微分積分学 II　小テスト：担当 向谷　博明

2019 年 10 月 15 日

学部	学籍番号	氏名

【１】 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ であるとき,

$$f_x(x,y)=\frac{-x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2},\ f_y(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_{xx}(x,y)=\frac{2x^3y^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^3},\ f_{yy}(x,y)=\frac{2x^5-6x^3y^2}{(x^2+y^2)^3},\ f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{-2x^4y+6x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

【２】 関数 $f(x,y)=|xy|$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能か.

$f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=0.\ f_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0-0}{k}=0.$

したがって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\{f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to0}\frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r}=0$$

以上より, 全微分可能.

【３】 以下の関数 $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で全微分可能か. 全微分可能である場合，原点での接平面を求めよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

[2] と同様にして, $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. したがって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\{f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^4}=(\text{不定})$$

以上より, 全微分不可能. 当然接平面も存在しない.

【４】 以下の関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で全微分可能となる定数 α の値の範囲を求めよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\alpha}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

[2] と同様にして, $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. したがって,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\{f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{\alpha}\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{r\to0}\frac{r^3(\cos\theta-\sin\theta)}{r^{2\alpha+1}}=\lim_{r\to0}r^{2(1-\alpha)}(\cos\theta-\sin\theta)$$

この極限が 0 になるためには, $\alpha<1$.

【まとめ】$(x,y)=(a,b)$ での全微分可能性を調べる.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-\{f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)\}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0$$

となるかどうかを調べる. 特に, 原点では,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\{f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

となるかどうかを調べる.

全微分可能であれば, 接平面は,

$$z=f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)$$

となる.