前回
(第10回)

§13 鎖複体とホモロジー

§14 特異ホモロジー

今回
(第11回)

§15 ド・ラームコホモロジー

§15 ド・ラームコホモロジー

導入については初回の講義を参照

- ド・ラームコホモロジーの定義
- ド・ラームコホモロジーのホモトピー不変性
- Mayer-Vietoris 完全系列
- ド・ラーム群同型
- ド・ラームの定理

§15.1 ド・ラーム コホモロジー

M : m-dim'l C^∞-mfd with corners ($\partial M = \emptyset$ の場合が メインターゲット)

とする.

$k = 0, \cdots, m$ について

$$\Lambda^k(M) := \{ C^\infty\text{-級 } k\text{-forms on } M \}$$

は vector space $/\mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{R}$-加群) であった.

$k < 0$ or $k > m$ のとき 形式的に

$$\Lambda^k(M) := \{0\}$$

を 0次元 vector sp$/\mathbb{R}$ としておく.

Remark: $k > m$ のとき "k-form on M" を自然に定義して

$$\Lambda^k(M) := \{ C^\infty\text{-級 } k\text{-form on } M \}$$

と考えてもよい.

ただし, 以下の定理から, "$\forall \omega : k\text{-form on } M,\ \omega \equiv 0$"

となるため, $\Lambda^k(M) = \{0\}$ としても同じことである.

Theorem 15.1 V を vector sp$/\mathbb{R}$ with $\dim V = m\ (> k)$ とする.

このとき "V 上の k 次交代形式" は ゼロ写像しかない

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$$

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$d = d_k : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M) \quad を$$

$$\begin{cases} k = 0, \cdots, m-1 \text{ のとき} & \text{外微分} \\ \text{それ以外のとき} & \text{ゼロ写像} \end{cases}$$

とする.

<u>Theorem 15.2</u> : $d_{k+1} \circ d_k = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

Thm 15.2 の証明

$k = 0, \cdots, m-2$ の場合のみ示せば十分.

$^\forall \omega$: C^∞-級 k-form on M をとる.

示. $(d \circ d)\omega \equiv 0$ as $(k+2)$-forms

$^\forall p \in M$, $^\forall V$: p の開近傍, $^\forall X_1, \cdots, X_{k+2} \in \mathfrak{X}(M)$

with $[X_i, X_j]|_V \equiv 0$ $(^\forall i \neq j)$

をとる.

Theorem 6.7 より, 以下を示せば十分

示. $\underbrace{((d_{k+1} \circ d_k)\omega)(X_1 \cdots X_{k+2})}_{C^\infty(M)}(p) = 0$

まず $s = 1, \cdots, k+2$ について $d\omega(X_1 \cdots \hat{X_s} \cdots X_{k+2}) \in C^\infty(M)$ を考える.

外微分の定義 (Section 6) より

Vとて

$$d\omega(X_1 \cdots \hat{X_s} \cdots X_{k+2}) = \sum_{l=1}^{s-1} (-1)^{l+1} X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{X_l} \cdots \hat{X_s} \cdots X_{k+2})$$

$$+ \sum_{l=s+1}^{k+2} (-1)^{l} X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{X_s} \cdots \hat{X_l} \cdots X_{k+2})$$

となる.

これより 再度 外微分の定義から

$$(((d\circ d)\omega)(X_1 \cdots X_{k+2}))(p)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} (X_s)_p \left(d\omega(X_1 \cdots \hat{X_s} \cdots X_{k+2}) \right)$$

V上で等しい

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} (X_s)_p \left(\sum_{l=1}^{s-1} (-1)^{l+1} X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{X_l} \cdots \hat{X_s} \cdots X_{k+2}) + \sum_{l=s+1}^{k+2} (-1)^{l} X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{X_s} \cdots \hat{X_l} \cdots X_{k+2}) \right)$$

$$= \sum_{l<s} (-1)^{s+l} (X_s)_p X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{l} \cdots \hat{s} \cdots X_{k+2})$$

$$+ \sum_{s<l} (-1)^{s+l+1} (X_l)_p X_s \, \omega(X_1 \cdots \hat{s} \cdots \hat{l} \cdots X_{k+2})$$

$$= \sum_{l<s} (-1)^{s+l} (X_s)_p X_l \, \omega(X_1 \cdots \hat{l} \cdots \hat{s} \cdots X_{k+2})$$

$$- \sum_{s<l} (-1)^{s+l} (X_l)_p X_s \, \omega(X_1 \cdots \hat{s} \cdots \hat{l} \cdots X_{k+2})$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

Cor 15.3 $\Lambda^*(M) := (\{\Lambda^k(M)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ は

"$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $k\mapsto -k$ を経由すると鎖複体

(添え字 k を $-k$ として考える)　(A = $\mathbb{R}$ とみる)

余鎖複体と言う

Def 15.4 各 $k\in\mathbb{Z}$ について

$$H^k_{dR}(M) := \mathrm{Ker}\, d_k / \mathrm{Im}\, d_{k-1} \quad (\text{vector sp}/\mathbb{R})$$

を M の k次ド・ラームコホモロジーと呼ぶ

(k-th de Rham cohomology)

Ex 15.5 M = 1点 (0次元多様体) のとき

$$\Lambda^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$ となる.

$$\rightsquigarrow H^k_{dR}(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

§15.2 ド・ラームコホモロジーのホモトピー不変性.

M, N : C^∞-mfd with corners

Definition 15.6 M と N が C^∞-homotopic

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f : M \to N : C^\infty$, $\exists g : N \to M : C^\infty$

s.t.

$$\begin{cases} f \circ g \underset{C^\infty\text{-homotope}}{\simeq} \mathrm{id}_N \\ g \circ f \underset{C^\infty\text{-homotope}}{\simeq} \mathrm{id}_M \end{cases}$$

$I := [0,1]$

(i.e. $\exists H : N \times I \to N : C^\infty$ s.t. $H(\cdot, 0) = f \circ g$, $H(\cdot, 1) = \mathrm{id}_N$)

Theorem 15.7 M と N が C^∞-homotopic

$\Rightarrow H^k_{dR}(M) = H^k_{dR}(N) \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

(すぐ後で示す)

Corollary 15.8

("Poincaré の補題" の一種)

$C_m := \{ (x_1 \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \ (\forall i) \}$ 内の

"open ball" $C_m \cap B_r(x) \quad (\forall r > 0, \forall x \in C_m)$

について

$$H^k_{dR}(C_m \cap B_r(x)) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Pf: $C_m \cap B_r(x)$ は 1点 $\{x\}$ と C^∞-homotopic.

Ex 15.5 と Thm 15.7 から Claim が従う.

Fact 15.9 : M, N : C^∞-mfd w.c.

次は同値

(i) M と N は C^∞-homotopic

(ii) M と N は位相空間として homotopic

Cor 15.10 ド・ラーム コホモロジーは ホモトピー不変量.

Thm 15.7 の証明

Prop 15.11 $f: M \to N$: C^∞-級とする.

各 k について $f_k^* : \Lambda^k(N) \to \Lambda^k(M)$ を引き戻しとする.

このとき $d \circ f_k^* = f_{k+1}^* \circ d$.

特に $f^* := (f^*)_k \,{}_{k \in \mathbb{Z}}$ は

余鎖複体 $\Lambda^*(N)$ から $\Lambda^*(M)$ への準同型

この設定で, 誘導準同型を $(f_\#^*)_k : H_{dR}^k(N) \to H_{dR}^k(M)$ と書く.

$\forall k \in \mathbb{Z}$

示 $(f^*_*)_k \circ (g^*_*)_k = id_{H^k_{dR}(M)}$, $(g^*_*)_k \circ (f^*_*)_k = id_{H^k_{dR}(N)}$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ ((f^* \circ g^*)_*)_k & & ((id^*_M)_*)_k \end{array}$$

Thm 13.7 より 以下を示せばよい

示 $f^* \circ g^* \underset{\text{homotope}}{\simeq} id^*_M$, $g^* \circ f^* \underset{\text{homotope}}{\simeq} id^*_N$

$f^* \circ g^* \underset{\text{homotope}}{\simeq} \mathrm{id}_M^*$ を示そう（$g^* \circ f^* \simeq \mathrm{id}_N^*$ も同様）

まず $i_0 : M \to M \times I, \quad p \mapsto (p, 0)$

$i_1 : M \to M \times I, \quad p \mapsto (p, 1)$ とする.

また各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$h_k : \Lambda^k(M \times I) \to \Lambda^{k-1}(M)$$

$$\omega \mapsto h_k \omega \quad (k = 1, \cdots, \dim M)$$

$$\text{その像} \quad (k : \text{otherwise})$$

ただし $(h_k \omega)_p (v_1 \cdots, v_{k-1}) := \int_0^1 \omega_{(p,t)}\left(v_1, \cdots, v_{k-1}, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_t\right) dt$ とおく.

Lemma 15.12 $\forall \omega \in \Lambda^k(M \times I)$

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k \omega) = i_1^* \omega - i_0^* \omega$$

(Hint：微積分の基本定理)

示 $f^* \circ g^* \underset{\text{homotope}}{\simeq} id_M^*$

仮定より $g \circ f \underset{C^\infty\text{-homotope}}{\simeq} id_M$ なので $\exists H : M \times I \to M$ s.t. $H \circ i_0 = g \circ f$, $H \circ i_1 = id_M$

このとき $D := h \circ H^*$ は $f^* \circ g^*$ から id_M^* へのホモトピーとなる.

実際，$\forall \omega \in \Lambda^k(M)$ について

$$
\begin{aligned}
(Dd + dD)(\omega) &= (h \circ H^*)(d\omega) + d(h \circ H^*)(\omega) \\
&= h\, d(H^* \omega) + dh(H^* \omega) \\
&= (i_1^* \circ H^*)(\omega) - (i_0^* \circ H^*)(\omega) \\
&= ((id_M^*) - (f^* \circ g^*))(\omega)
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

§ 15.3 Mayer - Vietoris 完全系列 （紹介のみ）

M : C^∞ - mfd w.c.

U, V : M の open sets で $U \cup V = M$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, hook, "f"] & \\ U \cap V \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, hook, "g"'] & \end{tikzcd}$$

とする.

Prop 15.13

$$0 \to \Lambda^*(M) \xrightarrow[f^*\oplus g^*]{} \Lambda^*(U \amalg V) \xrightarrow[i^*-j^*]{} \Lambda^*(U\cap V) \to 0$$

$$\Lambda^*(U \amalg V) \cong \Lambda^*(U) \oplus \Lambda^*(V)$$

$$\omega \overset{f^*\oplus g^*}{\longmapsto} f^*\omega + g^*\omega$$

$$(g_1, g_2) \xmapsto[i^*-j^*]{} i^*(g_1) - j^*(g_2)$$

は 余鎖複体の short exact sequence

(i.e. Ker = Image)

Theorem 15.14 (Mayer - Vietris 完全系列)

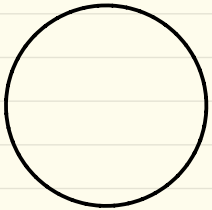
$\delta_k : H^k_{dR}(U \cap V) \to H^{k+1}_{dR}(M)$, $\mathbb{R}$-linear $(k \in \mathbb{Z})$ であって

(連結準同型)

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[dl, "\delta_{k-1}"'] & \\
H^k_{dR}(M) \arrow[r, "f^*_{\iota} + g^*_{\iota}"'] & H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \arrow[r, "(i-j)^*_{\iota}"] & H^k_{dR}(U \cap V) \arrow[dll, "\delta_k"] \\
H^{k+1}_{dR}(M) \arrow[r, "f^*_{\iota} + g^*_{\iota}"'] & H^{k+1}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \arrow[r, "(i-j)^*_{\iota}"] & H^{k+1}_{dR}(U \cap V) \arrow[dll, "\delta_{k+1}"] \\
 &
\end{tikzcd}
$$

が exact となるものが存在する.

(i.e. Ker = Image)

Ex : $M = S^1 =$ 

$U =$  $V =$  とする.

このとき $U \underset{\text{homotope}}{\simeq} \{1\text{点}\} \underset{\text{homotope}}{\simeq} V$

$U \cap V \underset{\text{homotope}}{\simeq} \{2\text{点}\}$

だから

$$H^k_{dR}(U) \cong H^k_{dR}(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$H^k_{dR}(U \cap V) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

また $H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \to H^0_{dR}(U \cap V)$ は $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^2$, $(a,b) \mapsto (a-b, a-b)$ とみなせる.

従って Mayer - Vietris 完全系列は

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dll] \\
H^0_{dR}(S^1) \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{R}^2 \arrow[dll] \\
H^1_{dR}(S^1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[dll] \\
 & \vdots & \\
 & & 0 \arrow[dll] \\
H^k_{dR}(S^1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[dll] \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

特に $H^k_{dR}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

であるとわかる.

§15.4 ド・ラ・ム準同型

M : m-dim'l C^∞-mfd with corners

$k \in \mathbb{Z}$ とする.

ゴール : $H^k_{dR}(M)$ の元を

$H^\infty_k(M;\mathbb{R})$ 上の線型汎関数

とみなしたい.

Def 15.15 各 $k = 0, \cdots, m$ について

写像 $C_k^\infty(M;\mathbb{R}) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ を

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

$c = \sum_i a_i(\tau_i, \sigma_+^k) + \sum_j b_j(\tau_j', \sigma_-^k)$ $(a_i, b_j \in \mathbb{R})$ としたとき

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \underbrace{\left(\int_{(\Delta_k, \sigma_+^k)} \tau_i^* \omega\right)}_{\in \mathbb{R}} + \sum_j b_j \underbrace{\left(\int_{(\Delta_k, \sigma_-^k)} (\tau_j')^* \omega\right)}_{\in \mathbb{R}}$$ として定める.

Prop 15.16 $C_k^\infty(N\ ?) \times \Lambda^k(M) \to \mathbb{R}$ は well-defined で双線型

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

(Hint: "$\int_{(\tau, \sigma_+^k)} \omega = -\int_{(\tau, \sigma_-^k)} \omega$" を確認する.)

Prop 15.17 $c \in C_k^\infty(M; \mathbb{R})$, $\eta \in \Lambda^{k-1}(M)$ について

$$\int_{\partial c} \eta = \int_c d\eta$$

← ストークスの定理の系.

ベクトル空間 $H_k^{\infty}(M;\mathbb{R})$ の双対空間を $H_{\infty}^{k}(M;\mathbb{R})$ と書くことにする.

<u>Remark</u>: 本来は "$H_{\infty}^{k}(M;\mathbb{R})$" は "$M$ 上の k 次 C^{∞}-級特異コホモロジー" を表す記号と思っても問題ない (詳細略)

Def 15.18 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

ド・ラーム準同型

$$\Phi_k : H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$$ を

以下で定める:

- $k = 0, 1, \cdots, m$ のとき

  各 $[\omega] \in H^k_{dR}(M;\mathbb{R})$ について

$$\Phi_k([\omega]) : H^m_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$[c] \mapsto \int_c \omega$$

- $k < 0$ or $k > m$ のとき

  $\Phi_k :=$ ゼロ写像

Theorem 15.19 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$\Phi_k : H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$$

は well-defined で線型写像

ストークスの定理の応用.

Theorem 15.20 (ド・ラームの定理)

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$\Phi_k : H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ は線型同型.

特に $\dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) < \infty$ のとき

$$\dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} H^\infty_k(M;\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} H_k(M;\mathbb{R})$$

(Thm 14.15)

(次節で証明のアイデアを述べる.)

Thm 15.19 の証明　線型性の証明は略.

Well-definedness を示す.　$k = 0, \cdots, m$ の場合のみ考えればよい.

$$^{\forall}\omega_1, {}^{\forall}\omega_2 \in \mathrm{Ker}\, d_k, \quad {}^{\forall}c_1, {}^{\forall}c_2 \in \mathrm{Ker}\, \partial_k$$

with $[\omega_1] = [\omega_2]$　　with $[c_1] = [c_2]$

をとる.

示 $\displaystyle\int_c \omega_1 = \int_{c_2} \omega_2$

$[\omega_1] = [\omega_2]$ より $^{\exists}\eta \in \Lambda^{k-1}(M)$ s.t. $\omega_1 + d\eta = \omega_2$

$[c_1] = [c_2]$ より $^{\exists}b \in C_{k+1}(M;\mathbb{R})$ s.t. $c_1 + \partial b = c_2$

$$\int_{c_2} \omega_2 = \int_{c_1 + \partial b} (\omega_1 + dy)$$

$$= \int_{c_1} (\omega_1 + dy) + \int_{\partial b} (\omega_1 + dy)$$

$$= \int_{c_1} \omega_1 + \int_{c_1} dy + \int_{\partial b} \omega_1 + \int_{\partial b} dy$$

$\downarrow$ Prop 16.3.

$$= \int_{c_1} \omega_1 + \underbrace{\int_{\partial c_1} y}_{=0} + \int_b \underbrace{d\omega_1}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial^2 b} y}_{=0}$$

$$= \int_{c_1} \omega_1$$

$\blacksquare$

§15.5 ド・ラームの定理

ド・ラームの定理

Theorem 15.20 (再掲)

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$\Phi_k : H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ は線型同型.

の証明の概略を紹介する.

この節の間のみ以下の用語を用いる.

Def. 15.21 M : C^∞-mfd w.c. とする.

M が property ㊙ を持つとは

"$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Phi_k : H^k_{dR}(M;\mathbb{R}) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ は線型同型"

となることとする.

示したいことは

"$\forall M$, M は property ㊙ を持つ.

ある種の"帰納法"を用いて示す.

一般論を用意しておく.

Def 15.22 M : C^∞-mfd w.c. とする.

M の開集合の族 $\{V_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ が ⊛-covering

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

① $^\forall N \geq 1$, $^\forall \theta_1 \cdots {}^\forall \theta_N \in \Xi$,

$\bigcap_{i=1}^{N} V_{\theta_i}$ は property ⊛ を持つ

② $\{V_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ は位相空間 M の開基

theorem 15.23 M が ⊛-covering を持つなら

M 自身も property ⊛ を持つ

(証明略: Mayer-Vietris 完全系列 + Whitney embedding theorem を用いる.)

$^\forall M$: m-dim'l C^∞-mfd w.c. をとる.

(示) M は property (*) を持つ

Step 1 : $C_m := \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \ (\forall i)\}$ の

任意の開集合は property (*) を持つ.

(Hint : Cor 15.8 + Thm 15.23)

(Poincaré の補題)

Step 2 : M は property (*) を持つ

(Hint : Step 1 の結果 + Thm 15.23) ∎