微分積分学 II　小テスト：担当 向谷　博明

2019 年 10 月 4 日

学部	学籍番号	氏名

以下で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し, その極限値を求めよ.

$$0 < a_1 < 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n(1-a_n)}{2}$$

【　解答　】数学的帰納法によって, $0 < a_n < 1$ を示す. $n=1$ のとき, $0 < a_1 < 1$ なので成立. $n=k$ のとき, $0 < a_k < 1$ が成立すると仮定する. このとき,

$$a_{k+1} = \frac{a_k(1-a_k)}{2} = -\frac{1}{2}\left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8},\ (0 < a_k < 1)$$

よって, $n = k+1$ のときも成立.

一方,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n^2 + a_n}{2} \leq 0,\ \Leftrightarrow\ a_{n+1} \leq a_n$$

以上より, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 単調減少かつ下に有界なので収束する.