微分積分学 II　試験: 担当 向谷　博明

2018 年 11 月 27 日

学部	学籍番号	氏名	合計点

【１】以下の重積分を計算せよ．答案には必要最低限の式のみ示せ．

(1) $I_1 = \iint_D \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{y^2+1} dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \right\}$

---

(2) $I_2 = \iint_D \dfrac{y}{x^2+1} dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \mid x^2 \leq y \leq x \right\}$

---

(3) $I_3 = \iint_D (2x^2 - 3xy - 2y^2) e^{4x^2+4xy+y^2} dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq 2x+y \leq 1,\ 0 \leq x-2y \leq 1 \right\}$

---

(4) $I_4 = \iint_D (x^2+xy+y^2) dxdy, \quad D = \left\{ (x,y) \mid x^2+y^2 \leq x \right\}$

---

(5) $I_5 = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dxdy$

【 4 】座標空間内で, 連立不等式

$$x^2+y^2 \leq 1,\ z+2x^2-x^4 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

の表す領域の体積を求めよ. (2016 大阪市立大学 [2])

【 5 】a, b, c は正の定数とする. 実数 x, y, z に対して $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$ で表される領域 V の体積を求めたい.

(1) $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$ とおくとき, ヤコビアン $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 以下の重積分を計算せよ.

$$I=\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

(3) 領域 V の体積を求めよ.

【 2 】以下の問いに答よ.

(1) $x = r^3\cos^3\theta,\ y = r^3\sin^3\theta$ とおくとき, ヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 以下の重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D \left(1 - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

【３】以下の広義積分は収束するか．収束するならその値を求め，収束しないのであれば，その理由を述べよ．計算には，ヒントを用いよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{xy}}{\left(1+(x+y)^2\right)^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x,y)\ |x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$, ヒント：$u = x - y$, $v = x + y$ を考えよ．

(2) $I_2 = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}} (x+y)^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$, ヒント：極座標を考えよ．

積分学　公式集

(1) $\displaystyle \int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C & (\alpha \neq -1) \\ \log|x|+C & (\alpha = -1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{1}{\log a}a^x + C$

(3) $\displaystyle \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$

(4) $\displaystyle \int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \int \mathrm{cosec}^2 x dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotan} x + C = -\frac{1}{\tan x} + C$

(5) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a>0$

(6) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, -\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + C, \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arcstan}\frac{x}{a} + C,\ a>0$

(7) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

(8) $\displaystyle \int \log x dx = x\log x - x + C$

(9) $\displaystyle \int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき, $\displaystyle \int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C$

(10) $\alpha \neq -1$ であるとき, $\displaystyle \int f'(x)[f(x)]^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + C$

(11) $\displaystyle \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

(12) $\displaystyle \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C,\ a>0$

(13) $\displaystyle \int \sqrt{x^2+A}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right) + C$

(13) $\displaystyle \int \frac{dx}{\sin x}dx = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(14) $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

(15) $\displaystyle \iint_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|drd\theta$

(16)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3} & (n\ \text{は奇数}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\ \text{は偶数}) \end{cases}$$

(17) m, n を 0 以上の整数. $p>0,\ q>0,\ s>0$.

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\ \Gamma(m) = (m-1)!$$

$$J(m,\ n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!\cdot n!}{(m+n+1)!}$$