応用数理　試験

2016年2月9日

学部	学籍番号	氏名	得点

【１】以下の関数の最大・最小を３通りの方法によって求めよ.

$$f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2,\ \ \textbf{s.t.}\ x+2y+3z+4w=1$$

(1) 制約なし非線形最適化 (x を消去して３変数関数とする)

(2) 制約付き非線形最適化 (ラグランジュの未定乗数法)

(3) 動的計画法

(【２】の解答の続き)

【３】以下の最適化問題を考える.

$$\min_{u(t)} \ J = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}[x^2(t) + u^2(t)]dt \ \ \text{s.t.}\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \ \ x(0) = 2, \ x(1) = 1$$

オイラー・ラグランジュ方程式を求めよ.

【 2 】x に関する方程式

$$x = \frac{1}{2}\sin x$$

について, 以下の問いに答よ. ただし, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ である.

(1) 以下の不動点アルゴリズムは, 解に収束することを示せ.

$$a_1 = \frac{\pi}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\sin a_n, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

(2) 以下の勾配法によるアルゴリズムは, 解に収束することを示せ. ただし, ε は小さな正の定数とする.

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n - \varepsilon\left(b_n - \frac{1}{2}\sin b_n\right)$$

(3) 方程式を解くためのニュートン法を差分方程式 $\{c_n\}$ によって記述し, 収束の程度を明らかにせよ. ただし, 初期値 $c_1 = \frac{\pi}{4}$ とする.

(【１】の解答の続き)

解答

【１】(1) まず, x を消去する．このとき, 問題は

$$L(y,\ z,\ w) = (1-2y-3z-4w)^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

となる．このとき, 以下を得る．

$$\begin{cases} L_y(y,\ z,\ w) = 2(1-2y-3z-4w)\cdot(-2) + 2y = 0, \\ L_z(y,\ z,\ w) = 2(1-2y-3z-4w)\cdot(-3) + 2z = 0, \\ L_w(y,\ z,\ w) = 2(1-2y-3z-4w)\cdot(-4) + 2w = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これらを解いて, $x = \dfrac{1}{30}$, $y = \dfrac{2}{30}$, $z = \dfrac{3}{30}$, $w = \dfrac{4}{30}$. このとき, 最小値 $x = \dfrac{1}{30}$ を得る．

(2) ラグランジュの未定乗数法によって解く．以下の関数を定義する．

$$H(x,\ y,\ z,\ w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \lambda(1 - x - 2y - 3z - 4w)$$

このとき, 以下を得る．

$$\begin{cases} H_x(x,\ y,\ z,\ w) = 2x - \lambda = 0, \\ H_y(x,\ y,\ z,\ w) = 2y - 2\lambda = 0, \\ H_z(x,\ y,\ z,\ w) = 2z - 3\lambda = 0, \\ H_w(x,\ y,\ z,\ w) = 2w - 4\lambda = 0, \end{cases}$$

$x = \dfrac{\lambda}{2}$, $y = \dfrac{2\lambda}{2}$, $z = \dfrac{3\lambda}{2}$, $w = \dfrac{4\lambda}{2}$ より, $x + 2y + 3z + 4w = 1$ に代入し, $\lambda = \dfrac{1}{15}$ を得る．以上より, $x = \dfrac{1}{30}$, $y = \dfrac{2}{30}$, $z = \dfrac{3}{30}$, $w = \dfrac{4}{30}$. このとき, 最小値 $x = \dfrac{1}{30}$ を得る．

$$f(x,\ y,\ z) = 2x + 2y + z^2 = 6$$

(3) $x^2 + y^2,\ $ s.t. $x + 2y = 1$ を解く．$x^2 + y^2 = (1-2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 4y + 1 = 5\left(y - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{5}$.

$x^2 + y^2 + y^2,\ $ s.t. $x + 2y + 3z = 1$ を解く．先の結果から, $x^2 + y^2 + z^2 = \left\{\dfrac{1-3z}{5}\right\}^2 + \left\{\dfrac{2}{5}(1-3z)\right\}^2 + z^2 = \dfrac{1}{5}(1-3z)^2 + z^2 = \phi_3(z)$. ここで, $\phi_3'(z) = \dfrac{2}{5}(1-3z)\cdot(-3) + 2z = 0$. これを解いて, $z = \dfrac{3}{14}$. したがって, $x = \dfrac{1}{14}$, $y = \dfrac{2}{14}$ を得る．

最後の工程として,

$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \left\{\dfrac{1}{14}(1-4w)\right\}^2 + \left\{\dfrac{2}{14}(1-4w)\right\}^2 + \left\{\dfrac{3}{14}(1-4w)\right\}^2 + w^2 = \dfrac{1}{14}(1-4w)^2 + w^2 = \phi_4(w)$. ここで, $\phi_4'(w) = \dfrac{2}{14}(1-4w)\cdot(-4) + 2w = 0$. これを解いて, $w = \dfrac{4}{30}$. したがって, $x = \dfrac{1}{30}$, $y = \dfrac{2}{30}$, $z = \dfrac{3}{30}$ を得る．このとき, 最小値 $x = \dfrac{1}{30}$ を得る．

【２】収束解は $x = 0$ である．

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$ とおく．$0 = f(0)$ であるので, $|a_{n+1}| = |f'(c)|\cdot|a_n| \leq \dfrac{1}{2}|a_n|$. これを繰り返し利用すれば,

$0 < |a_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_2| \to 0\ \ (n \to \infty)$. 以上より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $|b_{n+1}| = \left|b_n - \varepsilon\left(b_n - \dfrac{1}{2}\sin b_n\right)\right| = \left|b_n - \varepsilon\left(b_n - \dfrac{1}{2}b_n + O(b_n^3)\right)\right| = |b_n|\cdot\left|1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 + O(b_n^2)\right)\right|$.

このとき, $0 < \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 + O(b_n^2)\right) < 1$ を満足するような ε が取れるので, $\left|1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 + O(b_n^2)\right)\right| = r$, $(0 < r < 1)$ を満足する定数 r が存在する．したがって,

$0 < |b_n| \leq r^{n-1}|b_2| \to 0\ \ (n \to \infty)$. 以上より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(3) $c_{n+1} = c_n - \dfrac{c_n - \frac{1}{2}\sin c_n}{1 - \frac{1}{2}\cos c_n} = \dfrac{-c_n \cos c_n + \sin c_n}{2 - \cos c_n}, \quad c_1 = \dfrac{\pi}{4}$. このとき, マクローリン展開から,

$$c_{n+1} = \frac{-c_n \cos c_n + \sin c_n}{2 - \cos c_n} = \frac{1}{2 - \cos c_n}\left(-c_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} c_n^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} c_n^{2k+1}\right) = O\left(c_n^3\right)$$

【 3 】オイラー・ラグランジュ方程式を計算すればよい. $H = \dfrac{1}{2}[x^2 + (\dot{x} - x)^2]e^{-t}$ とおく. $H_x = [x - (\dot{x} - x)]e^{-t}$, $H_{\dot{x}} = (\dot{x} - x)e^{-t}$ より,

$$H_x - \frac{d}{dt}H_{\dot{x}} = [x - (\dot{x} - x)]e^{-t} - [\ddot{x} - \dot{x} - \dot{x} + x]e^{-t} = -[\ddot{x} - \dot{x} - x]e^{-t} = 0$$

したがって, $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - x(t) = 0$