システム最適化　試験: 担当 向谷　博明

※途中の計算式がないものは無効　**2019 年 11 月 27 日**

座席番号	学部	学籍番号	氏名	得点

【 1 】 $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$ の極小値を求めよ. ただし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

【 2 】【 1 】の $A, \boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$ の条件の下 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ の極値を求めよ.

【 3 】 $(x-2)^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 4$ の条件の下で, $x + y - z$ の最小値を求めよ.

【 4 】 $f(x, y, z)$ に関する最小化問題を解け.

$$f(x, y, z) = x\log x + y\log y + z\log z, \quad \textbf{s.t.}\ x + y + z = 1$$

【 5 】 x に関する方程式 $x = f(x) = e^{\frac{1-x}{4}}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 方程式の実数解は 1 つ存在することを示せ. また, その解を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1,\ 2,\ ...$ によって定める. $a_n > 0$ を示せ (加点). さらに, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ.

(3) 方程式を解くためのニュートン法を差分方程式 $\{b_n\}$ によって記述し, 2 次収束であることを示せ.

(4) 初期値の設定方法について, 注意点について述べよ (加点).

【 6 】以下の変分問題を考える.

$$\min_{(x,y)} J = \min_{(x,y)} \int_0^1 F(y, y')dx = \min_{(x,y)} \int_0^1 y^2\left(1 + y'^2\right)dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

(1) オイラー・ラグランジュ方程式 $\dfrac{\partial F(y, y')}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F(y, y')}{\partial y'}\right) = 0$ を計算せよ.

(2) 積分定数を E として, $\left(1 - y'^2\right)y^2 = E$ が成り立つことを示せ.

(3) 曲線が双曲線であることを示せ.
