前回　§15　ド・ラームコホモロジー

今回　§16　閉多様体のトップコホモロジー

§17　Lie代数のコホモロジー

§16 閉多様体のトップコホモロジー（紹介のみ）

M : m-次元 C^∞-mfd with corners

Observation

$$H^k_{dR}(M) = 0 \quad \text{if} \quad k < 0 \ \text{or} \ k > m$$

Theorem 16.1 : M が compact なら

$$\dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M) < \infty \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

(Hint : Cor 15.8 + Thm 15.14)
(Poincaré の補題) (Mayer-Vietoris)

Cor 16.2 : M : m-dim compact C^∞-mfd w.c.

N : n-dim C^∞-mfd w.c. $(n \geq m)$ とする.

N が M と homotopic なら

$$\begin{cases} H^k_{dR}(N) = 0 & (k \notin \{1, \cdots, m\}) \\ \dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(N) < \infty & (\forall k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Def 16.3 M で閉多様体 (closed mfd)

$\overset{(\text{—})}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ M はコンパクトで $\partial M = \emptyset$

i.e. 通常の意味の C^∞-mfd

Recall: M が向き付け可能

(Thm 11.2)

$\Leftrightarrow$ M上の体積形式 ω が存在する.

(i.e. $\omega \in \Lambda^m(M)$ s.t. $\omega_p \neq 0$ $(\forall p \in M)$)

Theorem 16.4 M : m-dim'l connected closed mfd とする.

(i) M が向き付け可能のとき

$$H^m_{dR}(M) = \mathbb{R} \cdot [\omega] \simeq \mathbb{R}$$

(ω は M上の体積形式)

(ii) M が向き付け不可能のとき

$$H^m_{dR}(M) \cong \{0\}.$$

(cf. Lee §11)

§17 Lie 代数のコホモロジー

ゴール：$SO(3) := \left\{ g \in M(3;\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \det g = 1 \\ {}^t g = g^{-1} \end{array} \right\} \subset M(3;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$

$\mathbb{R}^9$ のコンパクト閉部分多様体

の ド・ラーム コホモロジーを計算しよう！

§17.1 Lie群

G : C^∞-mfd (角なし)

$m : G \times G \to G$: G上の群演算 とする.

Def 16.1 (G, m) が Lie群

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ・ $G \times G \xrightarrow{m} G$, $(g, h) \mapsto gh$

・ $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$

が共に C^∞-級

Ex 17.2 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする.

$GL(N;\mathbb{R}) := \{g \in M(N;\mathbb{R}) \mid \det g \neq 0\} \subset M(N;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$

$\mathbb{R}^{N^2}$ 内の開部分多様体

は "行列の積" について N^2 次元 Lie 群

Theorem 17.3: $GL(N;\mathbb{R})$ の部分群 G が

(von-Neumann Cartan の定理) $GL(N;\mathbb{R})$ の閉集合でもあるとき

G は Lie 群 (うまい C^∞-級構造が一意的に存在する)

Ex 17.4 $SO(N) := \left\{ g \in GL(N;\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \det g = 1 \\ {}^t g = g^{-1} \end{array} \right\} \subset GL(N;\mathbb{R})$ compact

は $\dfrac{N^2 - N}{2}$ 次元 compact Lie 群

§17.2 Lie 代数

$\mathfrak{g}$: 実ベクトル空間

$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$: bilinear map とする.

Def 17.5 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ が Lie 代数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{cases} \text{(i)} & [X, Y] = -[Y, X] \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}) \\ \text{(ii)} & [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \end{cases}$$

Ex 17.6 M : C^∞-mfd について

$\mathfrak{X}(M)$ は "ベクトル場のブラケット" について Lie 代数

(一般に無限次元)

Ex 17.7 $M(N:\mathbb{R})$: N^2 次元ベクトル空間は

$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in M(n:\mathbb{R}))$

により Lie 代数

Def 17.8 G : リー群 とする.

$$\mathrm{Lie}\, G := \{ X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ は左 } G\text{-不変} \}$$

i.e. $dL_g X_p = X_{gp}$ ($\forall g, p \in G$)

ただし $L_g : G \to G$ (C^∞-map)
$g \mapsto gg$

とおく.

Theorem 17.9

- $\mathrm{Lie}\, G$ は"ベクトル場のブラケット"についてLie代数
- $\dim \mathrm{Lie}\, G = \dim G$

Ex 17.10 $G = SO(N)$ とする. (Ex 17.4)

このとき $\mathrm{Lie}\, G \cong \mathfrak{so}(N) := \{ X \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^tX = -X \}$

(Lie代数として同型)

$M(N;\mathbb{R})$ の部分 Lie 代数

§17.3 Lie 代数のコホモロジー

以降, G : 連結 compact Lie 群

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$ とする.

ゴール : $H^k_{dR}(G) \cong H^k(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$

となるように "$\mathfrak{g}$ のコホモロジー" $H^k(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$

を定義したい.

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$\Lambda^k \mathfrak{g}^\vee := \begin{cases} \{\mathfrak{g} \text{ 上の交代形式}\} & (k \geq 0) \\ \{0\} & (k < 0) \end{cases}$$

とおく.

Rem : $k > \dim \mathfrak{g} = \dim G$ のとき $\Lambda^k \mathfrak{g}^\vee = \{0\}$ となる.

Def 17.11 線型写像 $\delta = \delta_k : \Lambda^k \mathfrak{g}^\vee \to \Lambda^{k+1} \mathfrak{g}^\vee$ を

Case 1 : $k \leq 0$ のとき $\delta_k = 0$

Case 2 : $k \geq 1$ のとき

各 $\eta \in \Lambda^k \mathfrak{g}^\vee$ について

$$\delta\eta : \underbrace{\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}}_{k+1} \to \mathbb{R}$$

$$(X_1 \cdots X_{k+1}) \mapsto \sum_{l<t} (-1)^{l+t} \eta\left(\underbrace{[X_l, X_t]}_{\text{Lie代数のブラケット}}, X_1, \cdots, \hat{X}_l, \cdots, \hat{X}_t, \cdots, X_{k+1}\right)$$

とおく.

Prop 17.12

$\wedge^* \mathfrak{g}^\vee = \{(\{\wedge^k \mathfrak{g}^\vee\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}})\}$ は 余鎖複体

(i.e. $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$ ($^\forall k \in \mathbb{Z}$))

Def 17.13 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$H^k(\mathfrak{g};\mathbb{R}) := H^k(\wedge^* \mathfrak{g}^\vee)$$

$$= \mathrm{Ker}\,\delta_k / \mathrm{Im}\,\delta_{k-1}$$

を $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{R}$-係数コホモロジー という

Theorem 17.14 G : 連結 compact Lie 群

$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$ とする.

このとき 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$H^k_{dR}(G) \cong H^k(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$$

Cor 17.15 G_1, G_2 : 連結 compact Lie 群

$\mathrm{Lie}\, G_1 \cong \mathrm{Lie}\, G_2$ とする.

このとき $H^k_{dR}(G_1) \cong H^k_{dR}(G_2)$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

特に $\underbrace{H_k(G_1; \mathbb{R}) \cong H_k(G_2; \mathbb{R})}_{\mathbb{Z}\text{係数にすると反例あり}}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$)

Thm 17.14 証明のキーポイント

① G 上の"左不変微分形式"のコホモロジー $\cong$ G 上のド・ラームコホモロジー

(H_{int} : G は左不変体積形式を持つ (Haar 測度) + ド・ラームの定理 + 特異コホモロジー $H_*(G)$ の左不変性 (G は連結))

② $\Lambda^k_L(G) := \{$左不変 k-forms on $G\} \simeq \Lambda^k \mathfrak{g}^\vee$

(G : 連結)

③ $\omega \in \Lambda^k_L(G)$, $X_1 \cdots X_{k+1} \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ (左不変ベクトル場)

について $$d\omega(X_1 \cdots X_{k+1}) = \sum_{l<t} (-1)^{l+t} \omega([X_l, X_t], X_1 \cdots \hat{X}_l \cdots \hat{X}_t \cdots X_{k+1})$$

(cf. Cor 6.16)

Ex 17.15

$G = S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ は 1次元連結 compact 可換 Lie 群

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, S^1 = \mathbb{R}$ with $[X, Y] = 0$ $(\forall X, Y \in \mathbb{R})$

$\rightsquigarrow$ $\delta_k = 0$ $(\forall k)$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Lambda^1 \mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Lambda^0 \mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Lambda^1 \mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Lambda^2 \mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \cdots \\
\arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "0"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r] &
\end{tikzcd}
$$

$\rightsquigarrow$ $H^k(\mathfrak{g} : \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0 \text{ or } 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \cong H^k_{dR}(S^1)$ (cf. Sect 15 の Ex)

Ex 17.16

$$G = SO(3) := \left\{ g \in GL(3;\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \det g = 1 \\ {}^t g = g^{-1} \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{r} \text{3次元連結 compact} \\ \text{Lie 群} \end{array} \right)$$

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, SO(3) \approx \{ X \in M(3;\mathbb{R}) \mid {}^t X = -X \}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{-2}"] & \Lambda^{-1}\mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta_{-1}"] & \Lambda^0\mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta_0"] & \Lambda^1\mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta_1"] & \Lambda^2\mathfrak{g}^\vee \arrow[r, "\delta_2"] & \Lambda^3\mathfrak{g} \arrow[r, "\delta_3"] & \Lambda^4\mathfrak{g} \arrow[r, "\delta_4"] & \cdots \\
\arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{R} \arrow[r, "0"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\sim", "\text{rank } 3"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "0"] & \mathbb{R} \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \quad H^k_{dR}(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 3) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases} \approx H^k_{dR}(SO(3))$$

計算

$$x := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad z := \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

とおくと

$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x, y, z\}$ で

$$[x, y] = z$$
$$[y, z] = x$$
$$[z, x] = y$$

となる.

$\{x, y, z\}$ の双対基底を $\{x^\vee, y^\vee, z^\vee\} \subset \mathfrak{g}^\vee$ とおく

すなわち

$$x^\vee(x) = 1 \quad x^\vee(y) = 0 \quad x^\vee(z) = 0$$
$$y^\vee(x) = 0 \quad y^\vee(y) = 1 \quad y^\vee(z) = 0$$
$$z^\vee(x) = 0 \quad z^\vee(y) = 0 \quad z^\vee(z) = 1$$

となる.

このとき

$$\Lambda^0 \mathfrak{g}^\vee = \mathbb{R}$$

$$\Lambda^1 \mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{g}^\vee = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x^\vee, y^\vee, z^\vee\}$$

$$\Lambda^2 \mathfrak{g}^\vee = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x^\vee \wedge y^\vee,\ y^\vee \wedge z^\vee,\ z^\vee \wedge x^\vee\}$$

$$\Lambda^3 \mathfrak{g}^\vee = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x^\vee \wedge y^\vee \wedge z^\vee\}$$

$\delta x^\vee$ を計算してみる. $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ に対して

$$\delta x^\vee(ax+by+cz,\ a'x+b'y+c'z)$$

$$= -x^\vee([ax+by+cz,\ a'x+b'y+c'z])$$

$$= -x^\vee((bc'-cb')x + \sim\sim)$$

$$= cb'-bc'$$

これより $\delta x^\vee = z^\vee \wedge y^\vee = -y^\vee \wedge z^\vee$ が得られる.

同様に $\delta y^\vee = x^\vee \wedge z^\vee = -z^\vee \wedge x^\vee$

$\delta z^\vee = y^\vee \wedge x^\vee = -x^\vee \wedge y^\vee$

特に $\delta = \delta_1 : \mathfrak{g}^\vee \to \Lambda^2 \mathfrak{g}^\vee$ は rank 3.

$\delta = \delta_2 : \wedge^2 \mathfrak{g}^\vee \to \wedge^3 \mathfrak{g}^\vee$ の計算のために次の命題を用いる.

Prop 17.17 $\mathfrak{g}$: 一般の Lie 代数.

$\alpha \in \wedge^k \mathfrak{g}^\vee$, $\beta \in \wedge^l \mathfrak{g}^\vee$ のとき

$$\delta(\alpha \wedge \beta) = \delta\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \delta\beta$$

この命題から

$$\begin{aligned}\delta(x^\vee \wedge y^\vee) &= \delta x^\vee \wedge y^\vee - x^\vee \wedge \delta y^\vee \\ &= -y^\vee \wedge z^\vee \wedge y^\vee + x^\vee \wedge z^\vee \wedge x^\vee \\ &= 0\end{aligned}$$

同様に $\delta(y^\vee \wedge z^\vee) = 0$

$\delta(z^\vee \wedge x^\vee) = 0$

特に $\delta = \delta_2 : \wedge^2 \mathfrak{g}^\vee \to \wedge^3 \mathfrak{g}^\vee$ はゼロ写像.