前回
(第10回)

§12 ストークスの定理

今回
(第11回)

§13 鎖複体とホモロジー
§14 特異ホモロジー

講義全体の流れ

Part I : 微分形式

Part II : 多様体上のリーマン積分　ここまで終わった.

Part III : ド・ラーム理論

§13 鎖複体とホモロジー

§14 特異ホモロジー

§15 ド・ラームコホモロジー

§16 ド・ラームの定理

§17 Lie代数のコホモロジー　(最終回)

ド・ラーム理論のモチベーションと流れ

モチベーション：多様体 M の形状（トポロジー）を知りたい

① M の特異ホモロジー $H_*(M;\mathbb{R})$ を計算したい

（M の形状を反映した不変量）

② M の C^∞-特異ホモロジー $H_*^\infty(M;\mathbb{R})$ は $H_*(M;\mathbb{R})$ と同型なので

こちらが計算できればよい

③ M の de Rham コホモロジー $H^*(M;\mathbb{R})$ は

$H_*^\infty(M;\mathbb{R})$ の双対空間とみなせる（de Rham の定理）

ので これを計算できればよい

④ $H^*(M;\mathbb{R})$ はいろんな手法で計算にアプローチできる．

§13 鎖複体とホモロジー

ホモロジー代数の一般論を必要最小限だけ紹介する.

内容

- 鎖複体の定義
- ホモロジーの定義
- 鎖準同型と誘導準同型
- 鎖準同型の間のホモトピー

§13.1 鎖複体とホモロジー

A : 可換環 （$A = \mathbb{R}$ の場合が本講義のメインターゲット）
とする.

Def 13.1

$C = (\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ が鎖複体 (chain complex)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, C_k は A-加群 (A-module)

(2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ は A-加群準同型 (A-module homomorphism)

(3) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\partial_k \circ \partial_{k+1} : C_{k+1} \to C_{k-1}$ はゼロ写像

$C = (\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\partial_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ を鎖複体とする.

$\to C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \to \cdots$

Observation $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}\partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_k \subset C_k$

部分A-加群

Def 13.2 各 $k \in \mathbb{Z}$ について A-加群

$$H_k(C) := \operatorname{Ker}\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1}$$

を C の k 次ホモロジーとよぶ
(k-th homology)

§13.2 鎖準同型　A：可換環とする.

$$C^1 := (\{C^1_k\}, \{\partial^1_k\})$$
$$C^2 := (\{C^2_k\}, \{\partial^2_k\})$$
を共に鎖複体とする.

Def 13.3

$F = \{F_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が C^1 から C^2 への鎖準同型 (chain homomorphism)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $F_k : C^1_k \to C^2_k$: A-mod. hom.

(2) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\partial^2_k \circ F_k = F_{k-1} \circ \partial^1_k$.

$$\begin{tikzcd} C^1_k \arrow[r, "F_k"] \arrow[d, "\partial^1_k"'] \arrow[dr, phantom, "a"] & C^2_k \arrow[d, "\partial^2_k"] \\ C^1_{k-1} \arrow[r, "F_{k-1}"] & C^2_{k-1} \end{tikzcd}$$

$F = \{F_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を C^1 から C^2 への鎖準同型とする.

Def 13.4 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$(F_*)_k : H_k(C^1) \to H_k(C^2)$$
$$[z] \mapsto [F_k(z)]$$

$\left(\begin{array}{l} z \in \mathrm{Ker}\, \partial^1_k \text{ について} \\ [z] := z + \mathrm{Im}\, \partial^1_{k+1} \in H_k(C^1) \\ \text{とおいた} \end{array} \right)$

を F の k 次の誘導準同型とよぶ

Theorem 13.5 $(F_*)_k : H_k(C^1) \to H_k(C^2)$ は well-defined で A-mod hom となる.

◎ 鎖準同型の間のホモトピー

C^1, C^2 を鎖複体，

F, G を共に C^1 から C^2 への鎖準同型とする．

Def 13.6 F と G がホモトープ（homotope）であるとは，

以下を満たす $D = \{D_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が存在すること

◎ 各 $k \in \mathbb{Z}$ について $D_k : C^1_k \to C^2_{k+1}$ は A-mod hom.

また $\partial^2_{k+1} \circ D_k + D_{k-1} \circ \partial^1_k = F_k - G_k$

$$
\begin{tikzcd}
C^1_{k+1} \arrow[d] & C^2_{k+1} \arrow[d, "\partial^2_{k+1}"] \\
C^1_k \arrow[d, "\partial^1_k"'] \arrow[r, "F_k - G_k"] & C^2_k \arrow[d] \\
C^1_{k-1} \arrow[ur, "D_k"] & C^2_{k-1} \arrow[ur, "D_{k-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Theorem 13.7 F と G がホモトピーのとき

$$(F_*)_k = (G_*)_k : H_k(C^1) \to H_k(C^2) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

(証明) $\forall z \in \operatorname{Ker} \partial^1_k$ をとる.

示 $[F_k(z)] = [G_k(z)]$ i.e. $F_k(z) - G_k(z) \in \operatorname{Im} \partial^2_{k+1}$

$$\begin{aligned} F_k(z) - G_k(z) &= (F_k - G_k)(z) \\ &= (\partial^2_{k+1} \circ D_k + D_{k-1} \circ \partial^1_k)(z) \\ &= \partial^2_{k+1}(D_k(z)) + D_{k-1}(\underbrace{\partial^1_k(z)}_{=0}) \quad (\because z \in \operatorname{Ker} \partial) \\ &\in \operatorname{Im} \partial^2_{k+1} \end{aligned}$$

∎

§14. 特異ホモロジー

M : m-dim'l C^∞-mfd with corners とする.

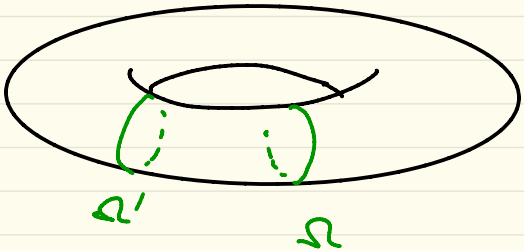
一応付けておくが
$\partial M = \emptyset$ の場合が
メインターゲット

$\{ M$ の部分多様体 Ω であって $\partial\Omega = \emptyset \}$ / M内での変形

ここには"Mの形"についての情報がつまっている.

<u>ゴール</u> "C^∞-特異ホモロジー"として上の集合を扱いやすく定式化する.

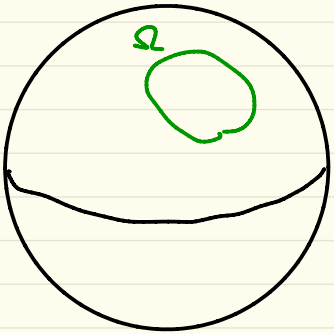
Ex:



M = トーラス $= S^1 \times S^1$

$\Omega \cong \Omega' \not\cong \{1点\}$

Ex:



M = 球面 $= S^2$

$\Omega \cong \{1点\}$

$\left\{ M \text{ 内の 1 次元部分多様体 } \Omega \text{ で } \partial\Omega = \emptyset \right\} / \cong \; = \{\{1点\}\}$

内容：

- 標準単体
- 特異ホモロジーの定義
- 特異ホモロジーのホモトピー不変性
- C^∞-特異ホモロジーの定義
- C^∞-特異ホモロジーと特異ホモロジーの同型定理

§14.1 標準単体

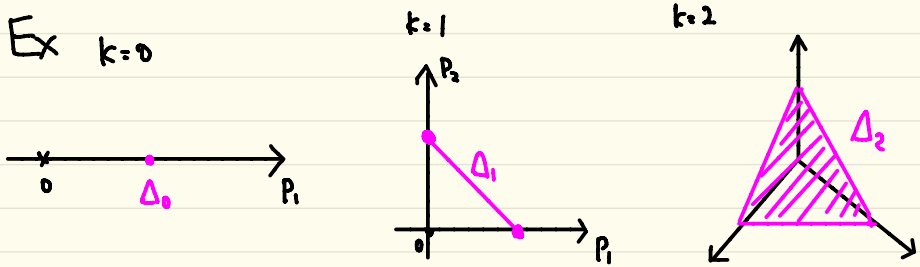
$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

Def 14.1

$$\Delta_k := \{ p = (p_1, \cdots, p_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid p_l \geq 0 \ (\forall l) \wedge \sum p_l = 1 \} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

を標準 k-単体 (standard k-simplex) と呼ぶ.

Ex



Prop 14.2: 以下の意味で Δ_k は k-dim'l C^∞-mfd with corners

Δ_k の C_k-局所座標 (cf. Def 7.2) として

$(U^1, x^1), \cdots, (U^{k+1}, x^{k+1})$ を

各 $l = 1, \cdots, k+1$ について

$$U^l := \{ p \in \Delta_k \mid p_l \gneqq 0 \}$$

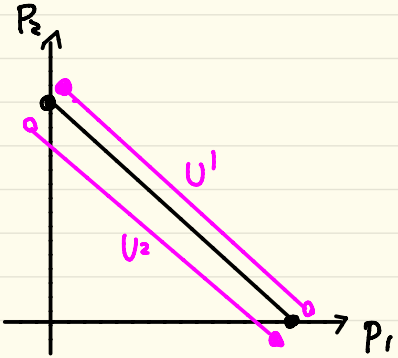
$$x^l : U^l \to C_k, \quad p \longmapsto (p_1, \underset{\substack{\wedge \\ p_l}}{\cdots}, p_{k+1})$$ と定める.

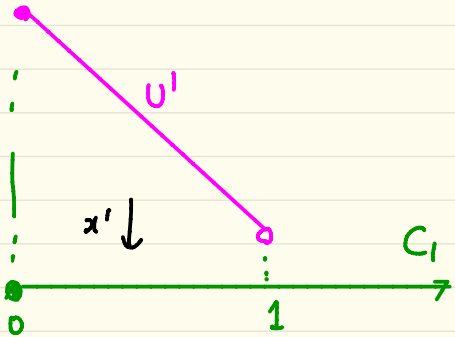
このとき $\{(U^l, x^l)\}_{l=1,\cdots,k+1}$ は Δ_k の C_k-atlas となる.

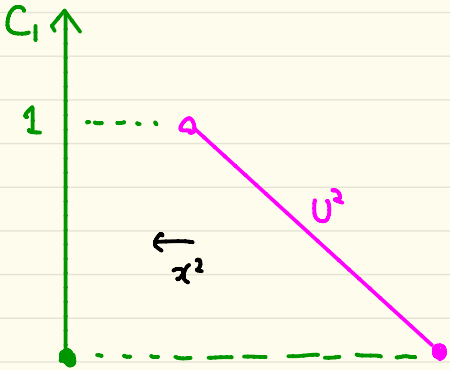
$\{(U^l, x^l)\}_{l=1,\cdots,k+1}$ を含む極大 C_k-atlas (一意に決まる cf. Prop 7.5) を S_{Δ_k} とおく.

これにより $\Delta_k = (\Delta_k, S_{\Delta_k})$ を k-dim'l C^∞-mfd with corners とみなす.

Ex :







⑧ Δ_k の向き

Δ_k の向きは以下の2種類ある.

Def 14.3

$\sigma_+^k, \sigma_-^k : \{(U_l, x^l)\}_{l=1,\cdots,k+1} \to \{1,-1\}$ をそれぞれ

$$\sigma_+^k(U_l, x^l) := (-1)^l$$
$$\sigma_-^k(U_l, x^l) := (-1)^{l+1}$$

$(l=1,\cdots,k+1)$ として定める.

このとき σ_+, σ_- は Thm 9.5 の意味で Δ_k 上の向きを定める.

⑧ Δ_k の境界

$k \geq 1$ とする.

各 $l = 1, \cdots, k+1$ について

$$\eta_l : \Delta_{k-1} \to \Delta_k, \quad q = (q_1, \cdots, q_k) \mapsto (q_1, \cdots, q_{l-1}, 0, q_l, \cdots, q_k)$$

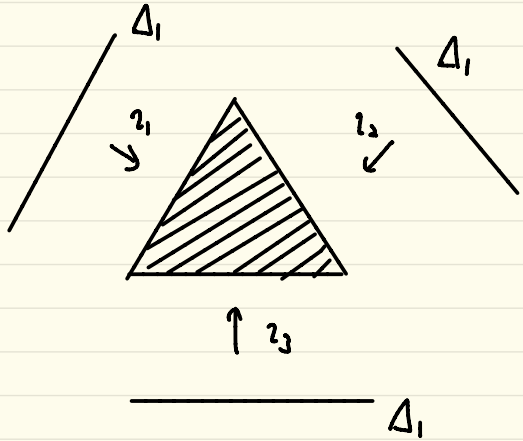
とおく.

Prop 14.4

$$(\underbrace{\Delta_{k-1} \sqcup \Delta_{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \Delta_{k-1}}_{k\text{コ}}, \ \eta_1 \sqcup \eta_2 \sqcup \cdots \sqcup \eta_{k+1})$$

Δ_k の boundary manifold (Def 12.7 の意味で)

Ex

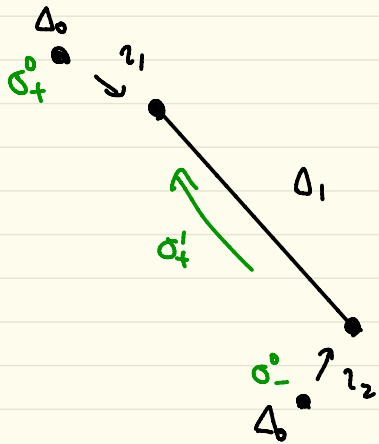


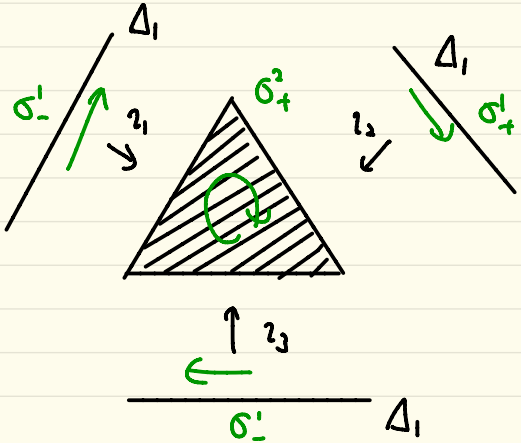
Prop 14.5 Δ_k 上の向き σ_+^k [resp. σ_-^k] の誘導する

boundary $(\Delta_{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \Delta_{k-1},\ \iota_1 \sqcup \cdots \sqcup \iota_{k+1})$ 上の向きは

$$\sigma_-^{k-1} \sqcup \sigma_+^{k-1} \sqcup \sigma_-^{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \sigma_{(-1)^{k+1}}^{k-1}$$ となる.

$$\left[\text{resp. } \sigma_+^{k-1} \sqcup \sigma_-^{k-1} \sqcup \sigma_+^{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \sigma_{-(-1)^{k+1}}^{k-1}\right]$$





§14.2 : 特異ホモロジー

X : 位相空間 とする.

Def 14.6 各 $k = 0, 1, \cdots, m$ について

continuous の "C"

$C(\Delta_k, X) := \{ \tau : \Delta_k \to X \mid \tau$ の連続$\}$ とおく

A : 可換環（後で $A = \mathbb{R}$ に固定する）とする.

<u>Def 14.6</u> 各 $k = 0, 1, \cdots, m$ について A 加群 $C_k(X; A)$ を

"chain" の C

$$C_k(X; A) :=$$

$C(\Delta_k, X) \times \{\sigma_+^k, \sigma_-^k\}$ の生成する free A-加群

$$\Big/ \left\langle \left\{ (\tau, \sigma_+^k) + (\tau, \sigma_-^k) \;\middle|\; \tau \in C(\Delta_k, X) \right\} \right\rangle$$

部分 A 加群を生成

つまり

$C_k(X;A)$ の元 c は

$$\underbrace{\sum_i a_i(\tau_i, \sigma_+^k) + \sum_j b_j(\tau_j', \sigma_-^k)}_{\text{形式的一次結合}} \quad \text{の形}$$

有限和　　有限和

$(\tau_i, \tau_j' \in C(\Delta_k, X))$

ただし 各 $\tau \in C(\Delta_k, X)$ について

$$(-1)(\tau, \sigma_+^k) = (\tau, \sigma_-^k) \quad \text{とみなす.}$$

気持ち：本当は "$\bigcup_{\substack{(\Omega,\sigma):\\ k\text{-dim'l mfld. w.c.}\\ +\text{向き}}} C(\Omega, X)$" を考えたいが、

定義や扱いが難しい。

そのかわりに $C_k(X;\mathbb{Z})$ や $C_k(X;\mathbb{R})$ などを考える。

Ex：$\Omega =$  $\to X$ を考える代わりに、

( $\to X$) + ( $\to X$) と考えて代用する。

形式的に $k<0$ のとき A 加群として

$$C_k(X;A) := \{0\}$$ とおいておく.

"境界作用素"を以下で定義する.

Def 14.7 $k \geq 1$ とする. このとき

$$\partial = \partial_k : C_k(X;A) \longrightarrow C_{k-1}(X;A) \text{ を}$$

$$\partial\left(\sum_i a_i(\tau_i, \sigma_+^k) + \sum_j b_j(\tau_j', \sigma_-^k)\right)$$

σ_+^k が $(\Delta_{k-1}, \iota_\ell)$ に誘導する向き

$$:= \sum_i a_i \sum_{\ell=1}^{k+1} (\tau_i \circ \iota_\ell, \sigma_{(-1)^\ell}^{k-1}) + \sum_j b_j \sum_{\ell=1}^{k+1} (\tau_j' \circ \iota_\ell, \sigma_{(-1)^{\ell+1}}^{k-1})$$

$$= \sum_i \sum_{\ell=1}^{k+1} a_i (\tau_i \circ \iota_\ell, \sigma_{(-1)^\ell}^{k-1}) + \sum_j \sum_{\ell=1}^{k+1} b_j (\tau_j' \circ \iota_\ell, \sigma_{(-1)^{\ell+1}}^{k-1})$$

$\in C_{k-1}(M;A)$ と定める.

Ex :

$\partial\Big($  $\to X\Big) := \Big($  $\to X\Big)$

$+$

$\Big($  $\to X\Big)$

$+$

$\Big($  $\to X\Big)$

また $k \leq 0$ のとき

$$\partial = \partial_k : C_k(X;A) \to \overset{=\{0\}}{C_{k-1}(X;A)}$$ を零写像とする.

<u>Prop 14.7</u> : $\partial = \partial_k : C_k(X;A) \to C_{k-1}(X;A)$ は well-defined で, A-加群としての準同型

$\left(\partial(f, \sigma_+^k) = -\partial(f, \sigma_-^k) \text{ in } C_{k-1}(X;A) \right)$

<u>Theorem 14.8</u> : $\partial^2 = \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \quad (\forall k \geq 0)$

(境界に境界は0)

特に $C_*(X;A) := (\{C_k(X;A)\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{\partial_k\}_{k \in \mathbb{Z}})$ は鎖複体.

Thm 14.8 の証明　$k \leq 0$ のときは明らか．$k \geq 1$ とする．

$^{\forall}\tau \in C(\Delta^{k+1}, X)$ をとる．

$\partial^2(\tau, \sigma_+^{k+1}) = -\partial^2(\tau, \sigma_-^{k+1})$ なので以下を示せばよい

(示) $\partial^2(\tau, \sigma_+^{k+1}) = 0$

まず $\partial(\tau, \sigma_+^{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+2} (\tau \circ \iota_l, \sigma^k_{(-1)^l})$．これより

$$\partial^2(\tau, \sigma_+^{k+1}) = \sum_{l=1}^{k+2} \partial(\tau \circ \iota_l, \sigma^k_{(-1)^l})$$

$$= \sum_{l=1}^{k+2} \sum_{t=1}^{k} (\tau \circ \iota_l \circ \iota_t, \sigma^{k-1}_{(-1)^t \cdot (-1)^l})$$

$$= \sum_{l=1}^{k+2} \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t+l} (\tau \circ \iota_l \circ \iota_t, \sigma_+^{k-1}) \quad \cdots (*)$$

ここで以下の Lemma を用いる.

Lemma 14.9 $k \geq 1$ とする.

$1 \leq t \leq k+1$ $1 \leq l \leq k+2$ について

$$\partial_l \circ \partial_t = \begin{cases} \partial_t \circ \partial_{l-1} & (t < l \text{ のとき}) \\ \partial_{t+1} \circ \partial_l & (l \leq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

as maps $\Delta_{k-1} \to \Delta_{k+1}$

(Hint: 直接計算)

$$\circledast = \sum_{t<l} (-1)^{t+l} (\tau \circ \partial_l \circ \partial_t, \sigma_+^{k-1}) + \sum_{l \leq t} (-1)^{t+l} (\tau \circ \partial_l \circ \partial_t, \sigma_+^{k-1})$$

$$= \sum_{t<l} (-1)^{t+l} (\tau \circ \partial_t \circ \partial_{l-1}, \sigma_+^{k-1}) + \sum_{l \leq t} (-1)^{t+l} (\tau \circ \partial_l \circ \partial_t, \sigma_+^{k-1})$$

$l' = t$
$t' = l-1$

$$= \sum_{l' \leq t'} (-1)^{l'+t'-1} (\tau \circ \partial_{l'} \circ \partial_{t'}, \sigma_+^{k-1}) + \sum_{l \leq t} (-1)^{t+l} (\tau \circ \partial_l \circ \partial_t, \sigma_+^{k-1})$$

$$= 0$$

$\boxtimes$

Def 14.10 鎖複体 $C_*(X;A)$ の k 次ホモロジー

$$H_k(X;A) := H_k(C_*(X;A)) = \mathrm{Ker}\,\partial_{k-1} / \mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$$

を X の A-係数 k-次特異ホモロジーと呼ぶ

(k-th singular homology with coefficients in A)

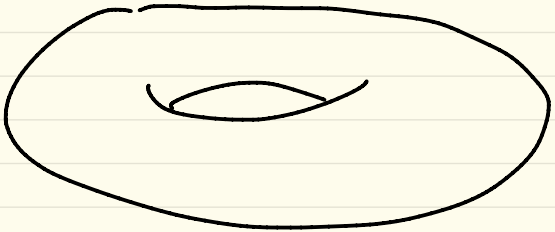
気持ち: $A = \mathbb{Z}$ のとき

$$\mathrm{Ker}\,\partial_k \longleftrightarrow \bigcup_{\substack{(\Omega,\sigma) \\ k\text{-dim'l} \\ \text{s.t. } \partial\Omega = \emptyset}} C(\Omega, X)$$

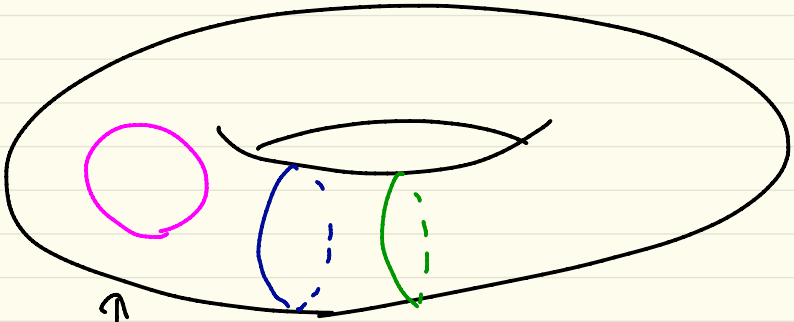
$\mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ で割る $\longleftrightarrow$ X 内で Ω を"ずらしたもの"を同じものだとみなす

$$H_k(X:\mathbb{Z}) \longleftrightarrow \{\Omega \to X \mid \Omega : k\text{-dim'l mfd w.c}\} / \{X\text{内でずらす}\}$$

Ex $X =$



$\Omega = S^1$



これらは別もの

同じだとみなす

X_1, X_2 : 位相空間とする.

Theorem 14.11 X_1, X_2 がホモトピー同値のとき

$$H_k(X_1; A) \cong H_k(X_2; A) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

つまり特異ホモロジーはホモトピー不変量

(証明略 : Thm 13.7 を用いる)

§13.3 C^∞-特異ホモロジー

以下，M : m-dim'l C^∞-mfd with corners

A : 可換環　　とする．

Def 13.12 :

$$C^\infty(\Delta_k, M) := \{ f : \Delta_k \to M \mid C^\infty\text{-級} \} \subset C(\Delta_k, M)$$

$$C^\infty(M; A) := \left\{ \sum_i a_i (f_i, \sigma_+^k) + \sum_j b_j (h_j, \sigma_-^k) \in C(M;A) \;\middle|\; f_i, h_j \in C^\infty(\Delta_k, M) \right\}$$

$$\subset C(M;A)$$

部分A-加群　　とおく．

Observation $^{\forall} c \in C_k^{\infty}(M;A) \ (\subset C_k(M;A))$

について $\partial c \in C_{k-1}^{\infty}(M;A)$

特に

$$C_*^{\infty}(M;A) := (\{C_k^{\infty}(M;A)\}_k, \{\partial_k\}_k) \text{ は鎖複体}$$

Def 13.13: 各 $k \in \mathbb{Z}$ について鎖複体 $C_*^\infty(X;A)$ の k 次ホモロジーを

$$H_k^\infty(M;A) := H_k(C_*^\infty(M;A)) = \frac{\mathrm{Ker}\ \partial_{k+1} : C_{k+1}^\infty(M;A) \to C_k^\infty(M;A)}{\mathrm{Im}\ \partial_k : C_k^\infty(M;A) \to C_{k-1}^\infty(M;A)}$$

とおく.

これを M の A 係数 k-次 C^∞-級特異ホモロジーと呼ぶ

(C^∞-singular homology)

or

smooth singular homology

Theorem 13.14: $H_k^\infty(M;A) \cong H_k(M;A) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

より正確には

$j : C_*^\infty(M;A) \hookrightarrow C_*(M;A)$ を自然な鎖準同型とすると、

誘導準同型 (Def 13.4)

$$(j_*)_k : \underset{\substack{\| \\ H_k^\infty(M;A)}}{H_k(C_k^\infty(M;A))} \to \underset{\substack{\| \\ H_k(M;A)}}{H_k(C_*(M;A))}$$

は A 加群の間の同型写像.

(証明略: Thm 13.7 と Whitney approximation theorem を用いる)