応用数理　試験
2017 年 2 月 14 日

学部	学籍番号	氏名	得点

【 1 】以下の関数の最大値を 4 通りの方法によって求めよ．ただし, ℓ は正の定数である．

$$f(x,y,z,w) = xyzw, \quad \textbf{s.t.}\ x^2+y^2+z^2+w^2=\ell,\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ w>0$$

(1) 制約なし非線形最適化 (w を消去して 3 変数関数とする)

(2) 制約付き非線形最適化 (ラグランジュの未定乗数法)

(3) 動的計画法

(4) 相加相乗平均 (配点は特別にプラス α)

(【１】の解答の続き)

【２】以下の汎関数を最小にする関数 $(x,\ y) = \Big(f(\theta),\ g(\theta)\Big)$ を求めよ．

$$\min_{(x,y)} J = \min_{(x,y)} \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

【 3 】x に関する方程式

$$x = \frac{1}{2}e^{-x}\sin x$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, $e = 2.7182818\cdots$ である.

(1) 解 $x = \alpha$ を求め, 以下の不動点アルゴリズムは, $x = \alpha$ に収束することを示せ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}e^{-a_n}\sin a_n$$

(2) 以下の勾配法によるアルゴリズムは, $x = \alpha$ に収束することを示せ. ただし, ε は小さな正の定数とする.

$$a_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n - \varepsilon\left(b_n - \frac{1}{2}e^{-b_n}\sin b_n\right)$$

(3) 方程式を解くためのニュートン法を差分方程式 $\{c_n\}$ によって記述し, 2 次収束であることを示せ. ただし, 初期値 $c_1 = 1$ とする.

解答

【１】(1) まず, w を消去する. このとき, 問題は

$$F(x,\ y,\ z) = xyz\sqrt{\ell - x^2 - y^2 - z^2}$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned}
F_x(x,\ y,\ z) &= yz\frac{\ell - 2x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{\ell - x^2 - y^2 - z^2}} = 0\\
F_y(x,\ y,\ z) &= zx\frac{\ell - x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{\ell - x^2 - y^2 - z^2}} = 0\\
F_z(x,\ y,\ z) &= xy\frac{\ell - x^2 - y^2 - 2z^2}{\sqrt{\ell - x^2 - y^2 - z^2}} = 0
\end{aligned}$$

したがって, $2x^2 + y^2 + z^2 = \ell$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = \ell$, $x^2 + y^2 + 2z^2 = \ell$ から全て足して $4(x^2 + y^2 + z^2) = 3\ell$ を得る. すなわち, $x = y = z = (w =)\ \dfrac{\sqrt{\ell}}{2} > 0$ を得る. 以上より,

$$xyz\sqrt{\ell - x^2 - y^2 - z^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\ell}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\ell}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\ell}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\ell} = \frac{1}{16}\ell^2$$

(2) ラグランジュの未定乗数法によって解く. 以下の関数を定義する.

$$L(x,\ y,\ z,\ w) = xyzw + \lambda(\ell - x^2 - y^2 - z^2 - w^2)$$

このとき, 以下を得る.

$$\begin{aligned}
L_x(x,\ y,\ z,\ w) &= yzw - 2\lambda x = 0,\ L_y(x,\ y,\ z,\ w) = xzw - 2\lambda y = 0\\
L_z(x,\ y,\ z,\ w) &= xyw - 2\lambda z = 0,\ L_w(x,\ y,\ z,\ w) = xyz - 2\lambda w = 0
\end{aligned}$$

したがって, ,

$$xyzw = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2 = 2\lambda w^2$$

以上から, $x = y = z = w = \dfrac{\sqrt{\ell}}{2} > 0$ のとき, 最大値 $\dfrac{1}{16}\ell^2$ を得る.

(3) $n = 2$ のとき, $x^2 + y^2 = \ell$ より, $(x,\ y) = (\sqrt{\ell}\cos\theta,\ \sqrt{\ell}\sin\theta)$ とおける.

$$xy = \ell\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\ell\sin 2\theta \leq \frac{1}{2}\ell$$

等号成立は, $x = y = \dfrac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{2}}$ である.

$n = 3$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2 = \ell$ より, $n = 2$ の結果を利用して,

$$xyz \leq \frac{1}{2}(\ell - z^2)z = g_3(z)$$

このとき, $2g_3'(z) = \ell - 3z^2 = 0 \quad \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{3}}$ のとき, すなわち, $x = y = z = \dfrac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{\ell\sqrt{\ell}}{3\sqrt{3}}$ をとる.

$n = 4$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \ell$ より, $n = 3$ の結果を利用して,

$$xyzw \leq \frac{(\ell - w^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}w = g_4(w)$$

このとき, $3\sqrt{3}g_4'(w) = -3w^2\sqrt{\ell - w^2} + (\ell - w^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \Rightarrow w = \dfrac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{4}}$ のとき, すなわち, $x = y = z = w = \dfrac{\sqrt{\ell}}{2} > 0$ のとき最大値 $\dfrac{1}{16}\ell^2$ をとる.

(4) 相加相乗平均より,

$$\ell = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 4\sqrt[4]{x^2y^2z^2w} = 4\sqrt{xyzw}$$

したがって, $xyzw \leq \dfrac{\ell^2}{16}$. なお, 等号成立は, $x = y = z = w = \dfrac{\sqrt{\ell}}{2} > 0$ のとき.

【２】

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{y'}{\sqrt{y}\times\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$$

ただし, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ である.

このとき, C が定数であることに注意すれば, 以下の微分方程式を得る.

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{2C}=2A\quad\Leftrightarrow\quad y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2A-y}{y}}$$

ここで, $y=A-A\cos t$ として, 変数 t を導入すれば, $dy=A\sin t dt=2A\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}dt$ かつ

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{A+A\cos t}{A-A\cos t}}=\sqrt{\frac{1+\cos t}{1-\cos t}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

であるので, これらより dy を消去すれば,

$$\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dx=2A\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{dt}=2A\sin^2\frac{t}{2}=A(1-\cos t)$$

さらに積分を実行し, $t=0$ で $x(0)=0$ に注意すれば,

$$\begin{cases}x(t)=A(t-\sin t)\\ y(t)=A(1-\cos t)\end{cases}$$

であるサイクロイドを得ることができた.

【３】収束解は $x=0$ である.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x$ とおく. $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}(-\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$, したがって, $0\le x$ の範囲で, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$.

$f(0)=0$ であるので, $|a_{n+1}-0|=|f'(c)|\cdot|a_n-0|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|a_n|$.

これを繰り返し利用すれば,

$0<|a_n|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}|a_{n-1}|=\cdots=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}|a_1|\to 0\ \ (n\to\infty)$.

以上より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) $|b_{n+1}|=\left|b_n-\varepsilon\left(b_n-\dfrac{1}{2}e^{-b_n}\sin b_n\right)\right|=\left|b_n-\varepsilon\left(\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}b_n^2+O(b_n^3)\right)\right|=|b_n|\cdot\left|1-\dfrac{\varepsilon}{2}\left(1+O(b_n)\right)\right|$.

このとき, $0<1-\dfrac{\varepsilon}{2}\left(1+O(b_n)\right)<1$ を満足するような $\varepsilon>0$ が取れるので, $\left|1-\dfrac{\varepsilon}{2}\left(1+O(b_n)\right)\right|=r$, $(0<r<1)$ を満足する定数 r が存在する. 以上より,

$0<|b_n|\le r^{n-1}|b_1|=r^{n-1}\to 0\ \ (n\to\infty)$.

以上より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

(3) $c_{n+1}=c_n-\dfrac{c_n-\frac{1}{2}e^{-c_n}\sin c_n}{1+\frac{1}{2}e^{-c_n}(\sin c_n-\cos c_n)}=\dfrac{c_n\sin c_n-c_n\cos c_n+\sin c_n}{2e^{c_n}+\sin c_n-\cos c_n},\quad c_1=1.$

$$c_n\sin c_n-c_n\cos c_n+\sin c_n=c_n\left(c_n-\frac{1}{6}c_n^3+O(c_n^5)\right)-c_n+\frac{1}{2}c_n^2+O(c_n^4)+c_n-\frac{1}{6}c_n^3+O(c_n^5)=\frac{3}{2}c_n^2+O(c_n^3)$$