\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n$ が容易に示される．

$$|a_{n+1}-\sqrt{2}| = \left|\frac{{a_n}^2+2}{2a_n}-\sqrt{2}\right| = \left|\frac{{a_n}^2-2\sqrt{2}a_n+2}{2a_n}\right| = \frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{2})^2$$

$$<\frac{1}{2\sqrt{2}}(a_n-\sqrt{2})^2$$

以上より,

$$|a_n-\sqrt{2}| < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}-1}(a_1-\sqrt{2})^{2^{n-1}}$$

このとき, $a_1=2$ であることに注意すれば, $0<a_1-\sqrt{2}<1$ より, ニュートン法は収束する. すなわち,

$$|a_n-\sqrt{2}| < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}-1}(2-\sqrt{2})^{2^{n-1}} \to 0, \quad (n\to+\infty)$$

$$\Rightarrow a_n \to \sqrt{2}, \quad (n\to+\infty)$$

さらに, **2 次収束**であることが分かる.

Example

関数 $f(x) = x + x^{-1} - 2$, $(x > 0)$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 漸化式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で表される数列 $\{a_n\}$ について (i), (ii) の問いに答えよ。

(i) すべての n に対して, $a_n > 1$ であることを示せ。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (2019 年　広島大学 情報科学部 総合型選抜)

《 解答 》 $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n + a_n^{-1} + 2}{1 - a_n^{-2}} = a_n - \dfrac{a_n(a_n - 1)^2}{{a_n}^2 - 1}$. このとき,

$$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1) - \frac{a_n + a_n^{-1} + 2}{1 - a_n^{-2}} = \frac{(a_n - 1)^2}{{a_n}^2 - 1}.$$

したがって, 帰納法より $a_n > 1$ が示される. したがって, $a_n - 1 \neq 0$ なので,

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \frac{a_n - 1}{a_n - 1 + 2} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 2 \times \frac{1}{a_n - 1} + 1$$

この漸化式を解いて, $\dfrac{1}{a_n - 1} = \dfrac{a_1 \times 2^{n-1}}{a_1 - 1} - 1 = 2^n - 1 \Leftrightarrow a_n = \dfrac{2^n}{2^n - 1}$.

【 参考 5 】 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は 2 以上の整数) の近似値を求めるため

$$f(x) = x^k - c, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (x > 0)$$

とおき,

$$\sqrt[k]{c} < a_1, \quad a_{n+1} = g(a_n), \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする.

(1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば, $\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ.

(2) $k = 3$ のとき, $\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば, $a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}\left(a_n - \sqrt[3]{c}\right)^2$ を示せ.

(3) $k = 3$, $c = 2$, $a_1 = 1.3$ のとき, $a_5 - \sqrt[3]{2} < \dfrac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ. (1997 年　九州大学)

《 略解 》 (2) を利用する.

$$a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}\left(a_n - \sqrt[3]{c}\right)^2 \Rightarrow a_n - \sqrt[3]{2} < \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2^{n-1}-1}\left(a_1 - \sqrt[3]{2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_5 - \sqrt[3]{2} < \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{15}\left(1.3 - \sqrt[3]{2}\right)^{2^4} < \frac{1}{(2^{\frac{1}{3}})^{15}} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{16} = \frac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$$

ただし, $2 > 1.2^3 = 1.728 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} > 1.2$. $\sqrt[3]{2} = 1.25992104989487\ldots$

Example (Ex.3)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+4}{2n+3} \times \cdots \times \frac{4n}{4n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。次の問いに答よ。ただし，log は自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k}$ の値を求めよ。

(2) α, β は $0 < \alpha < \beta$ を満たす実数とする。不等式

$$\frac{1}{\beta+1} < \frac{\log(\beta+1) - \log(\alpha+1)}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\alpha+1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) n, k を自然数とする。不等式

$$\frac{1}{2n+2k} < \log \frac{2n+2k}{2n+2k-1} < \frac{1}{2n+2k-1}$$

が成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(2018 広島大学 総合科学部後期 (オリジナル))

《 解答 》 (1)

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\Big[\log|x+1|\Big]_0^1 = \log\sqrt{2}\cdots(\text{答})$$

(2) $f(x) = \log(x+1)$ として平均値の定理を利用すれば,

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(c),\quad \alpha < c < \beta$$

ここで, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ であり, $0 < \alpha < \beta$ より,

$$\frac{1}{\beta+1} = f'(\beta) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\log(\beta+1)-\log(\alpha+1)}{\beta-\alpha} < f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \quad \square$$

(3) $a = \dfrac{2k-1}{2n}$, $b = \dfrac{2k}{2n}$ として, (1) に代入すれば,

$$\frac{1}{\frac{2k}{2n}+1} < \frac{\log\left(\frac{2k}{2n}+1\right)-\log\left(\frac{2k-1}{2n}+1\right)}{\frac{1}{2n}} = \frac{\log\frac{2n+2k}{2n+2k-1}}{\frac{1}{2n}} < \frac{1}{\frac{2k-1}{2n}+1}$$

ここで, 不等式全てに $\dfrac{1}{2n}$ をかけて与不等式を得る.

(4) $\log a_n = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{2n+2k}{2n+2k-1}$ であり，(2) から，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k} < \log a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-2}$$

また，(3) より，$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \log\sqrt{2}$ であるので，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log\sqrt{2}$$

以上より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^N$. ただし, N は正の定数. **(2003 年 京都大-後期：改題)**

《 解答 》 はじめに, 以下のように展開できる.

$$S_n=-\left(\frac{1}{2n}\right)^N+\left(\frac{2}{2n}\right)^N+\cdots-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^N+\left(\frac{2k}{2n}\right)^N+\cdots-\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^N+\left(\frac{2n}{2n}\right)$$

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ より, $a=\dfrac{2k}{2n}$, $b=\dfrac{2k-1}{2n}$.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2k}{2n}\right)^N-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^N\\&=\left(\frac{2k}{2n}-\frac{2k-1}{2n}\right)\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-1}+\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-2}\cdot\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{N-1}\right\}\\&\le\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-1}+\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-2}\cdot\left(\frac{2k}{2n}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-1}\right\}=\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{N-1}\end{aligned}$$

一方, 同様にして,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2k}{2n}\right)^N-\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^N\\&=\left(\frac{2k}{2n}-\frac{2k-1}{2n}\right)\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-1}+\left(\frac{2k}{2n}\right)^{N-2}\cdot\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{N-1}\right\}\\&\ge\frac{1}{2n}\left\{\left(\frac{2(k-1)}{2n}\right)^{N-1}+\left(\frac{2(k-1)}{2n}\right)^{N-2}\cdot\left(\frac{2(k-1)}{2n}\right)^1\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{2(k-1)}{2n}\right)^{N-1}\right\}=\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{N-1}\end{aligned}$$

以上より,

$$\frac{N}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{N-1} \leq S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^N \leq \frac{N}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{N-1}$$

このとき, 区分求積法により,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{N-1} = \frac{N}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{N-1} = \frac{N}{2}\int_0^1 x^{N-1}dx = \frac{1}{2}$$

最終的に, はさみうちの原理により,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^N = \frac{1}{2}$$

【 原題 】 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ を求めよ. **(2003 年 京都大-後期)**

《 略解 》 平均値の定理の利用.

$$\left(\frac{2k}{2n}\right)^{100} - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{100} = \frac{1}{2n}100\alpha_k^{99}, \quad \frac{k-1}{n} < \frac{2k-1}{2n} < \alpha_k < \frac{2k}{2n} = \frac{k}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}100\left(\frac{k-1}{n}\right)^{99} < \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(\frac{k}{2n}\right)^{100} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}100\left(\frac{k}{n}\right)^{99}$$

試験

【 問題 】 数列の極限に関する問題を 1 題作成し，その問題の出題の狙い，解答，実際の収束の様子を示すプログラムを添えて提出せよ．

mailto:mukaida@hiroshima-u.ac.jp