微分積分学 II　小テスト: 担当 向谷　博明
2019 年 10 月 8 日

学部	学籍番号	氏名

1. 関数 $g(x) = \log \dfrac{1+\sqrt{x+1}}{2}$, $(x > -1)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開が次の級数で与えられることを示せ.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n \cdot (2n)!!} x^n$$

さらに, 収束半径を求めよ.

【 解答 】 まず, 公式

$$(1+x)^{\alpha} \quad = \quad 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

を考える. $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ のとき,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad = \quad 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} x^3 + o(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

を得る.

$$g'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2x}\left(1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

であるので, (1) の結果を利用して,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!} x^{n-1}$$

したがって, x について 0 から x まで項別積分を行い,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} x^n$$

一方, $c_n = (-1)^{n-1} \dfrac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}$ とおく.

$$R = \lim_{x \to 0} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!} \cdot \frac{2(n+1)(2n+2)!!}{(2n+1)!!} = \lim_{x \to 0} \frac{2(n+1)}{2n} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} = 1$$

---

2. 以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

---

3. 以下の関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続か.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$