微分積分学 I　期末試験　解答:　担当 向谷　博明

2019 年 8 月 1 日

以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{\boxed{8}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{6}}\pi - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{\boxed{8}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos x dx = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{\pi}{\boxed{3}\sqrt{\boxed{3}}}$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3+1)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{\boxed{2}}$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin^5 x dx = \frac{1}{\boxed{6\ 0}}$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}dx = \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} - \frac{\log \boxed{3}}{\boxed{4}}$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{\sqrt{\boxed{2}}} - \frac{1}{\boxed{2}} \log\left(\boxed{1} + \sqrt{\boxed{2}}\right)$

(10) $\displaystyle\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\boxed{5}}{\boxed{2\ 5\ 6}}\pi$

【２】定積分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ を求めたい.

(1) $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくとき, x を t を用いて表せ. さらに, dx を計算せよ.

$x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1},\ dx=-\dfrac{4t}{(t^2+1)^2}dt$

(2) I を計算せよ.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{t^2+1}+2}\cdot t\cdot\left\{-\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt\right\} = 4\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+3)}dt = 2\int_0^1\left(-\frac{1}{t^2+1}+\frac{3}{t^2+3}\right)dt \\ &= 2\left[-\tan^{-1}t+\frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\pi \end{aligned}$$

【３】以下の広義積分が存在することを示し, その値を計算せよ.

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}dx$$

$0\leq x\leq 1$ の範囲では, $\sqrt{1-x}\leq 1$ が成立. したがって,

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx\leq\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1=2$$

となるので, 講義積分は存在する. 次に, $t=\sqrt{x}$ とおけば, $x=t^2$, $dx=2tdt$ なので,

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\cdot 2tdt=2\int_0^2\sqrt{1-t^2}dt=\frac{\pi}{2}$$

【４】(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^x}{e^{3x}+1}dx$ が収束することを示し, I の値を計算せよ.

$$\int_0^\infty\frac{e^x}{e^{3x}+1}dx\leq\int_0^\infty\frac{e^x}{e^{3x}}dx=\int_0^\infty e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}$$

したがって, 講義積分は存在する.

続いて, $t=e^x$ とおけば, $dt=e^xdx$, 積分区間が $\begin{array}{c|c} x & 0\to\infty \\ \hline t & 1\to\infty \end{array}$ になる. 次に,

$$\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{t-2}{t^2-t+1}$$

が成立するので, 以上より,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty\frac{e^x}{e^{3x}+1}dx &= \int_1^\infty\frac{dt}{t^3+1}=\frac{1}{3}\int_1^\infty\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{3}\int_1^\infty\frac{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}}{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt \\ &= \left[\frac{1}{6}\log\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_1^\infty=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{\log 2}{3} \end{aligned}$$

(2) 以下の広義積分が存在することが (1) と同様に示される. 存在することを前提として, J の値を計算せよ.

$$J=\int_0^\infty\frac{dx}{e^{3x}+1}=\int_0^\infty\frac{e^{-3x}}{e^{-3x}+1}dx=-\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{(e^{-3x}+1)'}{e^{-3x}+1}dx=\left[-\frac{1}{3}\log(e^{-3x}+1)\right]_0^\infty=\frac{\log 2}{3}$$

(注意) 与えられた正の定数 $p>0$ に対して,

$$J=\int_0^\infty\frac{dx}{e^{px}+1}=-\frac{1}{p}\int_0^\infty\frac{(e^{-px}+1)'}{e^{-px}+1}=\left[-\frac{1}{p}\log(e^{-px}+1)\right]_0^\infty=\frac{\log 2}{p}$$