第一回 : §0 : 講義概要の説明

(前回) §1 : 力積作論の復習

第二回 : §2 : 陰起関数

(今日) §3 : ベクトル場

§2 陰起関数

内容

- 陰起関数の定義，存在定理
- C^∞-級関数の延長

§2.1 降起関数とその構成

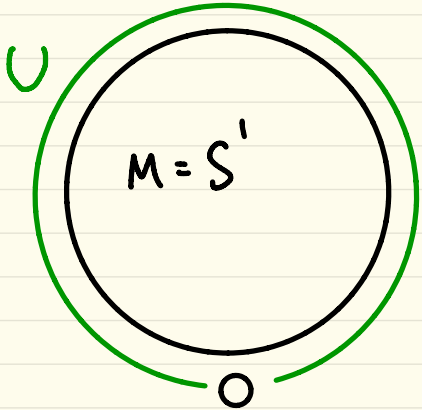
$M = (M, S_M)$: m-dim'l C^∞-mfd.

<u>Question</u> M 上の C^∞-関数は定数関数でないものも存在する？

Ans. Yes! ($\#M \geq 2$ のとき)

注意

各 $(U, x) \in S_M$ について



$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ f & \longmapsto & f|_U \end{array}$$

は全射とは限らない

用語

X : 位相空間

$f : X \to \mathbb{R}$: 写像

Def 2.1

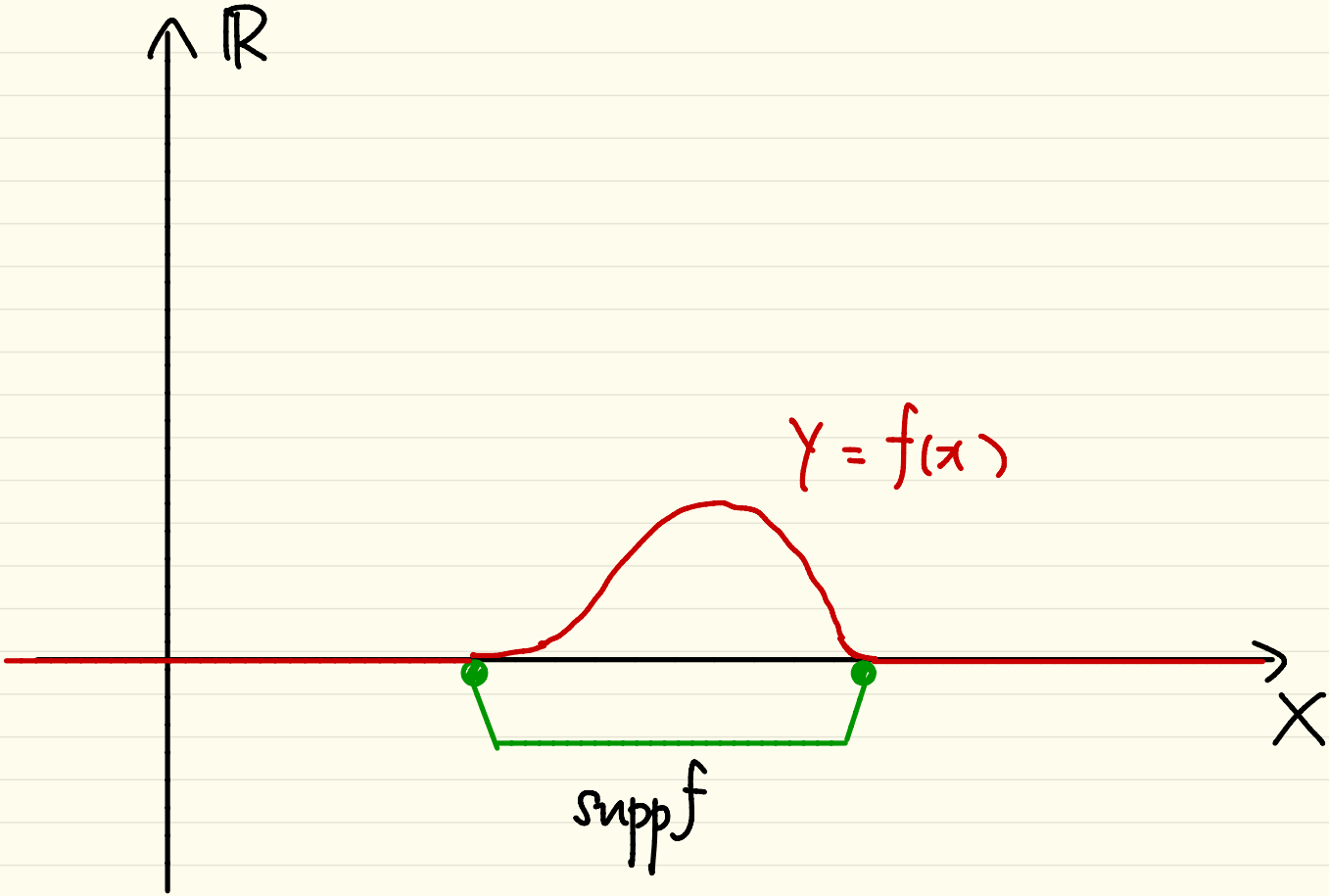
$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subset X$$

← Xにおける閉包

を f の台 (support) と呼ぶ

Def 2.2 $f \in C^\infty(M)$ が隆起関数
(bump function)

$\overset{\longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\operatorname{supp} f := \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$
が compact


$\mathbb{R}$
$y = f(x)$
X
$\operatorname{supp} f$

Theorem 2.3 $m \geq 1$

$0 \leq r_1 < r_2$ とする

$X = \mathbb{R}^m$

$V = \{ x \in X \mid \|x\| < r_1 \}$

$U = \{ x \in X \mid \|x\| < r_2 \}$ について

$\exists b$: bump fct on $X = \mathbb{R}^m$

s.t. $\begin{cases} b|_V \equiv 1 \\ \operatorname{supp} b \subset U \end{cases}$

Ex : $m = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ のとき $\left(\begin{array}{l} V = (-1,1) \\ U = (-3,3) \end{array} \right)$

$$b(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqq 1) \\ \dfrac{\exp\left(\frac{-1}{2-x}\right)}{\exp\left(\frac{-1}{x-1}\right) + \exp\left(\frac{-1}{2-x}\right)} & (1 < |x| \leqq 2) \\ 0 & (2 < |x|) \end{cases}$$

とすると, $b \in C^\infty(\mathbb{R})$ で $b|_V = 1$

$\operatorname{supp} b = [-2,2] \subset U$

Theorem 2.4 $M = (M, S_M)$: m-dim'l mfd

$\forall p \in M$, $\forall (U, x) \in S_M$ with $p \in U$,

$\exists b \in C^\infty(M)$, $\exists V$: pの開近傍

s.t. ① b は bump fct で $\operatorname{supp} b \subset U$

② $b|_V \equiv 1$

Corollary 2.5 $\forall p \in M$, $\forall (U, x) \in S_M$ with $p \in U$

$\exists V$: p の開近傍 s.t.

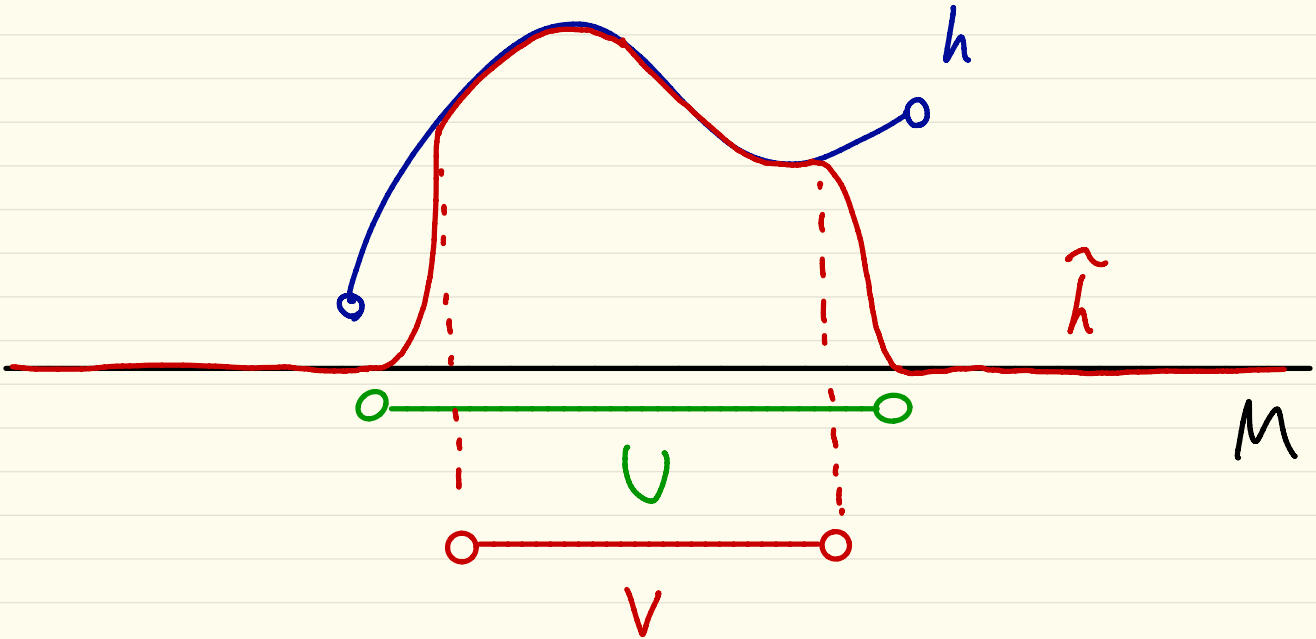
$\forall h \in C^\infty(U)$, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \tilde{h}|_V$

<u>Pf</u>: $\forall p, \forall (U, x)$ をとる b, V を Thm 2.4 のものとしてとる.

$\forall h \in C^\infty(U)$ をとる.

示 $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \tilde{h}|_V$

$$\tilde{h}(q) = \begin{cases} \hat{h}(q) \cdot b(q) & q \in U \\ 0 & q \notin U \end{cases}$$ とすればよい


h
$\tilde{h}$
M
U
V

Remark 隆起関数は一般にはテイラー展開できない

（C^ω級ではない）

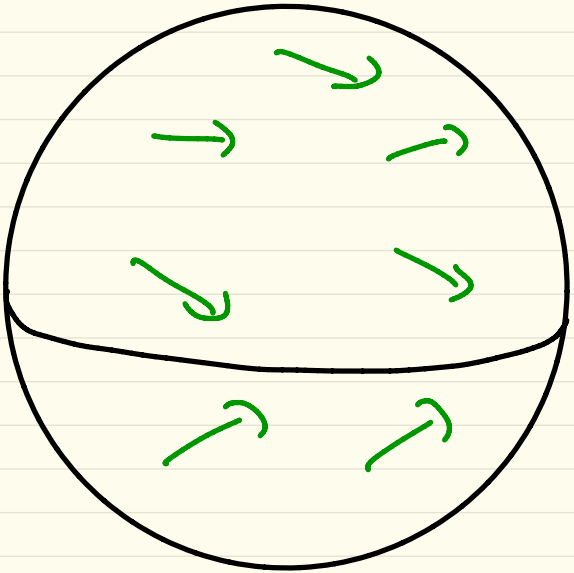
特に複素多様体で非コンパクトのとき正則な隆起関数はゼロ関数に限る.

§3 ベクトル場

内容：
- ベクトル場の定義
- 局所表示，C^∞-性
- ベクトル場による導関数
- C^∞-級ベクトル場のなす $C^\infty(M)$-加群
- ベクトル場はたくさんある

地球上の"風"を表わしたい

$\rightsquigarrow$ S^2 上のベクトル場



§3.1 ベクトル場の定義

$M = (M, \mathcal{S}_M)$: m-dim'l C^∞-mfd.

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$ とおく

$$\left(T_pM := \{ p \text{における接ベクトル} \} \right)$$

Def. 3.1 写像 $X : M \to TM$ がベクトル場

$$p \mapsto X_p$$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M,\ X_p \in T_pM$

つまり、各点においてその点での接ベクトルを指定したものをベクトル場という。

<u>Ex</u> $M = S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1 \right\}$

2次元 C^∞-級多様体

$$\varphi_t : S^2 \to S^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

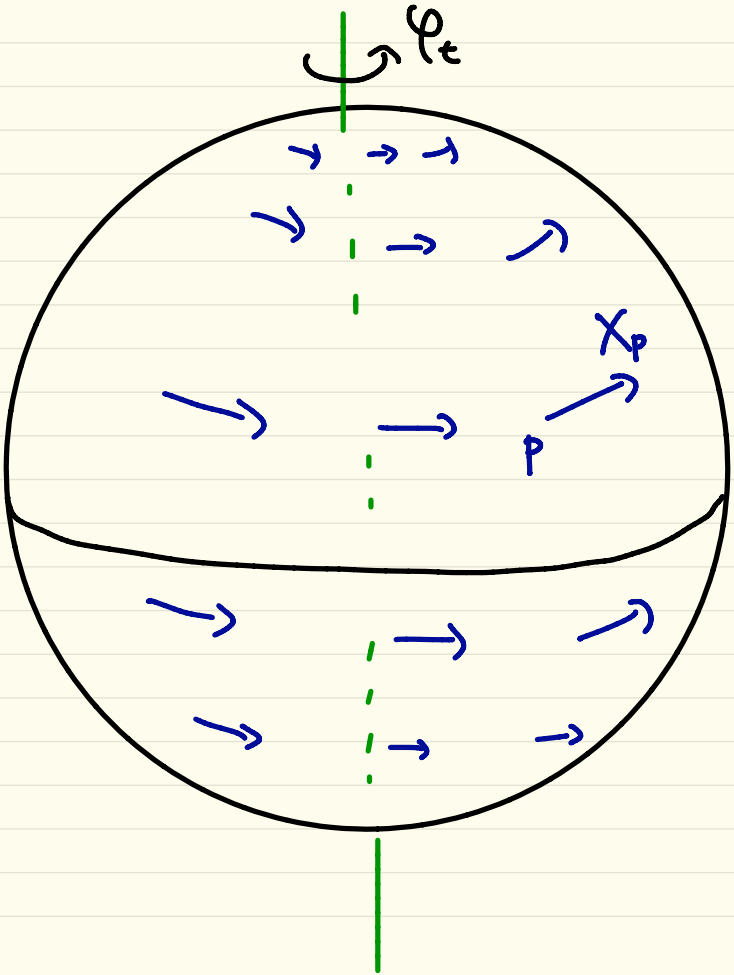
$(t \in \mathbb{R})$

とおく.

各 $p \in S^2$ について $X_p^\varphi \in T_p S^2$ を

$$X_p^\varphi : C^\infty(S^2) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$$

として定めると $X^\varphi : S^2 \to TS^2,\ p \mapsto X_p^\varphi$ はベクトル場


φ_t
X_p
p

◎ ベクトル場の基底表示

$(U, x) \in S_M$: 局所座標を fix

<u>Recall</u> : ${}^\forall p \in U$, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,m}$: T_pM の基底

<u>Observation</u> $X : M \to TM$: ベクトル場とする.

このとき $\exists!\ \xi_1^U, \cdots, \xi_m^U : U \to \mathbb{R}$ s.t.

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^U(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad ({}^\forall p \in U)$$

Def 3.3: ベクトル場 $X : M \to TM$ が C^∞-級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall (U, x) \in S_M$

$\xi_1^U \cdots \xi_m^U : U \to \mathbb{R}$ が C^∞-級

(ただし

$X_p = \sum \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (^\forall p \in U)$)

Theorem 3.4：ベクトル場 $X : M \to TM$ について
以下は同値

(i) X は C^∞-級

(ii) $\forall p \in M$, $\exists (U, x) \in S_M$ with $p \in U$
s.t. $\xi_1^U \cdots \xi_m^U : U \to \mathbb{R}$ が C^∞-級

Ex: S^2 の局所座標

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2 \;\middle|\; z > 0 \right\}$$

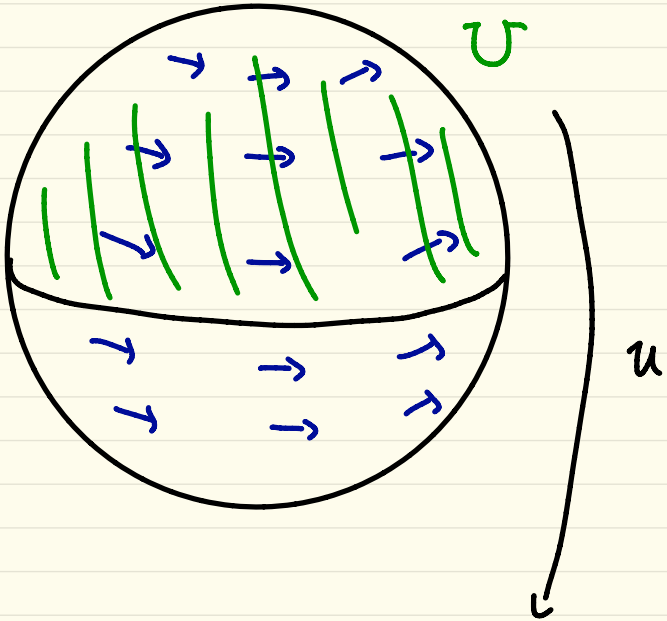
$$u : U \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ を考える.

ベクトル場 X^φ を (U, u) で局所表示すると

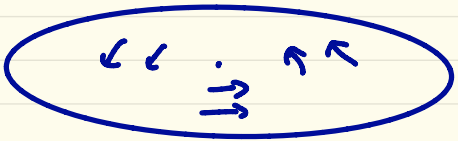
$$X^\varphi_p = -r_p \sin\theta_p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p + r_p \cos\theta_p \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p$$

(ただし $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $z > 0$ について $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \cos\theta_p \\ r_p \sin\theta_p \end{pmatrix}$ とした)

X^φ は C^∞-級になる.



$\mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2)\}$



@ ベクトル場による関数の微分

$X : M \to TM$: ベクトル場

$f \in C^\infty(M)$ について

$Xf : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_p f$

とおく

(Recall : $\underset{\underset{T_pM}{\cap}}{X_p} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$)

関数 Xf を"f の X による導関数"という.

Q: Xf は C^∞-級?

A. Theorem 3.5: ベクトル場 $X: M \to TM$ について以下は同値

(i) X は C^∞-級

(ii) $\forall f \in C^\infty(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$

Theorem 3.5 の証明はこの講義ノートの appendix でやる.

§3.2 ベクトル場全体のなす $C^\infty(M)$ 加群

$M = (M, S_M)$: m-dim'l C^∞-mfd.

$\mathfrak{X}(M) := \{ M$ 上の C^∞-級ベクトル場 $\}$

Prop 3.6 : $\mathfrak{X}(M)$ はベクトル空間

和 : $X + Y : M \to TM,\ p \mapsto X_p + Y_p$

スカラー倍 : $\lambda X : M \to TM,\ p \mapsto \lambda \cdot X_p$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \lambda \in \mathbb{R})$

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ について

$$fX : M \to TM, \quad p \mapsto f(p)X_p$$

とおくと、$fX \in \mathfrak{X}(M)$ となる.

(注意: $Xf : M \to \mathbb{R}$: 関数
$fX : M \to TM$: ベクトル場)

Prop. 3.7: $\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$-加群

◎ 隆起関数の応用

Theorem 3.8 : $^\forall p \in M$, $^\forall (U, x) \in S_M$ with $p \in U$,

$^\exists V$: pの開近傍 s.t.

$^\forall Y \in \mathfrak{X}(U)$, $^\exists \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ s.t.

$$Y|_V = \tilde{Y}|_V$$

証明は Cor 2.5 と同様.(bump fct でなめす")

Cor 3.9 : $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$

$\exists X \in \mathfrak{X}(M)$ s.t. $X_p = v$

<u>Proof</u> $(U, x) \in S_M$ with $p \in U$ をとる.

$v = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ とかける $(a_i \in \mathbb{R})$

$Y \in \mathfrak{X}(U)$ を $Y_q = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$ $(q \in U)$

とすると, $Y_p = v$

ここで $X \in \mathfrak{X}(M)$ を Thm 3.8 の $\tilde{Y}$ として

とればよい.

Topic : 多様体上の偏微分方程式

M : m-dim'l C^∞-mfd.

$X \in \mathfrak{X}(M)$

$f_0 \in C^\infty(M)$ とする.

Problem : Find $f \in C^\infty(M)$ s.t. $Xf \equiv f_0$

(1階の偏微分方程式)

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$f_0 \in C^\infty(M)$ とすると

Find : $f \in C^\infty(M)$ s.t. $X(Yf) = f_0$

は 二階の偏微分方程式

Appendix　Theorem 3.5 の証明

Theorem 3.5（再掲）：ベクトル場 $X : M \to TM$ について
以下は同値

(i) X は C^∞-級

(ii) $\forall f \in C^\infty(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$

(i) ⇒ (ii) を示す.

(i) を仮定. (ii) を示す.

$^\forall f \in C^\infty(M)$ をとる.

示 $Xf : M \to \mathbb{R}$ が C^∞

i.e. $^\forall (U, x) \in S_M$, Xf は "(U, x) でみると C^∞"

$^\forall (U, x) \in S_M$ をとる.

示 Xf は "(U, x) でみると C^∞"

i.e. $Xf \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ が C^∞

(i)を仮定しているので

C^∞-級に $\xi_1^U \cdots \xi_m^U : U \to \mathbb{R}$ がとれて

$$Xf_p = \sum_i \xi_i^U(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f \quad (\forall p \in U)$$

特に各 $w \in x(U)$ について

$$Xf \circ x^{-1}(w) = \sum_i (\xi_i^U \circ x^{-1})(w)\left(\frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_i}\right)_w$$

ここで $\xi_i^U \circ x^{-1}$, $\dfrac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_i} : x(U) \to \mathbb{R}$

は C^∞-級であるので,

$Xf \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ も C^∞-級. (ii)が示された.

(ii) ⇒ (i)

(ii) を仮定. (i) を示す.

示 X は C^∞ i.e. $^\forall (U, x) \in S_M$

$\xi_1^U, \cdots \xi_m^U : U \to \mathbb{R}$ が C^∞

$^\forall (U, x) \in S_M$ をとる.

示 $\xi_i^U : U \to \mathbb{R}$ が C^∞ $(^\forall i)$

$\left(X_p = \sum \xi_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right)$

$^\forall i_0 = 1, \cdots, m$, $\quad ^\forall p \in U$ をとる.

示 $\quad \xi_{i_0}^U : U \to \mathbb{R}$ は p のまわりで C^∞

i.e. $^\exists V \subset U$: p の開近傍 s.t.

$\xi_{i_0}^U|_V : V \to \mathbb{R}$ が C^∞

$h := x_{i_0} : U \to \mathbb{R}$ とする.

ただし $x_{i_0} : U \xrightarrow{x} \mathbb{R}^m \xrightarrow[\text{i番目の成分への射影}]{\mathrm{proj}_{i_0}} \mathbb{R}$ とおいた.

このとき $h \in C^\infty(U)$ である.

Cor 2.5 より $\exists V$: p の開近傍, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$

s.t. $h|_V \equiv \tilde{h}|_V$

この $\tilde{h}$ について、$q \in V$ をとると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \tilde{h} = \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{h} \circ x^{-1}(x(q) + te_i) - \tilde{h}(q)}{t}$$

（$e_1 \cdots e_m$ は $\mathbb{R}^m$ の標準基底）

$$= \lim_{t \to 0} \frac{h \circ x^{-1}(x(q) + te_i) - h(q)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{proj}_{i_0}(x(q) + te_i) - \mathrm{proj}_{i_0}(x(q))}{t}$$

$$= \begin{cases} 1 & i = i_0 \\ 0 & i \neq i_0 \end{cases}$$

特に 各 $q \in V$ について

$$X_q \tilde{h} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^U(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \tilde{h}$$

$$= \xi_{i_0}^U(q)$$

つまり $X\tilde{h}|_V = \xi_{i_0}^U|_V$

いま (ii) を仮定しているので

$$X\tilde{h} \in C^\infty(M)$$

特に $X\tilde{h}|_V \equiv \xi_{i_0}^U|_V : V \to \mathbb{R}$ も C^∞ 級

これで (i) が示された ∎