応用数理　試験
2018 年 11 月 27 日

学部	学籍番号	氏名	得点

【 1 】$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $w \geq 0$ かつ $x^2 + y^2 + z^2 + w = 15$ の条件の下で, $xyzw$ の最大値を以下の方法によって求めよ.

(1) 制約なし非線形最適化 (w を消去して 3 変数関数とする)

(2) 制約付き非線形最適化 (ラグランジュの未定乗数法)

(3) w を消去して 3 変数関数とし, 極座標 $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ の利用.

(4) 相加相乗平均

(【１】の解答の続き)

【 2 】曲線 C ： $y = f(x),\ 0 \leq x \leq 1$ を x 軸の周りに回転してできる曲面の表面積の最小を与える曲線を求めたい.

$$\min_{(x,y)} J = \min_{(x,y)} \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$F(y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial F(y,y')}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = \boxed{}$ が必要である.

実際に左辺を計算すれば, $\dfrac{\partial F(y,y')}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F(y,y')}{\partial y'} = \dfrac{\boxed{}}{\{1+y'^2\}^{\frac{3}{2}}}$.

(2) 一方, $\dfrac{d}{dx}\left(F(y,y') - y'\dfrac{\partial F(y,y')}{\partial y'}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \dfrac{\boxed{}}{\{1+y'^2\}^{\frac{3}{2}}}$.

(3) (1), (2) より積分定数を E として, $\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{1+y'^2}} = E$ が成り立つ.

(4) (3) を以下のように解けば曲線 C が $\boxed{}$ であることがわかる.

【 3 】x に関する方程式 $x = \cos^2 \dfrac{x}{2}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 方程式の実数解は 1 つ存在することを示せ. 以後, その解を $x = \alpha = 0.83543...$ とおく.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1,\ 2,\ ...$ によって定める. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ.

(3) 方程式を解くためのニュートン法を差分方程式 $\{b_n\}$ によって記述し, 2 次収束であることを示せ. ただし, 初期値 $b_1 = 1$ とする.
