応用数理　試験
2015 年 2 月 10 日

学部	学籍番号	氏名	得点

【 1 】以下の関数の最大・最小を 3 通りの方法によって求めよ.

$$f(x, y, z) = 2x + 2y + z^2, \quad \textbf{s.t.}\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

(1) 制約なし非線形最適化 (z を消去して 2 変数関数とする)

(2) 制約付き非線形最適化 (ラグランジュの未定乗数法)

(3) 動的計画法

(【 2 】の解答の続き)

【 3 】以下の最適化問題を考える.

$$\min_{u(t)} \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x^2(t) - u^2(t)]dt \ \ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = u(t), \ \ x(0) = 1, \ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(1) オイラー・ラグランジュ方程式を求めよ.

(2) 関数 $x = x(t)$ を求めよ.

【 2 】x に関する方程式

$$x = e^{\frac{1-x}{2}}$$

について, 以下の問いに答よ. ただし, $e = 2.7182818\cdots$ である.

(1) 以下の不動点アルゴリズムは, 解に収束することを示せ.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = e^{\frac{1-a_n}{2}}$$

(2) 以下の勾配法によるアルゴリズムは, 解に収束することを示せ. ただし, ε は小さな正の定数とする.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n - \varepsilon(a_n - e^{\frac{1-a_n}{2}})$$

(3) 方程式を解くためのニュートン法を差分方程式 $\{a_n\}$ によって記述し, $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 1$ を示せ. さらに, 2 次収束であることを示せ. ただし, 初期値 $a_1 = 0$ とする.

(【１】の解答の続き)

解答

【１】(1) まず, z を消去する．このとき, 問題は

$$f_1(x,\ y) = 2x + 2y + (4 - x^2 - y^2)$$

となる．しかし, これでは完全な等価問題となっていない．すなわち, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ であるために, x, y は全ての実数を取りえないことに注意されたい．実際には

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

という制約条件が課される．これは, 4.3 節で扱った KKT 条件によって, 最適性の必要条件を求める必要がある．まず, 以下の関数を定義する．

$$L_1(x,\ y) = 2x + 2y + (4 - x^2 - y^2) + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

このとき, KKT 条件によって以下を得る．

$$L_{1x}(x,\ y) = 2 - 2x + 2\lambda x = 0, \quad L_{1y}(x,\ y) = 2 - 2y + 2\lambda y = 0, \quad \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0, \quad \lambda \geq 0$$

(i) $\lambda = 0$ のとき, $x = y = 1$ を得る．さらに, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ より, $z = \pm\sqrt{2}$ を得る．このとき,

$$f(x,\ y,\ z) = 2x + 2y + z^2 = 6$$

(ii) $\lambda > 0$ のとき, $x^2 + y^2 = 4$ を得る．さらに, $x = y = \dfrac{1}{1-\lambda}$ であるので, $x^2 + y^2 = 4$ に代入すれば, $1 - \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. すなわち, $x = y = \pm\sqrt{2}$ を得る．このとき,

$$f(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ 0) = \pm 4\sqrt{2}$$

以上から, 必要条件であるが, 最大値 6, 最小値 $-4\sqrt{2}$ を得る．
(2) ラグランジュの未定乗数法によって解く．以下の関数を定義する．

$$L_2(x,\ y,\ z) = 2x + 2y + z^2 + \ell(4 - x^2 - y^2 - z^2)$$

このとき, 以下を得る．

$$L_{2x}(x,\ y,\ z) = 2 - 2\ell x = 0, \quad L_{2y}(x,\ y,\ z) = 2 - 2\ell y = 0, \quad L_{3z}(x,\ y,\ z) = 2z - 2\ell z = 0$$

(i) $\ell = 1$ のとき, $x = y = 1$ を得る．さらに, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ より, $z = \pm\sqrt{2}$ を得る．このとき,

$$f(x,\ y,\ z) = 2x + 2y + z^2 = 6$$

(ii) $\ell \neq 1$ のとき, $z = 0$ を得る．さらに, $x = y = \dfrac{1}{\ell}$ であるので, $x^2 + y^2 = 4$ に代入すれば, $\ell = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. すなわち, $x = y = \pm\sqrt{2}$ を得る．このとき,

$$f(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ 0) = \pm 4\sqrt{2}$$

以上から, 必要条件であるが, 最大値 6, 最小値 $-4\sqrt{2}$ を得る．
(3) z を固定して考える．実は, このアイディアこそ動的計画法に基づく多変数の最適化のポイントとなる．以下の直線

$$2x + 2y + z^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \frac{k - z^2}{2}$$

と円 $x^2 + y^2 = 4 - z^2$ が共有点を持つ範囲を考える．明らかに, 原点と直線までの距離が $\sqrt{4 - z^2}$ 以下であればよいので,

$$\begin{aligned} &\frac{|k - z^2|}{2\sqrt{2}} \leq \sqrt{4 - z^2} \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{4 - z^2} \leq k \leq z^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{4 - z^2} \\ \Leftrightarrow \quad & z^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{4 - z^2} \leq 2x + 2y + z^2 \leq z^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{4 - z^2} \end{aligned}$$

ただし, $x = y = -\sqrt{\dfrac{4 - z^2}{2}}$ のとき最小で, $x = y = \sqrt{\dfrac{4 - z^2}{2}}$ のとき最大となる．
(i) $M(z) = z^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{4 - z^2}$ とおく．

$$M'(z) = 2z - 2\sqrt{2}\frac{z}{\sqrt{4 - z^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2},\ x = y = 1$$

で最大値 6 をとる．

(ii) $m(z) = z^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{4-z^2}$ とおく．

$$M'(z) = 2z + 2\sqrt{2}\frac{z}{\sqrt{4-z^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0,\ x = y = -\sqrt{2}$$

で最小値 $-4\sqrt{2}$ をとる．

【 2 】収束解は $x = 1$ である．

(1) $f(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$ とおく． $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1-x}{2}} < 0$, $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1-x}{2}} > 0$, $f'(0) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} > -1$. したがって, $0 \leq x$ の範囲で, $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$.

$1 = f(1)$ であるので,

$|a_{n+1} - 1| = |f'(c)| \cdot |a_n - 1| = \left|-\frac{1}{2}e^{\frac{1-c}{2}}\right| \cdot |a_n - 1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|a_n - 1|$.

これを繰り返し利用すれば,

$0 < |a_n - 1| \leq \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^{n-1}|a_2 - 1| = \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

以上より, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(2) $|a_{n+1} - 1| = \left|a_n - 1 - \varepsilon\left(a_n - e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}\right)\right| = \left|a_n - 1 - \varepsilon\left(a_n - 1 + \frac{1}{2}(1-a_n) + O((a_n-1)^2)\right)\right| = |a_n - 1| \cdot \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + O((a_n-1)^2)\right)\right|$.

このとき, $0 < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + O((a_n-1)^2)\right) < 1$ を満足するような ε が取れるので, $\left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + O((a_n-1)^2)\right)\right| = r$, $(0 < r < 1)$ を満足する定数 r が存在する．以上より,

$0 < |a_n - 1| \leq r^{n-1}|a_2 - 1| = r^{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

以上より, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(3) $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n - e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}} = \dfrac{(a_n+2)e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}, \quad a_1 = 0.$

帰納法により, $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 1$ を示す．

(i) まず, $0 < a_n < 1$ を示す． $n = 1$ のとき, $0 = a_1 < 1$ で成立する． $n = k$ のとき, $0 < a_k < 1$ が成立すると仮定する．このとき,

$a_{k+1} = \dfrac{(a_k+2)e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}} > 0$. 一方,

$1 - a_{k+1} = \dfrac{2 - (a_k+1)e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}}$.

このとき, $g(x) = 2 - (x+1)e^{\frac{1}{2}(1-x)}$ とおけば, $0 \leq x < 1$ の範囲で, $g'(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^{\frac{1}{2}(1-x)} < 0$ かつ, $g(1) = 0$ より, $g(x) > 0$. すなわち, $g(a_n) > 0$ を得る．したがって,

$1 - a_{k+1} = \dfrac{g(a_n)}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}} > 0$.

以上から, 全ての自然数 n に対して, $0 < a_n < 1$ が示された.

(ii) 続いて, $a_n < a_{n+1}$ を示す.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{2}(1-a_n)} - a_n}{1 + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}} = 2 \cdot \dfrac{a_n - e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}$.

このとき, $h(x) = e^{\frac{1}{2}(1-x)} - x$ とおけば, $0 \leq x < 1$ の範囲で, $h'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(1-x)} - 1 < 0$ かつ, $h(1) = 0$ より, $h(x) > 0$. すなわち, $h(a_n) > 0$ を得る．したがって, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{h(a_n)}{2 + e^{\frac{1}{2}(1-a_k)}} > 0$.

$$
\begin{aligned}
1-a_{n+1}&=\frac{2-(a_n+1)e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}{2+e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}=\frac{1}{2+e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}\cdot\left[2-(a_n+1)\left\{1+\frac{1}{2}(1-a_n)+O\left((1-a_n)^2\right)\right\}\right]\\
&=\frac{1}{2+e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}\cdot\left[\frac{1}{2}(1-a_n)^2+O\left((1-a_n)^2\right)\right]=\frac{1}{2+e^{\frac{1}{2}(1-a_n)}}O\left((1-a_n)^2\right)
\end{aligned}
$$

【３】オイラー・ラグランジュ方程式を計算し, 微分方程式の境界値問題を解けばよい.

(1) $\ddot{x}+x=0$

(2) $x(t)=\cos t$