微分積分学 II　小テスト: 担当 向谷　博明

2019 年 10 月 11 日

学部	学籍番号	氏名

2. 以下の極限を求めよ.

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 0$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \leq \left| xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |xy| \to 0,\ (x,y)\to(0,0)$$

---

3. 以下の関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続か.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r} = \lim_{r\to 0} r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

したがって, 連続. ちなみに,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2}{|h|}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to +0} \frac{h}{h} = 1 \\ \displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{h}{-h} = -1 \end{cases}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{-k^2}{|k|}-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k}{|k|} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{k\to +0} \frac{-k}{k} = -1 \\ \displaystyle\lim_{k\to -0} \frac{-k}{-k} = 1 \end{cases}$$

したがって原点で x, y について, 偏微分不可能.