**微分積分学 II　小テスト：担当 向谷　博明**
**2019 年 11 月 5 日**

| 学部 | 学籍番号 | 氏名 |
|---|---|---|
| | | |

実数 $x, y$ が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．　(2012 京都大学)

---

ラグランジュの未定乗数法を利用する．

$$L = x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y+\lambda(x^2+xy+y^2-6)$$

とおく．ここで, $\lambda$ はラグランジュ定数である．必要条件として,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy+y^2-2x-2y+1+\lambda(2x+y)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2+2xy-2x-2y+1+\lambda(x+2y)=0$$

であるので, これら 2 つの式を引けば, $(x-y)(x+y-\lambda)=0$.
　(i) $x=y$ のとき, $x^2+xy+y^2=6$ に代入すれば, $x=y=\pm\sqrt{2}$. したがって,
$(x,y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ のとき, $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=-8+6\sqrt{2}$.
$(x,y)=(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ のとき, $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=-8-6\sqrt{2}$.
(ii) $x+y=\lambda$ のとき,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 2x^2+5xy+2y^2-2x-2y+1=0$$

ここで, $x+y=s$, $xy=t$ とおけば, 拘束条件より, $x^2+xy+y^2-6=(x+y)^2-xy-6=s^2-t-6=0$. 必要条件より,
$2x^2+5xy+2y^2-2x-2y+1=2(x+y)^2+xy-2(x+y)+1=2s^2+t-2s+1=0$. $t=s^2-6$ を代入し,
$2s^2+t-2s+1=3s^2-2s-5=(3s-5)(s+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad s=\dfrac{5}{3},\ s=-1$.
すなわち, $(s,\ t)=\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{29}{9}\right)$, $(-1,\ 5)$. したがって,
$(s,\ t)=\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{29}{9}\right)$ のとき, $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=st-s^2+s=s^3-s^2-5s=-\dfrac{175}{27}$.
$(s,\ t)=(-1,\ 5)$ のとき, $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=st-s^2+s=s^3-s^2-5s=3$.
以上から, $-8-6\sqrt{2}\le x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\le 3$
《別解》http://www.densu.jp/frkyoto.htm

2012 京都大学（文系）前期日程　解答解説

3　　問題のページへ

　条件より, $x^2+xy+y^2=6$ から, $(x+y)^2-xy=6$ ………①
　ここで, $u=x+y$, $v=xy$ とおくと, $x, y$ は $t$ の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので,

$$D=u^2-4v\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

　さて, ①より, $u^2-v=6$, $v=u^2-6$ ………③
　②③から, $u^2-4(u^2-6)\geqq 0$, $u^2-8\leqq 0$, $-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④
　ここで, $z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと, ③から,

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5$$
$$=(3u-5)(u+1)$$

| $u$ | $-2\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $\frac{5}{3}$ | $\cdots$ | $2\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $z$ | | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\frac{175}{27}$ | $\nearrow$ | |

　さらに, $u=\pm\sqrt{2}$ のとき, $z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので, 上表から, ④における $z$ のとりうる値の範囲は,

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

［解 説］
　対称式であることに気付けば, $u=x+y$, $v=xy$ という置き換えにつながります。なお, 実数条件を忘れないことがポイントです。