微分積分学 I　期末試験:　担当 向谷　博明

2017 年 8 月 4 日

学部	学籍番号	氏名

【１】以下の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{\boxed{6}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\log \boxed{2}}{\boxed{3}} + \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{9}}\pi$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} - \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3\ 6}}\right)\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin x dx = \boxed{0}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin 2x} = \boxed{1}$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{-2x-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{4}}$

(7) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\sqrt{x^2-1}dx = \frac{\log(\boxed{2} + \sqrt{\boxed{3}})}{\boxed{2}}$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \sqrt{\boxed{2}} - \log(\boxed{1} + \sqrt{\boxed{2}})$

(9) $\displaystyle\int_0^1 x^3(1-x)^3dx = \frac{1}{\boxed{1\ 4\ 0}}$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{8}}$

【 3 】

(1) $I = \int e^{-x} \sin x dx,\ J = \int e^{-x} \cos x dx$ とおくとき, $I - J = -e^{-x} \sin x,\ I + J = -e^{-x} \cos x$ を示せ.

(2) $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ とおくとき, $I_{n+1} = e^{-\pi} I_n$ であることを置換積分によって示せ.

(3) 曲線 $y = e^{-x} \sin x$, $0 \leq x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ.

$$S = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}$$

【 2 】

(1)　$x = \tan\theta$ とおくとき, $\dfrac{1}{x^2+1} = \cos^2\theta,\ dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ を示せ.

(2)　広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^6}$$

が収束することを示し, その値を計算せよ.

$I = \dfrac{63}{512}\pi$

微分積分学 I　期末試験: 担当 向谷　博明

2017 年 8 月 4 日

学部	学籍番号	氏名

【１】以下の定積分を計算せよ．

(1) $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{\boxed{}}$$

(2) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \frac{\log\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}\pi$$

(3) $$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}} - \frac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}\right)\pi$$

(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin x dx = \boxed{}$$

(5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin 2x} = \boxed{}$$

(6) $$\int_{-1}^0 \sqrt{-2x-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{}}$$

(7) $$\int_1^2 (x-1)\sqrt{x^2-1}dx = \frac{\log(\boxed{}+\sqrt{\boxed{}})}{\boxed{}}$$

(8) $$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \sqrt{\boxed{}} - \log(\boxed{}+\sqrt{\boxed{}})$$

(9) $$\int_0^1 x^3(1-x)^3dx = \frac{1}{\boxed{}}$$

(10) $$\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{}}$$

【 3 】次の問いに答えよ.

(1) $I = \int e^{-x} \sin x dx,\ J = \int e^{-x} \cos x dx$ とおくとき, $I - J = -e^{-x} \sin x,\ I + J = -e^{-x} \cos x$ を示せ.

(2) $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ とおくとき, $I_{n+1} = e^{-\pi} I_n$ であることを置換積分によって示せ.

(3) 曲線 $y = e^{-x} \sin x$, $0 \leq x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ.

【 2 】次の問いに答えよ.

(1) $x = \tan\theta$ とおくとき, $\dfrac{1}{x^2+1} = \cos^2\theta$, $\dfrac{dx}{x^2+1} = d\theta$ を示せ.

(2) 広義積分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^6}$$

が収束する (積分値が有限である) ことを示し, その値を計算せよ.