微分積分学 I　中間試験 解答:　担当 向谷　博明

2019 年 7 月 30 日

「計 11 点」【 1 】以下のマクローリン展開を x^5 次の項までを o 関数を利用して記述せよ.

「1 点」(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$

「1 点」(2) $\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + o(x^6)$

「1 点」(3) $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$

「4 点」(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 + \dfrac{63}{256}x^5 + o(x^5)$

「4 点」(5) $e^{-x}\sin x = x - x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{30}x^5 + o(x^5)$

「計 15 点」【 2 】以下の極限を求めよ. ただし, n は与えられた自然数であると仮定する.

「1 点」(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$

「1 点」(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^n \log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-n\dfrac{1}{x^{n+1}}} = -\frac{1}{n}\lim_{x\to+0} x^n = 0$

「5 点」(3) log をとる.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}\right)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\log(e^x-e^{-x})-\log x-\log 2}{x} = \lim_{x\to+0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+0}\frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x(e^x-e^{-x})} = \lim_{x\to+0}\frac{e^x+e^{-x}+x(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})}{e^x-e^{-x}+x(e^x+e^{-x})} = \lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{-x}}{\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}+e^x+e^{-x}} = 0$$

より, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

「3 点」(4) log をとる. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+\sqrt{x}+x)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1}{1+\sqrt{x}+x} = +\infty$ より, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(1+\sqrt{x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = \infty$

あるいは, $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおく. $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{t^2} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^t\right)^t = \infty$

「5 点」(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} n\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} n\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = n$

「計 18 点」【 3 】$f(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ とおく.

「1 点」× 3(1) $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $f''(x) = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f^{(3)}(x) = \dfrac{2x^2-1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ である.

「3 点」(2) $f''(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ より, $(x^2+1)f''(x)+xf'(x) = 0$ が成立する. ここで, ライプニッツの公式より,

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big((x^2+1)f''(x)\Big) = (x^2+1)f^{(n+2)}(x) + 2nxf^{(n+1)}(x) + n(n-1)f^{(n)}(x)$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(xf'(x)\Big) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$$

が成立するので, 辺々足すことにより

$$(x^2+1)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$n \geq 1$ で与式が成立する.

【 別解 】数学的帰納法を適用する. $n = 1$ のとき,

$$(x^2+1)f^{(3)}(x) + 3xf''(x) + f'(x) = (x^2+1)\times\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} - 3x\times\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-1-3x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

よって成立．$n=k\geq 2$ で，$(x^2+1)f^{(k+2)}(x)+(2k+1)xf^{(k+1)}(x)+k^2f^{(k)}(x)=0$ が成立すると仮定すれば，両辺微分して，

$$\begin{aligned} & 2xf^{(k+2)}(x)+(x^2+1)f^{(k+3)}(x)+(2k+1)f^{(k+1)}(x)+(2k+1)xf^{(k+2)}(x)+k^2f^{(k+1)}(x) \\ = \ & (x^2+1)f^{(k+3)}(x)+(2k+3)xf^{(k+2)}(x)+(k+1)^2f^{(k+1)}(x)=0 \end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも成立する．

「1 点」× 3(3) (1) で $x=0$ として，$f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f''(0)=-1$.

「3 点」× 2(4) (2) で $x=0$ として，$f_{n+2}(0)=-n^2f^{(n)}(0)$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$ が成立する．したがって，

$$f(0)=f''(0)=f^{(4)}(0)=0 \ f'(0)=1, \ f'''(0)=-f'(0)=-1, \ f^{(5)}(0)=-3^2f^{(3)}(0)=9$$

したがって，$f(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{40}x^5+o(x^6)$

一方，$|x|<1$ の範囲で，$f'(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2+o(x^5)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^5)$ したがって，0 から x まで項別積分を行って同じ結果を得る．

「3 点」(5) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{(\arcsin x)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{(\arcsin x)^5}\cdot\frac{f(x)-\sin x}{x^5}=\lim_{(x,\theta)\to(0,0)}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^5\cdot\frac{\frac{1}{15}x^5+o(x^6)}{x^5}=\frac{1}{15}$

「計 16 点」【 4 】

「1 点」× 4(1) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}-\dfrac{2}{(1-x)^3}$. 以上より，

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}-\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{(1-x)^n}$ $(n\geq 2)$. したがって，$x=0$ として，$f^{(n+1)}(0)=\Big((-1)^n-1\Big)n!$

「4 点」(2) $\displaystyle f(x)=\sum_{k=0}^{6}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=-x^2-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7).$

【 別解 】$|x|<1$ の範囲で，$\dfrac{-2x}{1-x^2}=-2x-2x^3-2x^5+o(x^6)$ なので，項別積分を行い，$\log(1-x^2)=-x^2-\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^6+o(x^7)$ を得る．

「4 点」× 2(3) (2) から，マクローリン展開の手法を用いれば，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2+\frac{1}{2}x^4}{x^6}=\lim_{x\to +0}\frac{-\frac{1}{3}x^6+o(x^6)}{x^6}=-\frac{1}{3}$$

一方，ロピタルの定理を用いれば，

$$(\text{与式})=\lim_{x\to +0}\frac{f'(x)+2x+2x^3}{6x^5}=\cdots=\lim_{x\to +0}\frac{f^{(5)}(x)}{720x}=\lim_{x\to +0}\frac{f^{(6)}(x)}{720}=-\frac{1}{3}$$

「計 20 点」【 5 】

「5 点」× 2(1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y\cos(xy)+2x}{x\cos(xy)+2y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8(x^2+y^2)-4(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)^3+4(x^2-y^2)^2(x^2+y^2-1)+2xy\cos(xy)\Big(3-2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2\Big)}{\Big(x\cos(xy)+2y\Big)^3}$$

「5 点」× 2(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\tan t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{6\cos^3 t\sin 2t}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1-\cos 4t}{(\sin t+\sin 3t)^3}$